ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Ion Vladimirescu Florian Munteanu

Universitatea din Craiova, ROMÂNIA

Cuprins

Prefaţă

Acest curs este destinat în primul rând studenţilor din anul I, de la Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică a Universităţii din Craiova care au prevăzut în planul de învăţământ disciplina fundamentală obligatorie "Algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială", în semestrul I, anul I. De asemenea cursul este foarte util studenţilor în primul an al facultăţilor cu profil tehnic, economic, matematică-informatică, fizică, chimie, agronomie, horticultură, dar şi tuturor celor care doresc să înveţe şi să aprofundeze cunoştinţe teoretice şi practice de algebră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferenţială a curbelor şi suprafeţelor.

Cursul are o structură şi un conţinut foarte apropiate de cartea Profesorului Ion Vladimirescu, *Matematici speciale*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1987, fiind în mare măsură o reeditare a acesteia. Dar materialul de faţă este şi rodul colaborării deosebite dintre cei doi autori din ultimii 9 ani, colaborare pentru care al doilea autor, Florian Munteanu, aduce sincere mulţumiri Profesorului Ion Vladimirescu.

Cartea are trei părţi: Algebră liniară, Geometrie analitică şi Geometrie diferenţială. Prima parte se compune din capitolele: 1. Spaţii vectoriale; 2. Aplicaţii liniare; 3. Forme biliniare. Forme pătratice; 4. Spaţii euclidiene. Partea a doua este alcătuită din capitolele: 5. Vectori liberi; 6. Dreapta şi planul în spaţiu; 7. Conice şi cuadrice. A treia parte este formată din capitolele: 8. Curbe în plan şi în spaţiu; 9. Suprafeţe.

Noţiunile teoretice sunt prezentate foarte clar şi sperăm pe înţelesul tuturor studenţilor, fiind însoţite de foarte multe exemple şi exerciţii rezolvate complet. În plus, pentru o mai bună consolidare a noţiunilor, la sfârşitul fiecărui capitol este lăsat spre rezolvare câte un set de probleme. Pentru cititorul care vrea să parcurgă şi să înţeleagă conţinutul cărţii sunt necesare noţiuni elementare de matematică din clasele I-XII, cunoscute la nivel cel puţin satisfăcător, dar mai ales noţiunile de algebră din clasa a XI-a (matrici, determinanţi, sisteme de ecuaţii liniare). De asemenea, mai ales pentru ultima parte a cursului, este nevoie de cunoaşterea unor noţiuni fundamentale ale analizei matematice (derivate parţiale, teorema funcţiilor implicite) şi a unor noţiuni elementare de topologie (mulţime deschisă, vecinătate a unui punct).

Autorii

Partea I

ALGEBRĂ LINIARĂ

Capitolul 1

Spaţii vectoriale

1.1 Noţiunea de spaţiu vectorial

Fie V o mulţime nevidă, ale cărei elemente le vom nota cu $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ... şi K un corp comutativ (zis şi câmp) cu elementele notate α, β, γ, ... (exceptând zeroul şi unitatea corpului pe care le vom nota cu 0, respectiv 1). De asemenea, presupunem că pe mulţimea V este definită relaţia de egalitate a elementelor sale.

Definiţia 1.1.1 *Spunem că pe mulţimea V avem o structură de **spaţiu vectorial (liniar) peste corpul** K dacă V este dotată cu două legi de compoziţie:*

*I) O lege de compoziţie internă $+ : V \times V \longrightarrow V$, numită **adunare**, în raport cu care V are structură de grup.*

*II) O lege de compoziţie externă $\cdot_s : K \times V \longrightarrow V$, numită **înmulţire cu scalari**, care satisface următoarele axiome:*

i) $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$,

ii) $(\alpha+\beta)\,\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$,

iii) $(\alpha\beta)\,\overline{a}=\alpha\,(\beta\overline{a})$,

iv) $1\overline{a}$,

oricare ar fi $\overline{a}$, $\overline{b} \in V$ şi α, $\beta \in K$.

Elementele unui spaţiu vectorial se numesc **vectori**, iar elementele corpului se numesc **scalari**. Elementul neutru al grupului $(V, +)$ se numeşte **vectorul nul** (notat $\overline{0}$) al spaţiului vectorial V.

Un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale $\mathbf{R}$ (respectiv complexe $\mathbf{C}$) se numeşte **spaţiu vectorial real** (respectiv **complex**).

Exemplul 1.1.1 *Mulţimea $K^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) | x^i \in K,\ i = 1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, are structură de spaţiu vectorial peste corpul comutativ K, în raport cu operaţiile de adunare, definită prin*

$$\overline{x}+\overline{y}=(x^1+y^1, x^2+y^2, \ldots, x^n+y^n),$$

oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in K^n$
şi înmulţire cu scalari din K, *definită prin*

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x^1, \alpha x^2, \dots, \alpha x^n),$$

oricare ar fi $\alpha \in K$ *şi* $\overline{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in K^n$.

Spaţiul vectorial $(K^n, +, \cdot_s)$ *definit aici se numeşte* ***spaţiul aritmetic***. *În acest spaţiu vectorul nul este n-uplul* $\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$, *iar opusul vectorului* $\overline{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ *este vectorul* $-\overline{x} = (-x^1, -x^2, \dots, -x^n)$.

În particular, K *este spaţiu vectorial peste* K, *faţă de operaţiile de corp.*

Exemplul 1.1.2 *Fie* I *o mulţime nevidă şi* K *un corp comutativ. Mulţimea* $K^I = \{f | f : I \to K \text{ funcţie}\}$ *are structură de spaţiu vectorial peste* K, *în raport cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi înmulţirea funcţiilor cu scalari din* K *definite astfel:*

- oricare ar fi f, $g \in K^I$ *definim funcţia* $f+g$ *prin* $(f+g)(x) \stackrel{def}{=} f(x)+g(x)$, *pentru orice* $x \in I$;

-oricare ar fi $\alpha \in K$, $f \in K^I$ *definim funcţia* αf *prin* $(\alpha f)(x) \stackrel{def}{=} \alpha\, f(x)$, *pentru orice* $x \in I$.

În particular, dacă $I = \{1, \dots, m\}$ *şi* $J = \{1, \dots, n\}$, *atunci mulţimea* $K^{I \times J}$, *adică mulţimea matricilor cu elemente din* K, *având* m *linii şi* n *coloane (mulţime notată prin* $M_{m,n}(K)$*) are structură de spaţiu vectorial faţă de operaţiile obişnuite de adunare a matricelor şi înmulţirea matricilor cu scalari din* K.

Exemplul 1.1.3 *Mulţimea numerelor complexe are structură de spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale în raport cu operaţiile de adunare a numerelor complexe şi înmulţire a numerelor complexe cu numere reale.*

Exemplul 1.1.4 *Mulţimea polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienţi din* K, $K[X]$, *are o structură de spaţiu vectorial peste* K, *în raport cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea polinoamelor cu scalari din* K. *La fel şi mulţimea polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienţi din* K *de grad cel mult* n, $K_n[X]$, *este spaţiu vectorial peste* K.

Exemplul 1.1.5 *Dacă* V *este spaţiu vectorial peste* K, *atunci* V *este spaţiu vectorial peste orice subcorp* K' *al lui* K *(*$K' \subset K$ *se numeşte* ***subcorp*** *al lui* K *daca* K' *împreună cu operaţiile de corp de pe* K *este tot corp). În particular,* $\mathbf{C}$ *este spaţiu vectorial peste* $\mathbf{R}$ *şi peste* $\mathbf{Q}$. $\mathbf{R}$ *este spaţiu vectorial peste* $\mathbf{Q}$.

Propoziţia 1.1.1 *Fie* V *un spaţiu vectorial peste* K. *Atunci, avem:*

a) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$, *oricare ar fi* $\overline{x}$, $\overline{y} \in V$;

b) Dacă $\alpha \in K$ *şi* $\overline{x} \in V$, *atunci* $\alpha\overline{x} = \overline{0}$ *dacă şi numai dacă* $\alpha = 0$ *sau* $\overline{x} = \overline{0}$;

c) Dacă $\alpha \in K$ *şi* $\overline{x} \in V$, *atunci* $(-\alpha)\,\overline{x} = \alpha\,(-\overline{x}) = -\,(\alpha\overline{x})$.

Demonstraţie. *a) Egalităţile* $(1+1)(\overline{x}+\overline{y}) = (1+1)\overline{x}+(1+1)\overline{y} = \overline{x}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{y}$ *şi* $(1+1)(\overline{x}+\overline{y}) = 1(\overline{x}+\overline{y}) + 1(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}+\overline{y}+\overline{x}+\overline{y}$, *adevărate pentru orice* $\overline{x}$, $\overline{y} \in V$ *implică* $\overline{x}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{y} = \overline{x}+\overline{y}+\overline{x}+\overline{y}$, *adică* $\overline{x}+\overline{y} = \overline{y}+\overline{x}$.

b) Dacă $\alpha = 0$ *avem* $\alpha\overline{x} = 0\overline{x} = (0+0)\overline{x} = 0\overline{x} + 0\overline{x}$, *pentru orice* $\overline{x} \in V$. *Atunci* $0\overline{x} = \overline{0}$, *pentru orice* $\overline{x} \in V$. *Dacă* $\overline{x} = \overline{0}$, *atunci avem* $\alpha\overline{x} = \alpha\overline{0} = \alpha(\overline{0}+\overline{0}) = \alpha\overline{0} + \alpha\overline{0}$, *oricare ar fi* $\alpha \in K$. *Deci,* $\alpha\overline{0} = \overline{0}$.

Reciproc, arătăm că dacă $\alpha\overline{x} = \overline{0}$ *atunci* $\alpha = 0$ *sau* $\overline{x} = \overline{0}$. *Într-adevăr, dacă avem* $\alpha \neq 0$, *atunci* $\alpha^{-1}(\alpha\overline{x}) = \alpha^{-1}\overline{0} = \overline{0}$ *(ţinând cont de cele de mai sus) şi* $\alpha^{-1}(\alpha\overline{x}) = (\alpha^{-1}\alpha)\overline{x}) = 1\overline{x} = \overline{x}$, *de unde rezultă că* $\overline{x} = \overline{0}$. *Iar dacă* $\alpha = 0$, *atunci e clar că* $\alpha\overline{x} = \overline{0}$.

c) Mai întâi, din faptul că $\overline{x} + (-1)\overline{x} = (1+(-1))\overline{x} = 0\overline{x} = \overline{0}$, *rezultă că* $-\overline{x} = (-1)\overline{x}$.

Acum, pentru orice $\alpha \in K$ *şi* $\overline{x} \in V$ *avem* $(-\alpha)\,\overline{x} = ((-1)\alpha)\,\overline{x} = (\alpha(-1))\,\overline{x} = \alpha((-1)\,\overline{x}) = \alpha(-\overline{x})$ *şi* $(-\alpha)\,\overline{x} = ((-1)\alpha)\,\overline{x} = (-1)(\alpha\overline{x}) = -(\alpha\overline{x})$. ■

Corolarul 1.1.1 *i) Dacă* $\alpha \in K \setminus \{0\}$ *şi* $\overline{x}$, $\overline{y} \in V$, *atunci* $\alpha\overline{x} = \alpha\overline{y}$ *dacă şi numai dacă* $\overline{x} = \overline{y}$.

ii) Dacă α, $\beta \in K$, $\alpha \neq \beta$ *atunci* $\alpha\overline{x} = \beta\overline{x}$ *dacă şi numai dacă* $\overline{x} = \overline{0}$.

În continuare, cu excepţia situaţiilor în care se precizează altceva, prin corpul comutativ K vom înţelege că este vorba despre corpul numerelor reale $\mathbf{R}$ sau corpul numerelor complexe $\mathbf{C}$.

1.2 Liniar dependenţă. Sistem de generatori

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi $\mathcal{S} = \{\overline{a}_i | i \in I\} \subset V$, unde I este o mulţime oarecare de indici.

Definiţia 1.2.1 *Spunem că vectorul* $\overline{x}$ *este o* ***combinaţie liniară*** *de vectori din* $\mathcal{S}$ *dacă există scalarii* $\alpha^i \in K$, $i \in I$, *astfel încât* $\overline{x} = \sum\limits_{i \in I} \alpha^i \overline{a}_i$, *unde mulţimea* $\{i \in I | \alpha^i \neq 0\}$ *este finită.*

În particular, vectorul $\overline{x}$ este o combinaţie liniară de vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n \in V$ dacă există scalarii α^1, α^2, ..., $\alpha^n \in K$ astfel încât $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \overline{a}_i$.

De exemplu, vectorul nul este o combinaţie liniară de orice vectori din $\mathcal{S}$, oricare ar fi $\mathcal{S} \subset V$.

Definiţia 1.2.2 *Mulţimea* $L(\mathcal{S})$ *a tuturor combinaţiilor liniare de vectori din* $\mathcal{S}$ *se numeşte* ***acoperirea liniară*** *(sau anvelopa liniară) a lui* $\mathcal{S}$.

În particular, dacă $\mathcal{S} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$, atunci

$$L(\mathcal{S}) = L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \overline{a}_i \,\middle|\, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \in K \right\}.$$

Exemplul 1.2.1 *În spaţiul aritmetic* $\mathbf{R}^2$*, se consideră vectorii* $\overline{a}_1 = (1, -1)$ *şi* $\overline{a}_2 = (2, 1)$*. Atunci acoperirea liniară a sistemului* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ *este*

$$L(\overline{a}_1, \overline{a}_2) = \{\alpha^1\overline{a}_1 + \alpha^2\overline{a}_2 | \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbf{R}\} = \{(\alpha^1 + 2\alpha^2, -\alpha^1 + \alpha^2) | \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbf{R}\}.$$

Vectorul $\overline{x} = (2, 2) \in \mathbf{R}^2$ *se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii* $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ *astfel:*

$$\overline{x} = -\frac{2}{3}\overline{a}_1 + \frac{4}{3}\overline{a}_2.$$

Propoziţia 1.2.1 *Dacă* $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m \in L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$*, atunci* $L(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m) \subseteq L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$*.*

Demonstraţie. Se ţine cont de faptul că pentru orice $j = 1, \ldots, m$ avem $\overline{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i \overline{a}_i$, unde $\alpha_j^i \in K$, $1 \le j \le m$, $1 \le i \le n$. ■

Propoziţia 1.2.2 *Dacă* $\overline{a} \in L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$*, atunci* $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n) = L(\overline{a}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$*.*

În particular, $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n) = L(\overline{0}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$*.*

Definiţia 1.2.3 *Sistemul finit de vectori* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ *se numeşte* ***liniar dependent*** *dacă există scalarii* $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \in K$*, nu toţi nuli, astfel încât* $\alpha^1\overline{a}_1 + \alpha^2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha^n\overline{a}_n = \overline{0}$*. Se mai spune că vectorii* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ *sunt liniar dependenţi.*

Dacă vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ *nu sunt liniar dependenţi, atunci spunem că ei sunt liniar independenţi (sau spunem că sistemul* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\} \subset V$ *este liniar independent). Altfel spus, vectorii* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ *sunt liniar independenţi dacă egalitatea* $\alpha^1\overline{a}_1 + \alpha^2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha^n\overline{a}_n = \overline{0}$ *are loc numai pentru* $\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^n = 0$*.*

Exemplul 1.2.2 *1. Vectorii* $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$*,* $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$*,* $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$ *din spaţiul aritmetic* $\mathbf{R}^3$ *sunt liniar independenţi. Într-adevăr, din* $\alpha^1\overline{e}_1 + \alpha^2\overline{e}_2 + \alpha^3\overline{e}_3 = \overline{0}$ *rezultă* $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = (0, 0, 0)$*, adică* $\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 0$*.*

2. Vectorii $\overline{a}_1 = (1, -1, 2)$*,* $\overline{a}_2 = (2, 1, 1)$*,* $\overline{a}_3 = (1, 2, -1)$ *din spaţiul aritmetic* $\mathbf{R}^3$ *sunt liniar dependenţi deoarece* $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 + \overline{a}_3 = \overline{0}$*, adică există o combinaţie liniară nulă de aceşti vectori, în care nu toţi scalarii sunt nuli.*

Definiţia 1.2.4 *Sistemul arbitrar* $\mathcal{S} = \{\overline{a}_i | i \in I\}$ *de vectori din* V *se numeşte* ***liniar dependent*** *dacă există* $I_1 \subset I$*, finită, astfel ca subsistemul finit* $\mathcal{S}_1 = \{\overline{a}_i | i \in I_1\}$ *să fie liniar dependent. În caz contrar, sistemul* $\mathcal{S}$ *se numeşte liniar independent.*

Exemplul 1.2.3 *Fie* $\mathbf{R}[X]$ *spaţiul vectorial real al polinoamelor de o nedeterminată cu coeficienţi reali. Sistemul* $\mathcal{S} = \{X^i | i \in \mathbf{N}\}$ *este liniar independent.*

Propoziţia 1.2.3 *i) Sistemul $\{\overline{a}\} \subset V$ este liniar independent dacă şi numai dacă $\overline{a} \neq \overline{0}$.*

ii) Un sistem de vectori ai unui spaţiu vectorial care conţine vectorul nul este liniar dependent.

iii) Orice sistem de vectori care conţine un sistem de vectori liniari dependenţi este liniar dependent.

iv) Orice sistem de vectori care este conţinut într-un sistem liniar independent este liniar independent.

Propoziţia 1.2.4 *Vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n \in V$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă cel puţin unul dintre ei se scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.*

Demonstraţie. Presupunem că vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ sunt liniar dependenţi. Atunci, există scalarii λ^1, ..., $\lambda^n \in K$, nu toţi nuli, astfel ca $\lambda^1\overline{a}_1 + \lambda^2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda^n\overline{a}_n = \overline{0}$. Dacă, de pildă, $\lambda^i \neq 0$, atunci $\overline{a}_i = \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n} (-\lambda^j(\lambda^i)^{-1})\overline{a}_j$.

Reciproc, dacă $\overline{a}_i = \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n} \alpha^j\overline{a}_j$, atunci $\alpha^1\overline{a}_1 + \cdots + \alpha^{i-1}\overline{a}_{i-1} + (-1)\overline{a}_i + \alpha^{i+1}\overline{a}_{i+1} + \cdots + \alpha^n\overline{a}_n = \overline{0}$, adică $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ sunt liniar dependenţi (deoarece există o combinaţie liniară nulă de $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ în care nu toţi scalarii sunt nuli). ■

Definiţia 1.2.5 *Spunem că sistemul $\mathcal{S}$ de vectori din V este un **sistem de generatori** pentru V dacă orice vector $\overline{x} \in V$ se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din $\mathcal{S}$ (cu alte cuvinte, dacă $V = L(\mathcal{S})$).*

*În cazul particular $\mathcal{S} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ spunem că vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ **generează** spaţiul vectorial V, adică $V = L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$.*

Observaţia 1.2.1 *i) Orice spaţiu vectorial V posedă cel puţin un sistem de generatori, de exemplu chiar V.*

ii) Dacă $V = L(\mathcal{S})$ şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ atunci $V = L(\mathcal{S}')$.

Exemplul 1.2.4 *Vectorii $\overline{a}_1 = (1, -1)$, $\overline{a}_2 = (2, 1)$ generează spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^2$, deoarece oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$ avem $\overline{x} = \alpha^1\overline{a}_1 + \alpha^2\overline{a}_2$, unde $\alpha^1 = \frac{x^1 - 2x^2}{3}$ şi $\alpha^1 = \frac{x^1 + x^2}{3}$.*

Uneori vom folosi *convenţia lui Einstein* (sau *regula indicilor muţi*). Astfel, în loc de $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^i\overline{a}_i$ vom scrie $\lambda^i\overline{a}_i$, $1 \leq i \leq n$ sau în loc de $\sum\limits_{i\in I} \lambda^i\overline{a}_i$ vom scrie $\lambda^i\overline{a}_i$, $i \in I$. Atunci când se subînţelege mulţimea valorilor pe care le ia indicele de sumare i vom scrie simplu $\lambda^i\overline{a}_i$.

1.3 Bază şi dimensiune

Propoziţia 1.3.1 *Fie $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ vectori ai spaţiului vectorial V şi $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ...,$\overline{b}_m \in L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$ vectori liniar independenţi. Atunci, $m \leq n$.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $m > n$. Deoarece $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ...,$\overline{b}_m \in L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$, rezultă că oricare ar fi $i = 1, \ldots, m$, avem $\overline{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i^j \overline{a}_j$. Considerăm sistemul de n ecuaţii liniare şi omogene, cu necunoscutele x^1, ..., x^m,

$$\begin{cases} \alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 + \cdots + \alpha_m^1 x^m = 0 \\ \alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \cdots + \alpha_m^2 x^m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^n x^1 + \alpha_2^n x^2 + \cdots + \alpha_m^n x^m = 0 \end{cases}$$

Din presupunerea că $m > n$ rezultă că acest sistem are şi soluţii nebanale (deoarece rangul matricii sistemului este mai mic strict decât numărul de necunoscute). Dacă $(\lambda^1, \ldots, \lambda^m)$ este o astfel de soluţie nebanală, atunci $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda^i \overline{b}_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda^i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i^j \overline{a}_j \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^j \lambda^i \right) \overline{a}_j = \sum\limits_{j=1}^{n} 0 \overline{a}_j = \overline{0}$. Contradicţie cu liniar independenţa vectorilor $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$. Deci, presupunerea facută este falsă şi astfel avem $m \leq n$. ■

Corolarul 1.3.1 *Dacă $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n \in V$, iar $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ...,$\overline{b}_m \in L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$ cu $m > n$, atunci $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$ sunt liniar dependenţi.*

Definiţia 1.3.1 *Sistemul $\mathcal{B}$ de vectori din spaţiul vectorial V se numeşte **bază** pentru V dacă este liniar independent şi sistem de generatori pentru V.*

Exemplul 1.3.1 *1. Vectorii $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$ din spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^3$ constituie o bază pentru acest spaţiu vectorial. De asemenea, sistemul $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$ este o bază pentru spaţiul aritmetic K^n, numită **baza canonică** (sau naturală sau standard) a lui K^n.*

2. Sistemul $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ constituie o bază pentru spaţiul vectorial al polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienţi reali, de grad cel mult 2, $\mathbf{R}_2[X]$, iar $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ este o bază pentru spaţiul vectorial al polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienţi reali, $\mathbf{R}[X]$.

3. Vectorii $E_{ij} \in M_{m,n}(K)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, unde

$$E_{ij}(k, l) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (i, j) \neq (k, l) \\ 1, & \text{dacă } (i, j) = (k, l) \end{cases},$$

oricare ar fi $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$, constituie o bază pentru spaţiul vectorial $M_{m,n}(K)$ al matricilor cu elemente din K, având m linii şi n coloane.

Teorema 1.3.1 ***(de existenţă a bazei)*** *Orice spaţiu vectorial nenul (care nu se reduce doar la vectorul nul) posedă cel puţin o bază. Mai exact, din orice sistem de generatori al lui V se poate extrage cel puţin o bază.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema numai în cazul când V admite un

sistem finit de generatori, adică V este un spaţiu finit generat. În acest sens, fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m\}$ un sistem de generatori pentru V. Având în vedere un rezultat din secţiunea precedentă putem presupune că toţi vectorii lui $\mathcal{B}$ sunt nenuli. Pentru demonstraţie folosim metoda inducţiei matematice, după $m \geq 1$, numărul de vectori din $\mathcal{B}$.

Etapa I (verificarea): Pentru $m = 1$, este clar că $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1\}$ este o bază pentru V, deoarece $\overline{a}_1 \neq \overline{0}$, adică este $\overline{a}_1$ şi liniar independent.

Etapa a II-a (demonstraţia): Presupunem că în orice spaţiu generat de $m-1$ vectori există cel puţin o bază şi vom demonstra că dacă un spaţiu V este generat de m vectori, $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, atunci acesta admite cel puţin o bază.

Avem două situaţii:

a) $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ sunt liniar independenţi şi atunci $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ formează o bază pentru V, sau

b) $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ sunt liniar dependenţi şi atunci cel puţin unul dintre ei se poate scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi $m-1$ vectori. Astfel, V este generat de $m-1$ vectori şi conform ipotezei de inducţie, rezultă că V admite cel puţin o bază. ■

Teorema 1.3.2 ***(bazei)*** *Toate bazele unui spaţiu vectorial sunt formate din acelaşi număr de vectori.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m\}$ două baze ale unui spaţiu vectorial V.

Presupunem că $m > n$. Aplicând corolarul de mai sus rezultă că $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$ sunt liniar dependenţi. Absurd şi prin urmare presupunerea facută este falsă. Deci, $m \leq n$. Analog, dacă presupunem $m < n$ şi aplicăm acelaşi corolar obţinem că $n \leq m$. În concluzie $m = n$. ■

Acum are sens următoarea definiţie:

Definiţia 1.3.2 *Spunem că spaţiul vectorial V are* ***dimensiunea finită*** *n (şi scriem $\dim V = n$) dacă există o bază a lui V formată din n vectori. În caz contrar, spunem că spaţiul vectorial V are* ***dimensiunea infinită*** *şi scriem $\dim V = \infty$.*

Spaţiul nul $V = \{\overline{0}\}$ are, prin definiţie, ***dimensiunea zero****.*

Când este pericol de confuzie, scriem $\dim_K V = n$, pentru V un spaţiu vectorial peste K. A se vedea că $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 1$, iar $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$.

Exemplul 1.3.2 *1. Spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^3$ are dimensiunea 3, iar $\dim K^n = n$, pentru orice corp comutativ K.*

2. $\dim \mathbf{R}_n[X] = n + 1$, *iar* $\mathbf{R}[X]$ *este un spaţiu vectorial de dimensiune infinită.*

3. $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^n = n$, $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^n = 2n$.

4. $\dim M_{m,n}(K) = mn$, *iar* $\dim_{\mathbf{C}} M_{m,n}(\mathbf{C}) = mn$, $\dim_{\mathbf{R}} M_{m,n}(\mathbf{C}) = 2mn$.

De acum înainte când vom spune că un spaţiu vectorial are dimensiunea n înţelegem că n este finit.

Observaţia 1.3.1 *Conform propoziţiei 1.3.1 avem ca dacă* $\dim V = n$, *atunci orice sistem din* V *format cu* $n+1$ *sau mai mulţi vectori este liniar dependent.*

1.4 Coordonatele unui vector relativ la o bază

Teorema 1.4.1 *Fie* V *un spaţiu vectorial şi* $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\} \subset V$. *Atunci* $\mathcal{B}$ *este bază a lui* V *dacă şi numai dacă orice vector* $\overline{x} \in V$ *se poate scrie în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii lui* $\mathcal{B}$, $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a lui V. Atunci, pentru orice vector $\overline{x} \in V$, există scalarii x^1, ..., $x^n \in K$ astfel încât $\overline{x} = x^1\overline{a}_1 + \cdots + x^n\overline{a}_n$. Dacă ar mai exista şi alţi scalari y^1, ..., $y^n \in K$ astfel încât $\overline{x} = y^1\overline{a}_1 + \cdots + y^n\overline{a}_n$, atunci avem $x^1\overline{a}_1 + \cdots + x^n\overline{a}_n = y^1\overline{a}_1 + \cdots + y^n\overline{a}_n$ sau $\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i - y^i)\overline{a}_i = \overline{0}$. Din liniar independenţa sistemului $\mathcal{B}$ rezultă $x^i = y^i$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, adică scrierea lui $\overline{x}$ ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\mathcal{B}$ este unică.

Reciproc, dacă orice vector $\overline{x}$ din V se scrie în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$, atunci este evident că $\mathcal{B}$ este un sistem de generatori pentru V. Rămâne de aratat că $\mathcal{B}$ este şi sistem liniar independent. Pentru aceasta, dacă considerăm combinaţia liniară nulă $\alpha^1\overline{a}_1 + \alpha^2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha^n\overline{a}_n = \overline{0}$ şi dacă ţinem cont de ipoteză şi de faptul că avem şi $0\overline{a}_1 + 0\overline{a}_2 + \cdots + 0\overline{a}_n = \overline{0}$, rezultă $\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^n = 0$. Deci, $\mathcal{B}$ este o bază a lui V. ■

Aşadar, dacă $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ este o bază a lui V atunci orice vector $\overline{x} \in V$ se poate scrie în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii lui $\mathcal{B}$, adică există şi sunt unici scalarii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in K$ astfel ca

$$\overline{x} = x^1\overline{a}_1 + x^2\overline{a}_2 + \cdots + x^n\overline{a}_n.$$

Definiţia 1.4.1 *Scalarii* $x^1, x^2, \ldots, x^n$ *unic determinaţi de vectorul* $\overline{x}$ *se numesc* ***coordonatele*** *vectorului* $\overline{x}$ *în raport cu baza* $\mathcal{B}$.

Pentru simplitatea scrierii, în loc de $\overline{x} = x^1\overline{a}_1 + x^2\overline{a}_2 + \cdots + x^n\overline{a}_n$ vom scrie $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ sau $\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^t$ sau, mai ales în relaţiile matriceale $\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.

Când nu este pericol de confuzie vom scrie $\overline{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ sau $\widetilde{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^t$.

Exemplul 1.4.1 *1. În spaţiul vectorial aritmetic* $\mathbf{R}^3$*, relativ la baza canonică* $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0), \overline{e}_3 = (0,0,1)\}$*, orice vector* $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ *are drept coordonate chiar componentele sale* x^1*,* x^2*,* x^3*, deoarece* $\overline{x} = x^1\overline{e}_1 + x^2\overline{e}_2 + x^3\overline{e}_3$*. Atunci, vectorul* $\overline{y} = (1,-2,7)$ *, de exemplu, are coordonatele* 1*,* -2*,* 7 *relativ la baza canonică* $\mathcal{B}$*. Scriem* $\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2. Dacă $P = 1 - 3X + 2X^2 \in \mathbf{R}_2[X]$*, atunci* 1*,* -3*,* 2 *sunt coordonatele lui* P *relativ la baza* $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ *a lui* $\mathbf{R}_2[X]$*.*

3. Coordonatele polinomului $P = X - X^2 \in \mathbf{R}[X]$*, relativ la baza* $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$*, sunt* 0*,* 1 *,* -1*,* 0 *, ...,* 0 *... .*

Teorema 1.4.2 *Fie* V *un spaţiu vectorial de dimensiune* n*. Atunci, orice sistem de* $m < n$ *vectori din* V*, liniar independenţi, se poate completa până la o bază a lui* V*.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a lui V şi $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$ vectori liniar independenţi în V. Este clar că sistemul format cu vectorii $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ..., $\overline{b}_m$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ este un sistem de generatori pentru V, care este liniar dependent ($m + n > n = \dim V$). Atunci, cel puţin unul dintre ei se scrie ca o combinaţie liniară de restul vectorilor din sistem. Cum $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$ sunt liniar independenţi, avem că un astfel de vector nu se poate alege dintre $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$. Fie $\overline{a}_i$ **primul vector** dintre $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ..., $\overline{b}_m$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$, care se scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi. Atunci, avem că $V = L(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$ $= L(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{i-1}, \overline{a}_{i+1}, \ldots, \overline{a}_n)$ şi sunt posibile două situaţii:

1) $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{i-1}, \overline{a}_{i+1}, \ldots, \overline{a}_n$ sunt liniar independenţi şi atunci ei formează baza cautată, sau

2) $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{i-1}, \overline{a}_{i+1}, \ldots, \overline{a}_n$ sunt liniar dependenţi şi atunci se reia procedeul de mai sus eliminând pe rând câte unul dintre vectorii $\overline{a}_{i+1}, \ldots, \overline{a}_n$ până când se obţine un sistem de generatori ai lui V care conţine vectorii $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$ şi este şi sistem liniar independent (este limpede că trebuie eliminaţi m vectori dintre $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$). Aceasta este baza cautată, obţinută prin completarea sistemului liniar independent $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$. ■

Propoziţia 1.4.1 *Fie* V *un spaţiu vectorial peste* K*, de dimensiune finită* n *şi* $\mathcal{S} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\} \subset V$*. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\mathcal{S}$ *este o bază a lui* V*;*

b) $\mathcal{S}$ *este un sistem de generatori pentru* V*;*

c) $\mathcal{S}$ *este un sistem liniar independent.*

Teorema 1.4.3 *Condiţia necesară şi suficientă ca* m *vectori ai unui spaţiu vectorial* V *de dimensiune* n *(*$m \leq n$*) să fie liniar independenţi este ca rangul matricei formate (pe coloane) cu coordonatele acestor vectori într-o bază oarecare a spaţiului să fie egal cu* m*.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a lui V, iar $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$ vectori ai lui V $(m \leq n)$ astfel încât $\overline{b}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_j^i \overline{a}_i$ oricare ar fi $j = 1, \ldots, m$. Dacă $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda^j \overline{b}_j = \overline{0}$, cu λ^1, ..., $\lambda^m \in K$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda^j \alpha_j^i \right) \overline{a}_i = \overline{0}$ şi cum $\mathcal{B}$ este un sistem liniar independent rezultă că $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j^i \lambda^j = 0$, oricare ar fi $i = 1, \ldots, n$. Obţinem astfel un sistem omogen de n ecuaţii liniare cu m necunoscute λ^1, ..., λ^m care are numai soluţia banală $(\lambda^1, \ldots, \lambda^m) = (0, \ldots, 0)$ dacă şi numai dacă rangul matricei sale $\left(\alpha_j^i\right)_{i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$ este egal cu m. ■

În continuare, considerăm două baze $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$ ale unui spaţiu vectorial V peste K, iar oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, avem $\overline{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i^j \overline{a}_j$ şi oricare ar fi $k = \overline{1,n}$, avem $\overline{a}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_k^i \overline{b}_i$. Atunci $\overline{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_i^j \beta_j^k \overline{b}_k$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$. Prin urmare, $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = k \\ 0, & \text{dacă } i \neq k \end{cases}$ sau $BA = I_n$, unde $A = \left(\alpha_j^i\right)_{i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ este matricea pe ale cărei coloane avem coordonatele vectorilor bazei $\mathcal{B}'$ în raport cu baza $\mathcal{B}$, iar $B = \left(\beta_j^i\right)_{i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ este matricea pe ale cărei coloane avem coordonatele vectorilor bazei $\mathcal{B}$ în raport cu baza $\mathcal{B}'$. .

Definiţia 1.4.2 *Matricea A, formată ca mai sus, se numeşte* ***matricea de trecere*** *de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.*

Propoziţia 1.4.2 *Cu notaţiile de mai sus avem $B = A^{-1}$. Mai mult, pentru orice $\overline{x} \in V$ avem $\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = A\widetilde{x}_{\mathcal{B}'}$ sau*

$$\widetilde{x}_{\mathcal{B}'} = A^{-1}\widetilde{x}_{\mathcal{B}}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Din $BA = I_n$ este clar că $B = A^{-1}$. Dacă $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i$ şi $\overline{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} y^j \overline{b}_j$ atunci, din $\overline{a}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_i^j \overline{b}_j$ şi din unicitatea scrierii lui $\overline{x}$, avem că $y^j = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^j x^i$, pentru toţi $i = \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că $(y^1, \ldots, y^n)^t = B(x^1, \ldots, x^n)^t$ sau $\widetilde{x}_{\mathcal{B}'} = A^{-1}\widetilde{x}_{\mathcal{B}}$. ■

Relaţia (1) se numeşte *formula de schimbare a coordonatelor unui vector* când se trece de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

Exemplul 1.4.2 *În spaţiul vectorial aritmetic* $\mathbf{R}^3$ *se consideră baza canonică $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ şi baza $\mathcal{B}' = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$, unde $\overline{a}_1 = (2, -1, 1)$, $\overline{a}_2 = (3, 1, -1)$, $\overline{a}_3 = (1, 1, 1)$. Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este*

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, *iar matricea de trecere de la baza* $\mathcal{B}'$ *la baza* $\mathcal{B}$ *este* A^{-1}. *Dacă* $\overline{x} = (1, 2, 7)$, *atunci* $\widetilde{x}_{\mathcal{B}'} = A^{-1}\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Fie V un spaţiu vectorial real n-dimensional şi $\mathcal{H} = \{\mathcal{B} \subset V | \mathcal{B}$ bază a lui $V\}$.

Definiţia 1.4.3 *Spunem că bazele* $\mathcal{B}_1$*,* $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{H}$ *sunt* ***la fel orientate*** *(sau* ***au aceeaşi orientare*** *şi scriem* $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$*) dacă determinantul matricii de trecere de la baza* $\mathcal{B}_1$ *la baza* $\mathcal{B}_2$ *este pozitiv.*

Propoziţia 1.4.3 *Relaţia binară* $\sim$ *este o relaţie de echivalenţă pe* $\mathcal{H}$*.*

Demonstraţie. a) Cum determinatul lui I_n este pozitiv avem că $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$, oricare ar fi $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$, adică $\sim$ este reflexivă.

b) Dacă $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ şi matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_2$ este A, atunci $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1$ deoarece determinantul matricii de trecere A^{-1}, de la baza $\mathcal{B}_2$ la baza $\mathcal{B}_1$, este tot pozitiv ($\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$). Astfel, relaţia $\sim$ este simetrică.

c) Fie $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3 \in \mathcal{H}$ astfel că $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ şi $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_3$, iar A este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_2$ şi B este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_2$ la baza $\mathcal{B}_3$. Atunci $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_3$, deoarece matrice de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_3$ este chiar AB , iar $\det(AB) = \det A \cdot \det B > 0$. Rezultă că $\sim$ este o relaţie tranzitivă.

Deci $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{H}$. ■

Propoziţia 1.4.4 *Mulţimea factor* $\mathcal{H}_{/\sim}$ *are două elemente.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{H}$ astfel ca $\mathcal{B}_1 \nsim \mathcal{B}_2$. Fie $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$ astfel încât $\mathcal{B} \nsim \mathcal{B}_1$. Dacă A este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}_1$ şi B este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_2$, atunci matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}_2$ este AB. Cum $\det A < 0$ si $\det B < 0$, avem că $\det AB > 0$ şi astfel $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}_2$. ■

Cele două clase de echivalenţă care formează mulţimea factor $\mathcal{H}_{/\sim}$ se numesc **orientări** ale spaţiului vectorial V.

Definiţia 1.4.4 *Spunem că spaţiul vectorial real* V *este* ***orientat*** *dacă am fixat o orientare pe* V*, adică o clasă de echivalenţă de baze la fel orientate pe care le vom numi baze pozitiv orientate. Bazele din cealaltă clasă de echivalenţă se vor numi baze negativ orientate (în raport cu orientarea fixată).*

1.5 Subspaţii vectoriale

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi V_1 o submulţime nevidă a lui V.

Definiţia 1.5.1 *V_1 se numeşte* ***subspaţiu vectorial*** *al lui V dacă, împreună cu operaţiile spaţiului vectorial V, are o structură de spaţiu vectorial peste K.*

Propoziţia 1.5.1 *V_1 este subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in V_1$, pentru orice α, $\beta \in K$ şi orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in V_1$.*

Demonstraţie. Dacă V_1 este subspaţiu vectorial al lui V, atunci din buna definire a operaţiilor de spaţiu vectorial pe V_1 rezultă că $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in V_1$, $\forall\alpha$, $\beta \in K$, $\overline{x}$, $\overline{y} \in V_1$.

Reciproc, dacă avem că $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in V_1$, $\forall\alpha$, $\beta \in K$, $\overline{x}$, $\overline{y} \in V_1$, atunci pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = -1$ obţinem că $\overline{x} - \overline{y} \in V_1$, $\forall\overline{x}$, $\overline{y} \in V_1$, adică $(V_1, +)$ este un subgrup al lui $(V, +)$ şi prin urmare este grup. Apoi axiomele i)-iv) din II) din definiţia spaţiului vectorial sunt verificate în mod evident şi pentru vectorii din V_1. În concluzie, V_1 este spaţiu vectorial peste K, în raport cu operaţiile spaţiului vectorial V. ■

Exerciţiul 1.5.1 *1. Arătaţi că pentru orice sistem de vectori $\mathcal{S}$ din V avem că $L(\mathcal{S})$ este subspaţiu vectorial al lui V.*

2. Dacă $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m \in V$, atunci arătaţi că $\dim L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m) \leq m$.

Pentru orice sistem $\mathcal{S} \subset V$, $L(\mathcal{S})$ se mai numeşte *subspaţiul generat* de sistemul de vectori $\mathcal{S}$. În particular, $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m)$ se numeşte *subspaţiul generat* de vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$.

Exemplul 1.5.1 *1. Spaţiul nul $\{\overline{0}\}$ şi spaţiul vectorial V sunt subspaţii vectoriale ale lui V, numite* ***subspaţii improprii*** *ale lui V.*

2. Mulţimea $V_1 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 = 0\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$.

3. Mulţimea $V_2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^2 = 0, x^3 = 0\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^3$.

4. În spaţiul vectorial $M_n(K)$ mulţimea matricilor diagonale este un subspaţiu vectorial.

5. Mulţimea matricilor pătratice de ordin n care sunt simetrice şi mulţimea matricilor antisimetrice sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului $M_n(\mathbf{R})$.

6. $\mathbf{R}_n[X] = \{P \in \mathbf{R}[X] | \operatorname{grad} P \leq n\}$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial real $\mathbf{R}[X]$.

Propoziţia 1.5.2 *Fie V_1 un subspaţiu vectorial al lui V, de dimensiune finită n. Atunci, $\dim V_1 \leq \dim V$.*

Demonstraţie. Fie $m = \dim V_1$. Presupunem prin absurd că $m > n$. Din definiţia dimensiunii lui V_1 rezultă că există în V_1 o bază formată din m vectori. Dar $V_1 \subset V$, ceea ce înseamnă că în V există m vectori liniar independenţi, iar $m > \dim V = n$. Contradicţie cu definiţia dimensiunii lui V. Atunci, presupunerea făcută este falsă şi deci, $m \leq n$. $\blacksquare$

Fie V_1, V_2 subspaţii vectoriale ale lui V. Definim următoarele submulţimi ale lui V:
$V_1 + V_2 = \{\overline{x} \in V | \exists \overline{x}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2 \in V_2$ astfel ca $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2\} =$
$= \{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 | \overline{x}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2 \in V_2\}$, $V_1 \cap V_2 = \{\overline{x} \in V | \overline{x} \in V_1$ şi $\overline{x} \in V_2\}$.

Propoziţia 1.5.3 *$V_1 + V_2$ şi $V_1 \cap V_2$ sunt subspaţii vectoriale ale lui V.*

Demonstraţie. Fie $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$ şi $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$ din $V_1 + V_2$, iar α, $\beta \in K$. Atunci $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = \alpha(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) + \beta(\overline{y}_1 + \overline{y}_2) = (\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{y}_1) + (\alpha\overline{x}_2 + \beta\overline{y}_2) \in V_1 + V_2$, adică $V_1 + V_2$ este subspaţiu al lui V.

Cu uşurinţă se poate proba că $V_1 \cap V_2$ este subspaţiu vectorial al lui V. $\blacksquare$

$V_1 + V_2$ se numeşte *suma* subspaţiilor V_1 şi V_2, iar $V_1 \cap V_2$ se numeşte *intersecţia* subspaţiilor V_1 şi V_2.

Exemplul 1.5.2 *1. Dacă în spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ considerăm subspaţiile vectoriale $V_1 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^2 = 0, x^3 = 0\}$, atunci suma lor este $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$, iar intersecţia lor este $V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$.*

2. Fie $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbf{R} \right\}$ şi $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | b \in \mathbf{R} \right\}$ submulţimi în $M_2(\mathbf{R})$. Este clar că V_1 şi V_2 sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $M_2(\mathbf{R})$ şi suma lor este $V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbf{R} \right\}$, iar intersecţia $V_1 \cap V_2$ este subspaţiul nul al lui $M_2(\mathbf{R})$.

Exerciţiul 1.5.2 *1. Arătaţi că, în general, reuniunea a două subspaţii, $V_1 \cup V_2$, nu este un subspaţiu vectorial al lui V. Mai mult, arătaţi că $V_1 \cup V_2$ este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă $V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.*

2. Arătaţi că $V_1 + V_2 = L(V_1 \cup V_2)$, oricare ar fi subspaţiile V_1, V_2.

Definiţia 1.5.2 *Spunem că suma $V_1 + V_2$ este **sumă directă** dacă orice vector $\overline{x} \in V_1 + V_2$ se scrie în mod unic sub forma $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$, cu $\overline{x}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2 \in V_2$. Vom scrie $V_1 \oplus V_2$ în loc de $V_1 + V_2$.*

Propoziţia 1.5.4 *Fie V_1, V_2 două subspaţii vectoriale ale lui V. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) $V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$;
b) suma subspaţiilor V_1, V_2 este sumă directă.

Demonstraţie. a)$\Rightarrow$b) Fie $\overline{x} \in V_1 + V_2$ astfel încât $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$ şi $\overline{x} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$, cu $\overline{x}_1, \overline{y}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2, \overline{y}_2 \in V_2$. Atunci, $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$, adică $\overline{x}_1 - \overline{y}_1 = \overline{y}_2 - \overline{x}_2$. Cum $\overline{x}_1 - \overline{y}_1 \in V_1$, $\overline{y}_2 - \overline{x}_2 \in V_2$, rezultă că $\overline{x}_1 - \overline{y}_1, \overline{y}_2 - \overline{x}_2 \in V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$. Prin urmare $\overline{x}_1 = \overline{y}_1$şi $\overline{x}_2 = \overline{y}_2$, adică scrierea este unică şi astfel $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

b)$\Rightarrow$a) Fie $\overline{x} \in V_1 \cap V_2$. Atunci $\overline{x} = \overline{x} + \overline{0} \in V_1 \oplus V_2$ şi $\overline{x} = \overline{0} + \overline{x} \in V_1 \oplus V_2$. Din unicitatea scrierii lui $\overline{x}$, rezultă că $\overline{x} = \overline{0}$. Prin urmare $V_1 \cap V_2 \subset \{\overline{0}\}$. Cum incluziunea $\{\overline{0}\} \subset V_1 \cap V_2$ este evidentă, rezultă că $V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$. ∎

Definiţia 1.5.3 *Subspaţiile vectoriale V_1, V_2 se numesc **suplimentare** (sau **complementare**) dacă $V = V_1 \oplus V_2$.*

*În acest caz, V_1 se numeşte **suplimentul** lui V_2 în V, iar V_2 se numeşte **suplimentul** lui V_1 în V.*

Exemplul 1.5.3 *În spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ subspaţiile $V_1 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^2 = 0, x^3 = 0\}$ sunt suplimentare.*

Teorema 1.5.1 *Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finită n şi V_1, V_2 două subspaţii vectoriale ale lui V. Atunci, $V = V_1 \oplus V_2$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

i) $V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$;

ii) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Demonstraţie. Dacă $V_1 \oplus V_2 = V$, atunci $V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$, conform propoziţiei anterioare. Rămâne de arătat că are loc a doua condiţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p\}$ o bază a lui V_1 şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_q\}$ o bază a lui V_2. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_q\} \subset V$. Vom arăta că $\mathcal{B}$ este o bază pentru V şi astfel $\dim V = p + q = \dim V_1 + \dim V_2$.

Fie $\alpha^1 \overline{a}_1 + \cdots + \alpha^p \overline{a}_p + \beta^1 \overline{b}_1 + \cdots + \beta^q \overline{b}_q = \overline{0}$. Ţinând cont de unicitatea scrierii vectorului nul din V, $\overline{0} = \overline{0} + \overline{0} \in V_1 \oplus V_2 = V$ rezultă că $\alpha^1 \overline{a}_1 + \cdots + \alpha^p \overline{a}_p = \overline{0}$ şi $\beta^1 \overline{b}_1 + \cdots + \beta^q \overline{b}_q = \overline{0}$.Cum $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ sunt, în particular, sisteme liniar independente, avem că $\alpha^1 = \cdots = \alpha^p = 0$ şi $\beta^1 = \cdots = \beta^q = 0$. Astfel, $\mathcal{B}$ este sistem liniar independent.

Fie $\overline{x} \in V$. Atunci există $\overline{x}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2 \in V_2$ astfel ca $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$. Dar $\overline{x}_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i$ şi $\overline{x}_2 = \sum\limits_{j=1}^{q} \beta^j \overline{b}_j$. Rezultă că $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i + \sum\limits_{j=1}^{q} \beta^j \overline{b}_j$, adică $\mathcal{B}$ este sistem de generatori pentru V. În concluzie, $\mathcal{B}$ este bază pentru V.

Reciproc, dacă presupunem îndeplinite condiţiile i) şi ii), atunci pentru a arăta că $V = V_1 \oplus V_2$ este suficient să arătăm că $V = V_1 + V_2$, deoarece condiţia i) ne asigură că suma subspaţiilor V_1 şi V_2 este sumă directă.

Dacă $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p\}$ o bază a lui V_1 şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_q\}$ o bază a lui V_2, atunci $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_q\}$ este un sistem liniar independent în V, pentru că din $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i + \sum\limits_{j=1}^{q} \beta^j \overline{b}_j = \overline{0}$ sau $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i = -\sum\limits_{j=1}^{q} \beta^j \overline{b}_j$, avem că atât

$\sum_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i$ cât şi $\sum_{j=1}^{q} \beta^j \overline{b}_j$ fac parte din $V_1 \cap V_2 = \{\overline{0}\}$, adică $\sum_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i = \overline{0}$ şi $\sum_{j=1}^{q} \beta^j \overline{b}_j = \overline{0}$ ceea ce implică $\alpha^1 = \cdots = \alpha^p = 0$ şi $\beta^1 = \cdots = \beta^q = 0$.

Din faptul că $\dim V = p + q$ şi $\mathcal{B}$ este un sistem liniar independent format din $p+q$ vectori, rezultă că $\mathcal{B}$ este o bază pentru V. Prin urmare, pentru orice $\overline{x} \in V$ există $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$, $\beta^1, \ldots, \beta^q \in K$ astfel încât $\overline{x} = \alpha^i \overline{a}_i + \beta^j \overline{b}_j$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, adică pentru orice $\overline{x} \in V$ există $\overline{x}_1 = \alpha^i \overline{a}_i \in V_1$ şi $\overline{x}_2 = \beta^j \overline{b}_j \in V_2$ astfel ca $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$. Deci, $V = V_1 + V_2$. ■

Fie V_1, V_2 două subspaţii vectoriale ale lui V astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$. Fie $\overline{x} \in V$. Atunci, există şi sunt unici vectorii $\overline{x}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2 \in V_2$ astfel ca $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$. Vectorul $\overline{x}_1$ din această scriere se numeşte *proiecţia lui $\overline{x}$ pe V_1 de-a lungul lui V_2*, iar vectorul $\overline{x}_2$ se numeşte *proiecţia lui $\overline{x}$ pe V_2 de-a lungul lui V_1*.

Exemplul 1.5.4 *Dacă $\overline{x} = (3, -1, 2) \in \mathbf{R}^3$ şi considerăm subspaţiile suplimentare $V_1 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^2 = 0, x^3 = 0\}$, atunci proiecţia lui $\overline{x}$ pe V_1 de-a lungul lui V_2 este $\overline{x}_1 = (0, -1, 2)$, iar $\overline{x}_2 = (3, 0, 0)$ este proiecţia lui $\overline{x}$ pe V_2 de-a lungul lui V_1.*

Acum prezentăm (doar ca enunţ) un rezultat foarte util în aplicaţii:

Teorema 1.5.2 *(**Formula lui Grassman**) Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finită şi V_1, V_2 două subspaţii vectoriale ale sale. Atunci*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Exerciţiul 1.5.3 *Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finită n şi V_1, V_2 două subspaţii vectoriale ale sale de dimensiuni p, respectiv q. Arătaţi că dacă $p + q > n$, atunci V_1 şi V_2 au în comun cel puţin un vector nenul.*

Observaţia 1.5.1 *Mulţimea H a tuturor soluţiilor unui sistem de m ecuaţii liniare **omogene** cu n necunoscute, cu coeficienţi din K, formează un subspaţiu vectorial al spaţiului aritmetic K^n. Mai mult,* $\dim H = n - rangA$, *unde A este matricea sistemului omogen. Demonstrarea acestor afirmaţii nu este complicată. Totuşi, este mult mai clar şi mai util să o ilustrăm pe exemple concrete.*

Exemplul 1.5.5 *În spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^4$ se dă mulţimea*

$$V_1 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{R}^4 \left| \begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = 0, \\ -x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \right. \right\}$$

a) Arătaţi că V_1 este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^4$;
b) Determinaţi o bază pentru V_1 şi $\dim V_1$*;*
c) Arătaţi că sistemul

$\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1 = (1,0,1,0), \bar{a}_2 = (1,1,0,0), \bar{a}_3 = (0,1,1,0), \bar{a}_4 = (0,0,1,1)\}$
este o bază pentru $\mathbf{R}^4$ *şi găsiţi coordonatele vectorului* $\bar{x} = (1,1,-1,1)$ *relativ la noua bază* $\mathcal{B}'$*;*
d) Găsiţi un supliment V_2 *pentru subspaţiul* V_1 *în* $\mathbf{R}^4$*.*

Rezolvare:
a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *şi* $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ *,* $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4) \in V_1$ *, arbitrar fixate. Atunci:*
$(\alpha x^1 + \beta y^1) + (\alpha x^2 + \beta y^2) - (\alpha x^3 + \beta y^3) + (\alpha x^4 + \beta y^4) = \alpha(x^1 + x^2 - x^3 + x^4) + \beta(y^1 + y^2 - y^3 + y^4) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ *şi analog* $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha x^1 + \beta y^1, \alpha x^2 + \beta y^2, \alpha x^3 + \beta y^3, \alpha x^4 + \beta y^4)$ *verifică şi a doua ecuaţie din sistemul omogen. Prin urmare* $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in V_1$ *şi astfel* V_1 *este subspaţiu vectorial al lui* $\mathbf{R}^4$ *.*
b) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi are rangul } 2.$$

Atunci, $\dim V_1 = 4 - rang A = 2$ *. O bază a lui* V_1 *este formată cu două soluţii particulare ale sistemului omogen, care să fie liniar independente.*
Notând $x^3 = \alpha$ *şi* $x^4 = \beta$ *obţinem,*

$$\begin{cases} x^1 + x^2 & = & \alpha - \beta \\ -x^1 + x^2 & = & \alpha - \beta \end{cases}$$

şi de aici soluţia generală $\bar{x} = (0, \alpha - \beta, \alpha, \beta)$ *,* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *sau* $\bar{x} = \alpha(0,1,1,0) + \beta(0,-1,0,1)$ *.*
Dacă notăm $\bar{b}_1 = (0,1,1,0)$ *şi* $\bar{b}_2 = (0,-1,0,1)$*, rezultă că* $V_1 = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ *.*
Deoarece $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ *este sistem liniar independent (vezi rang* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$*)*
rezultă că $\mathcal{B}_1 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ *este bază pentru* V_1 *.*
c) Rangul matricei A_1*, pe ale cărei coloane avem coordonatele vectorilor din* $\mathcal{B}'$*, în raport cu baza canonică* $\mathcal{B} = \{\bar{e}_i | i = \overline{1,4}\}$ *a lui* $\mathbf{R}^4$ *,*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este 4 *. Prin urmare* $\mathcal{B}'$ *este sistem liniar independent în spaţiul* 4*-dimensional* $\mathbf{R}^4$*şi astfel este bază pentru* $\mathbf{R}^4$ *.*
Coloana cu coordonatele lui $\bar{x} = (1, 1-1, 1)$ *relativ la baza* $\mathcal{B}'$*se găseşte din relaţia* $\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = A_1^{-1}\tilde{x}_{\mathcal{B}}$ *,* A_1 *fiind matricea de trecere de la baza* $\mathcal{B}$ *la baza* $\mathcal{B}'$*. Inversa matricei* A_1 *este*

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi astfel $\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = A_1^{-1}(1,1,-1,1)^t = (-1,2,-1,1)^t$ *sau* $\bar{x} = -\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \bar{a}_4$.
d) Completăm baza lui V_1 , $\mathcal{B}_1 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ *, până la o bază a lui* $\mathbf{R}^4$ *cu vectorii* $\bar{b}_3 = (1,1,1,0), \bar{b}_4 = (0,0,0,1)$ *. Într-adevăr, rangul matricei*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este 4 *şi astfel* $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4\}$ *este bază.*
Considerăm subspaţiul vectorial generat de $\bar{b}_3$ *şi* $\bar{b}_4$, $V_2 = L(\bar{b}_3, \bar{b}_4)$ *. Atunci,* $\dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbf{R}^4$.
Cum $\mathbf{R}^4 = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4)$ *rezultă că pentru orice vector* $\bar{x}$ *din* $\mathbf{R}^4$ *, există scalarii reali* α^i, $(i = \overline{1,4})$ *, astfel încât* $\bar{x} = \alpha^1\bar{b}_1 + \alpha^2\bar{b}_2 + \alpha^3\bar{b}_3 + \alpha^4\bar{b}_4$ *şi prin urmare orice vector* $\bar{x}$ *se poate scrie* $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ *cu* $\bar{x}_1 = \alpha^1\bar{b}_1 + \alpha^2\bar{b}_2 \in V_1$ *şi* $\bar{x}_2 = \alpha^3\bar{b}_3 + \alpha^4\bar{b}_4 \in V_2$ *. Deci,* $\mathbf{R}^4 = V_1 + V_2$ *. Din această relaţie şi din faptul că* $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim \mathbf{R}^4$ *rezultă că* $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$ *. Prin urmare,* V_2 *este un supliment al lui* V_1 *în* $\mathbf{R}^4$.

Exemplul 1.5.6 *În spaţiul aritmetic* $\mathbf{R}^4$ *se dau subspaţiile vectoriale*

$$V_1 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \middle| \left\{ \begin{array}{l} 2x^1 + x^2 + 3x^3 - x^4 = 0 \\ 3x^1 + 2x^2 \quad\; - 2x^4 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 9x^3 - x^4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \middle| \left\{ \begin{array}{l} 6x^1 - 9x^2 - x^3 \quad = 0 \\ \qquad x^2 \quad + \; x^4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

a) Arătaţi că $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$*;*
b) Determinaţi proiecţia vectorului $\bar{x} = (1,-1,1,0)$ *pe subspaţiul* V_1 *de-a lungul subspaţiului* V_2 .

Rezolvare:

a) Matricea primului sistem liniar omogen,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2 *şi soluţia sa este de forma* $\bar{x} = (3\alpha, -9\alpha + \beta, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ *sau* $\bar{x} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$ *, unde* $\bar{a}_1 = (3,-9,1,0)$ *şi* $\bar{a}_2 = (0,1,0,1)$ *sunt două soluţii liniar independente. Deci* $V_1 = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ *şi* $\dim V_1 = 2$ *cu* $\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ *bază.*
Matricea celui de-al doilea sistem liniar omogen,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2 *şi soluţia sa este de forma* $\bar{x} = (\frac{1}{6}\alpha - \frac{3}{2}, -\beta, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ *sau* $\bar{x} = \frac{1}{6}\alpha\bar{a}_3 + \frac{1}{2}\beta\bar{a}_4$ *, unde* $\bar{a}_3 = (1,0,6,0)$ *şi* $\bar{a}_4 = (-3,-2,0,2)$ *sunt două soluţii*

liniar independente. Deci, $V_2 = L(\bar{a}_3, \bar{a}_4)$ *şi* $\dim V_2 = 2$ *cu* $\mathcal{B}_2 = \{\bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ *bază.*
Deoarece rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -9 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

este 4*, rezultă că* $\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ *este o bază a lui* $\mathbf{R}^4$ *. Astfel,* $\mathbf{R}^4 = V_1 + V_2$ *. Se mai poate arăta că* $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$ *. Într-adevăr, dacă* $\bar{x} = \alpha^1\bar{a}_1 + \alpha^2\bar{a}_2 = \alpha^3\bar{a}_3 + \alpha^4\bar{a}_4 \in V_1 \cap V_2$ *, atunci avem* $\alpha^1\bar{a}_1 + \alpha^2\bar{a}_2 - \alpha^3\bar{a}_3 - \alpha^4\bar{a}_4 = \bar{0}$ *şi de aici obţinem* $\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = \alpha^4 = 0$ *sau* $\bar{x} = \bar{0}$ *.*
Deci $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^4$*.*
b) Conform punctului a), avem scrierea unică: $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ *cu* $\bar{x}_1 \in V_1$ *şi* $\bar{x}_2 \in V_2$ *.*
Proiecţia lui $\bar{x} = (1, -1, 1, 0)$ *pe* V_1 *de-a lungul lui* V_2 *este* $\bar{x}_1 = \alpha^1\bar{a}_1 + \alpha^2\bar{a}_2$*. Pentru a găsi pe* $\bar{x}_1$*, luăm* $\bar{x}_2 = \alpha^3\bar{a}_3 + \alpha^4\bar{a}_4$ *şi determinăm scalarii* α^i, $i = \overline{1,4}$ *din relaţia*
$(1, -1, 1, 0) = \alpha^1(3, -9, 1, 0) + \alpha^2(0, 1, 0, 1) + \alpha^3(1, 0, 6, 0) + \alpha^4(-3, -2, 0, 2)$
sau $(1, -1, 1, 0) = \big(3\alpha^1 + \alpha^3 - 3\alpha^4, -9\alpha^1 + \alpha^2 - 2\alpha^4, \alpha^1 + 6\alpha^3, \alpha^2 + 2\alpha^4\big)$.

Rezolvăm sistemul liniar

$$\begin{cases} 3\alpha^1 + \alpha^3 - 3\alpha^4 &= 1 \\ -9\alpha^1 + \alpha^2 - 2\alpha^4 &= -1 \\ \alpha^1 + 6\alpha^3 &= 1 \\ \alpha^2 + 2\alpha^4 &= 0 \end{cases}$$

şi obţinem $\alpha^1 = \frac{19}{115}$, $\alpha^2 = \frac{28}{115}$, $\alpha^3 = \frac{16}{115}$, $\alpha^4 = -\frac{14}{115}$ *, de unde* $\bar{x}_1 = \frac{19}{115}\bar{a}_1 + \frac{28}{115}\bar{a}_2 = \frac{1}{115}(57, -143, 19, 28)$ *.*

1.6 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie mulţimea $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5} | a, b, c, d \in \mathbf{Q}\}$. Arătaţi că pe V se poate introduce o structură de spaţiu vectorial peste corpul numerelor raţionale $\mathbf{Q}$, în raport cu adunarea numerelor reale şi în raport cu înmulţirea cu numere raţionale a numerelor reale. Cât este $\dim_{\mathbf{Q}} V$? Dar $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$?

2. Fie $V = (0, \infty)$. Dacă definim legea de compoziţie internă "$\otimes$" pe V, $x \oplus y \overset{def}{=} xy$ şi legea de compoziţie externă "$\odot$" pe V, cu scalari din $\mathbf{R}$ (sau $\mathbf{Q}$), $\alpha \odot x \overset{def}{=} x^\alpha$, atunci arătaţi că $(V, \oplus, \odot)$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$ (sau $\mathbf{Q}$). Cât este $\dim_{\mathbf{Q}} V$? Dar $\dim_{\mathbf{R}} V$?

3. Stabiliţi care dintre următoarele sisteme de vectori din spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ sunt liniar independente:

   a) $\{\overline{a}_1 = (1, 2, 3), \overline{a}_2 = (2, 3, 1), \overline{a}_3 = (3, 1, 2)\}$;

   b) $\{\overline{b}_1 = (1, 3, -1), \overline{b}_2 = (0, -2, 1), \overline{b}_3 = (-3, -1, -1)\}$.

4. Fie $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\} \subset \mathbf{R}^3$, $\overline{v}_1 = (1, \alpha, 0)$, $\overline{v}_2 = (\alpha, 1, 1)$, $\overline{v}_3 = (1, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

   a) Să se afle $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ să formeze o bază în $\mathbf{R}^3$;

   b) Pentru $\alpha = \sqrt{2}$ să se extragă din S o bază S' a subspaţiului vectorial $L(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$.

5. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca vectorii $\overline{a} = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 4\overline{e}_3$, $\overline{b} = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{c} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \lambda\overline{e}_3$
   să fie liniar dependenţi în spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$, unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ este bază canonică a lui $\mathbf{R}^3$.

6. În spaţiul vectorial real aritmetic $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii $\overline{a} = (-4, 9, 7)$, $\overline{b} = (1, \alpha, 5)$, $\overline{c} = (2, -1, \beta)$.

   a) Pentru ce perechi de numere reale (α, β) sistemul $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ formează o bază a lui $\mathbf{R}^3$?

   b) Pentru ce perechi de numere reale (α, β) subspaţiul generat de $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ are dimensiunea 2?

7. Să se arate că sistemele de vectori $S_1 = \{(1, 1, 0), (1, -1, -1)\}$ şi respectiv $S_2 = \{(9, -1, -5), (7, -1, -4)\}$ din $\mathbf{R}^3$, generează acelaşi subspaţiu vectorial.

8. În spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii $\overline{v}_1 = (3, 1, 0)$, $\overline{v}_2 = (6, 3, 2)$, $\overline{v}_3 = (1, 3, 5)$. Se cere:

   a) Să se arate că $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ formează o bază în spaţiul $\mathbf{R}^3$;

   b) Să se găsească coordonatele vectorilor bazei canonice $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ în noua bază $\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$.

9. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ trei vectori liniari independenţi. Studiaţi liniar independenţa vectorilor $\overline{u} + \overline{v}$, $\overline{v} + \overline{w}$, $\overline{w} + \overline{u}$ în cazul în care corpul K este a) $\mathbf{R}$; b) $\mathbf{C}$; c) $\{0, 1\}$.

10. Fie $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A = A^t\}$ mulţimea matricilor simetrice de ordinul n şi $\mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A = -A^t\}$ mulţimea matricilor antisimetrice de ordinul n.

    a) Arătaţi că $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R})$, $\mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R})$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

    b) Arătaţi că dim $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

    c) Este adevărat că $\mathcal{M}_{s;n}(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{M}_{as;n}(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

    d) Determinaţi proiecţia matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ pe $\mathcal{M}_{s;2}(\mathbf{R})$ de-a lungul lui $\mathcal{M}_{as;2}(\mathbf{R})$.

11. Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune $n \geq 3$ şi $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ o bază pentru V. Se consideră vectorii

$$\overline{v}_1 = \overline{u}_1, \overline{v}_2 = \overline{u}_2, \overline{v}_k = \overline{u}_k + \lambda_k \overline{u}_1 + \mu_k \overline{u}_2, \text{ pentru } k = 3, ..., n,$$

unde coeficienţii reali λ_k, μ_k $(k = 3, ..., n)$ sunt fixaţi arbitrar, în prealabil. Arătaţi că sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ formează o bază pentru V. Scrieţi matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

12. Fie a, b, a', b' numere reale astfel încât rangul matricii $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ este 2. Dacă se consideră subspaţiile vectoriale ale lui $\mathbf{R}^2$, $V_1 = \{(x^1, x^2) | ax^1 + bx^2 = 0\}$ şi $V_2 = \{(x^1, x^2) | a'x^1 + b'x^2 = 0\}$ să se arate că $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^2$. Ce se poate spune despre submulţimile lui $\mathbf{R}^2$, $W_1 = \{(x^1, x^2) | ax^1 + bx^2 = 1\}$, $W_2 = \{(x^1, x^2) | a'x^1 + b'x^2 = 1\}$?

13. Fie sistemul omogen de ecuaţii liniare
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x^1 & + & x^2 & - & x^3 & & & = & 0 \\ x^1 & - & x^2 & + & x^3 & + & 2x^4 & = & 0 \\ x^1 & & & & & + & x^4 & = & 0 \end{array} \right. . \tag{*}$$
Dacă V este mulţimea soluţiilor (x^1, x^2, x^3, x^4) pentru sistemul (*), atunci:

a) Arătaţi că V este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbf{R}^4$.

b) Determinaţi o bază a lui V şi $\dim V$.

c) Găsiţi un supliment W pentru V în $\mathbf{R}^4$.

d) Determinaţi proiecţia vectorului $\overline{x} = (1, 2, 2, 3)$ pe V de-a lungul lui W, găsit la c).

14. Ce condiţii trebuie să satisfacă numerele reale a, b, c pentru ca vectorii $\overline{x} = (1, a, a^2)$, $\overline{y} = (1, b, b^2)$, $\overline{z} = (1, c, c^2)$ să formeze o bază pentru $\mathbf{R}^3$?

Dacă $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ să se scrie vectorul $\overline{u} = (1, 7, 2)$ ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$.

15. Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$. Să se arate că M este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R})$. Găsiţi o bază pentru M şi $\dim M$, precum şi coordonatele matricei
$U = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ relativ la baza găsită.

16. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi $\mathbf{R}_n[X]$ spaţiul vectorial real $(n+1)$-dimensional al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali, în nedeterminata X.

a) Arătaţi că $\mathcal{B} = \{1, (1+X), (2+X)^2, ..., (n+X)^n\}$ este o bază pentru $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Pentru $n = 3$, determinaţi matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}_c = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$ la baza $\mathcal{B}$.

c) Pentru $n = 3$, determinaţi coordonatele polinomului $Q = X^3 + 1$ relativ la baza $\mathcal{B}$.

Capitolul 2

Aplicaţii liniare

2.1 Noţiunea de aplicaţie liniară. Operaţii cu aplicaţii liniare

Fie V, W două spaţii vectoriale peste K.

Definiţia 2.1.1 *Funcţia $f : V \to W$ se numeşte **aplicaţie liniară** (sau **morfism de spaţii vectoriale** sau **operator liniar**) dacă*
*a) f este **aditivă**, adică $f(\overline{x}+\overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V$;*
*b) f este **omogenă**, adică $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$, $\forall \alpha \in K, \forall \overline{x} \in V$.*

*Dacă $V = W$, atunci spunem că f este un **endomorfism** al spaţiului vectorial V (sau **operator liniar** al lui V).*

Propoziţia 2.1.1 *Funcţia $f : V \to W$ este aplicaţie liniară dacă şi numai dacă*
*c) $f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) = \alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})$, $\forall \alpha, \beta \in V$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V$ (adică, f este **liniară**)*
Demonstraţie. *Evident, din a) şi b) rezultă c). Reciproc, din c) rezultă a) pentru $\alpha = \beta = 1$ şi din c) rezultă b) pentru $\beta = 0$.* ■

Exemplul 2.1.1 *1. Aplicaţia nulă $\theta : V \to W$, $\theta(\overline{x}) = \overline{0}$, $\forall \overline{x} \in V$, este o aplicaţie liniară, numită **aplicaţia nulă** sau **morfismul nul**.*

*2. Aplicaţia $1_V : V \to V$, $1_V(\overline{x}) = \overline{x}$, $\forall \overline{x} \in V$, este o aplicaţie liniară, numită **aplicaţia identică** sau **endomorfismul identic**.*

3. Aplicaţia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$, definită prin $f(\overline{x}) = (x^1 + x^2, x^3, \dots, x^n)$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$, este o aplicaţie liniară.

*4. Dacă V_1, V_2 sunt două subspaţii vectoriale ale lui V astfel încât $V = V_1 \oplus V_2$ şi $p_i : V \to V_i$, definită prin $p_i(\overline{x}) = \overline{x}_i$, $\forall \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \in V$, $\overline{x}_i \in V_i$ $(i = 1, 2)$, atunci aplicaţiile p_1, p_2 numite **proiecţia lui V pe V_1 de-a lungul lui V_2, respectiv proiecţia lui V pe V_2 de-a lungul lui V_1** sunt aplicaţii liniare.*

5. Funcţia $f : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_2[X]$, *definită prin* $f(P) = P'$, *pentru orice* $P \in \mathbf{R}_3[X]$ *(unde* P' *este polinomul asociat derivatei funcţiei polinomiale asociate polinomului* P*), este o aplicaţie liniară.*

Vom nota prin $Hom(V, W) = \{f : V \to W | f$ aplicaţie liniară$\}$ şi $End(V) = Hom(V, V)$.

Propoziţia 2.1.2 *Dacă* $f : V \to W$ *este o aplicaţie liniară, atunci avem:*
a) $f\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{x}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i f(\overline{x}_i)$, $\forall \alpha^i \in K$, $\forall \overline{x}_i \in V$ $(i = \overline{1,p})$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$;
b) $f(\overline{0}) = \overline{0}$ *şi* $f(-\overline{x}) = -f(\overline{x})$, $\forall \overline{x} \in V$.

Demonstraţie. a) Se foloseşte metoda inducţiei matematice după $p \geq 1$.

b) Din $f(\overline{0}) = f(\overline{0} + \overline{0}) = f(\overline{0}) + f(\overline{0})$, rezultă $f(\overline{0}) = \overline{0}$. Evident, $f(-\overline{x}) = f((-1)\overline{x}) = (-1)f(\overline{x}) = -f(\overline{x})$, pentru orice $\overline{x} \in V$. ∎

În continuare vom defini pe $Hom(V, W)$ două legi de compoziţie: una internă, numită **adunarea aplicaţiilor liniare** şi una externă, numită **înmulţirea aplicaţiilor liniare cu scalari din** K.

i) oricare ar fi $f, g \in Hom(V, W)$, definim aplicaţia $f + g$ prin

$$(f + g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x}), \forall \overline{x} \in V;$$

ii) oricare ar fi $\lambda \in K$, $f \in Hom(V, W)$, definim aplicaţia λf prin

$$(\lambda f)(\overline{x}) = \lambda f(\overline{x}), \forall \overline{x} \in V.$$

Propoziţia 2.1.3 *Dacă* $f, g \in Hom(V, W)$ *şi* $\lambda \in K$, *atunci* $f + g$, $\lambda f \in Hom(V, W)$. *Mai mult,* $Hom(V, W)$ *are o structură de spaţiu vectorial peste* K *faţă de operaţiile de adunare a aplicaţiilor liniare şi înmulţirea aplicaţiilor liniare cu scalari din* K.

Demonstraţie. Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $\overline{x}, \overline{y} \in V$. Atunci, $(f + g)(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) =$
$= f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y})+g(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) = \alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})+\alpha g(\overline{x})+\beta g(\overline{y}) = \alpha(f(\overline{x})+g(\overline{x}))+$
$+\beta(f(\overline{y}) + g(\overline{y})) = \alpha(f + g)(\overline{x}) + \beta(f + g)(\overline{y})$ şi
$(\lambda f)(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) = \lambda f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) = \lambda(\alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})) = \lambda(\alpha f(\overline{x}))+\lambda(\beta f(\overline{y})) =$
$= (\lambda\alpha)f(\overline{x}) + (\lambda\beta)f(\overline{y}) = (\alpha\lambda)f(\overline{x}) + (\beta\lambda)f(\overline{y}) = \alpha(\lambda f(\overline{x})) + \beta(\lambda f(\overline{y})) =$
$= \alpha(\lambda f)(\overline{x}) + \beta(\lambda f)(\overline{y})$.

Vectorul nul al spaţiului $Hom(V, W)$ este aplicaţia nulă θ, iar opusul lui f este $-f$, adică $(-1)f$. ∎

Dacă V, W, Z sunt trei spaţii vectoriale peste K şi $f \in Hom(V, W)$, $g \in Hom(W, Z)$, atunci **compunerea** lor (numită şi **produsul**) $g \circ f$, definită prin $(g \circ f)(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$, $\forall \overline{x} \in V$, este tot o aplicaţie liniară de la V la Z (verificarea este foarte simplă!). Mai mult, cu uşurinţă se poate verifica că $End(V)$ este un inel faţă de operaţiile de adunare şi compunere a aplicaţiilor liniare, unitatea inelului fiind chiar aplicaţia identică 1_V, iar zeroul inelului este aplicaţia nulă θ. Inversul unui element f din $End(V)$, dacă există, este chiar inversa lui f, ca funcţie.

2.2 Aplicaţii liniare injective, surjective şi bijective

În această secţiune prezentăm câteva caracterizari foarte utile ale aplicaţiilor liniare injective, surjective şi bijective.

Propoziţia 2.2.1 *Aplicaţia liniară $f : V \to W$ este injectivă dacă şi numai dacă $Kerf = \{\overline{0}\}$.*

Demonstraţie. Dacă f este injectivă, atunci fie $\overline{x} \in Kerf$, arbitrar fixat.

Avem că $f(\overline{x}) = \overline{0}$, dar şi $f(\overline{0}) = \overline{0}$. Din ipoteza de injectivitate, avem că $\overline{x} = \overline{0}$. Prin urmare, $Kerf \subset \{\overline{0}\}$ şi cum este evident că $\{\overline{0}\} \subset Kerf$, rezultă că $Kerf = \{\overline{0}\}$.

Reciproc, dacă $Kerf = \{\overline{0}\}$ şi considerăm doi vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ astfel ca $f(\overline{x}_1) = f(\overline{x}_2)$, atunci $f(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \overline{0}$, ceea ce înseamnă că $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \in Kerf$, adică $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = \overline{0}$ sau $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$. Deci, f este injectivă. ■

Propoziţia 2.2.2 *Aplicaţia liniară $f : V \to W$ este injectivă dacă şi numai dacă f duce orice sistem de vectori liniar independenţi din V într-un sistem de vectori liniar independenţi din W, adică pentru orice $\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}$ sistem liniar independent în V avem că sistemul $\{f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_m)\}$ este liniar independent în W.*

Demonstraţie. Dacă f este injectivă şi considerăm sistemul $\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}$ liniar independent în V, să demonstrăm că sistemul $\{f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_m)\}$ este liniar independent în W. Fie λ^1, ..., $\lambda^m \in K$ astfel ca $\lambda^1 f(\overline{a}_1) + \cdots + \lambda^r f(\overline{a}_m) = \overline{0}$. Atunci, $f(\lambda^1 \overline{a}_1 + \cdots + \lambda^m \overline{a}_m) = \overline{0} = f(\overline{0})$ şi cum f este injectivă, rezultă că $\lambda^1 \overline{a}_1 + \cdots + \lambda^m \overline{a}_m = \overline{0}$, ceea ce implică $\lambda^1 = \cdots = \lambda^m = 0$. Deci, sistemul $\{f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_m)\}$ este liniar independent în W.

Reciproc, dacă avem că f duce orice sistem de vectori liniar independenti din V într-un sistem de vectori liniar independenţi din W, atunci să demonstrăm că f este injectivă.

Fie $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$ din V. Atunci, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \neq \overline{0}$, adică $\{\overline{x}_1 - \overline{x}_2\}$ este un sistem liniar independent în V. Din ipoteză, rezultă că $\{f(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\}$ este sistem liniar independent în W, adică $f(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \neq \overline{0}$ sau $f(\overline{x}_1) \neq f(\overline{x}_2)$. Atunci, f este injectivă. ■

Propoziţia 2.2.3 *Orice aplicaţie liniară $f : V \to W$ duce un sistem de generatori ai lui V într-un sistem de generatori ai lui $f(V) = \operatorname{Im} f$.*

Demonstraţie. Fie $\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}$ un sistem de generatori pentru V. Vom demonstra că $\{f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_m)\}$ constituie un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} f$. Pentru aceasta, să considerăm vectorul $\overline{y} \in \operatorname{Im} f$. Atunci, există cel puţin un $\overline{x} \in V$ astfel ca $\overline{y} = f(\overline{x})$. Pentru acest $\overline{x}$ există scalarii α^1, ..., α^m astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^i \overline{a}_i = \overline{x}$ şi atunci $\overline{y} = f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^i \overline{a}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^i f(\overline{a}_i)$. În consecinţă, $\operatorname{Im} f = L(f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_m))$. ■

Corolarul 2.2.1 *Aplicaţia liniară $f : V \to W$ este surjectivă dacă şi numai dacă f duce orice sistem de generatori ai lui V într-un sistem de generatori ai lui W.*

Demonstraţie. Implicaţia directă este o consecinţă clară a propoziţiei anterioare. Reciproca este evidentă (demonstraţia temă!). ■

Corolarul 2.2.2 *Aplicaţia liniară $f : V \to W$ este bijectivă dacă şi numai dacă f duce orice bază a lui V într-o bază a lui W.*

Propoziţia 2.2.4 *Dacă $f \in End(V, W)$ este bijectivă, atunci inversa sa $f^{-1} \in Hom(W, V)$.*

Demonstraţie. Fie α_1, $\alpha_2 \in K$ şi $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2 \in W$. Atunci, există $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 \in V$ astfel încât $f(\overline{x}_1) = \overline{y}_1$ şi $f(\overline{x}_2) = \overline{y}_2$, adică $f^{-1}(\overline{y}_1) = \overline{x}_1$ şi $f^{-1}(\overline{y}_2) = \overline{x}_2$. Rezultă că $f^{-1}(\alpha^1\overline{y}_1 + \alpha^2\overline{y}_2) = f^{-1}(\alpha^1 f(\overline{x}_1) + \alpha^2 f(\overline{x}_2)) = f^{-1}(f(\alpha^1\overline{x}_1 + \alpha^2\overline{x}_2)) =$
$= \alpha^1\overline{x}_1 + \alpha^2\overline{x}_2 = \alpha^1 f^{-1}(\overline{y}_1) + \alpha^2 f^{-1}(\overline{y}_2)$, adică f^{-1} este liniară. ■

2.3 Nucleu şi imagine pentru o aplicaţie liniară

Fie V, W două spaţii vectoriale peste K şi $f : V \to W$ o aplicaţie liniară.

Propoziţia 2.3.1 *a) Dacă V_1 este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci **imaginea** sa prin f, $f(V_1) = \{f(\overline{x}) | \overline{x} \in V_1\}$, este un subspaţiu vectorial al lui W.*

*b) Dacă W_1 este un subspaţiu vectorial al lui W, atunci **contraimaginea** sa prin f, $f^{-1}(W) = \{\overline{x} \in V | f(\overline{x}) \in W_1\}$, este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstraţie. a) Fie $\alpha, \beta \in K$ si $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in f(V_1)$. Atunci, există $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 \in V_1$ astfel încât $f(\overline{x}_1) = \overline{y}_1$, $f(\overline{x}_2) = \overline{y}_2$. Rezultă că $\alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2 = \alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2) = f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) \in V_1$ şi astfel V_1 este subspaţiu vectorial al lui V.

b) Fie $\alpha, \beta \in K$ şi $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in f^{-1}(W_1)$. Atunci, $f(\overline{x}_1)$, $f(\overline{x}_2) \in W_1$ şi astfel $f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2) \in W_1$. În concluzie, $f^{-1}(W_1)$ este subspaţiu vectorial al lui V. ■

Corolarul 2.3.1 *a)* $f(V) = \{f(\overline{x}) | \overline{x} \in V\} \overset{not}{=} \operatorname{Im} f$ *este subspaţiu vectorial al lui* W.

b) $f^{-1}(\{\overline{0}\}) = \{\overline{x} \in V | f(\overline{x}) = \overline{0}\} \overset{not}{=} Ker\ f$ *este subspaţiu vectorial în* V.

Observaţia 2.3.1 *Se poate demonstra direct (folosind definiţia) că* $\operatorname{Im} f$ *şi* $Ker\ f$ *sunt subspaţii vectoriale în* W*, respectiv* V.

Definiţia 2.3.1 *Subspaţiile vectoriale* $\operatorname{Im} f$ *şi* $Ker\ f$ *se numesc* ***imaginea*** *aplicaţiei* f*, respectiv* ***nucleul*** *aplicaţiei* f*, iar* $\dim \operatorname{Im} f$, $\dim Ker\ f$ *se numesc* ***rangul****, respectiv* ***defectul*** *aplicaţiei liniare* f.

Legătura dintre rangul şi defectul unei aplicaţii liniare este dată de teorema:

Teorema 2.3.1 *Dacă* $f \in Hom(V, W)$ *şi dim* $V = n$ *finită, atunci:*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim Ker\ f = \dim V.$$

Demonstraţie. Cazul I) Dacă $\dim Kerf = 0$, atunci $Kerf = \{\overline{0}\}$, adică f este injectivă. Altfel spus, f duce baza lui V în baza lui $f(V) = \operatorname{Im} f$. Prin urmare, $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$ sau $\dim \operatorname{Im} f + \dim Kerf = \dim V$.

Cazul II) Dacă $\dim Kerf = n$, atunci $f(\overline{x}) = \overline{0}$, $\forall \overline{x} \in V$, adică $\operatorname{Im} f = \{\overline{0}\}$ sau $\dim \operatorname{Im} f = 0$ şi atunci concluzia este evidentă.

Cazul III) Dacă $1 \leq \dim Kerf \leq n-1$, $r = \dim Kerf$, $n = \dim V$ iar $\mathcal{B}' = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r\}$ o bază a lui $Kerf$ pe care o completăm cu $n - r$ vectori $\overline{a}_{r+1}$, ..., $\overline{a}_n$ până la o bază a lui V, atunci vom arăta că $\mathcal{B}_1 = \{f(\overline{a}_{r+1}), \ldots, f(\overline{a}_n)\}$ este o bază a lui $\operatorname{Im} f$ şi astfel avem concluzia.

Fie $\overline{y} \in \operatorname{Im} f$. Atunci, există $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$ astfel ca $\overline{y} = f(\overline{x}) = f(x^1\overline{a}_1 + \cdots + x^r\overline{a}_r + x^{r+1}\overline{a}_{r+1} + \cdots + x^n\overline{a}_n) = x^{r+1} f(\overline{a}_{r+1}) + \cdots + x^n f(\overline{a}_n)$, întrucât $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_r \in Kerf$. Deci, $\operatorname{Im} f = L(f(\overline{a}_{r+1}), \ldots, f(\overline{a}_n))$.

Fie λ^{r+1}, ..., $\lambda^n \in K$ astfel încât $\lambda^{r+1} f(\overline{a}_{r+1}) + \cdots + \lambda^n f(\overline{a}_n) = \overline{0}$. Atunci, avem $f(\lambda^{r+1}\overline{a}_{r+1} + \cdots + \lambda^n \overline{a}_n) = \overline{0}$ sau $\lambda^{r+1}\overline{a}_{r+1} + \cdots + \lambda^n\overline{a}_n \in Kerf$. Acum, ţinând cont că $\mathcal{B}'$ este bază pentru $Kerf$, rezultă că există λ^1, ..., $\lambda^r \in K$ astfel ca $\lambda^1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda^r\overline{a}_r = \lambda^{r+1}\overline{a}_{r+1} + \cdots + \lambda^n\overline{a}_n$, adică $\lambda^1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda^r\overline{a}_r + (-\lambda^{r+1})\overline{a}_{r+1} + \cdots + (-\lambda^n)\overline{a}_n = \overline{0}$. Deoarece $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ reprezintă o bază pentru V avem că $\lambda^i = 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Prin urmare, $\mathcal{B}_1 = \{f(\overline{a}_{r+1}), \ldots, f(\overline{a}_n)\}$ este şi sistem liniar independent. Deci, $\mathcal{B}_1$ este bază pentru $\operatorname{Im} f$. ■

Propoziţia 2.3.2 *Fie* V*,* W *două spaţii vectoriale peste* K*, de aceeaşi dimensiune finită şi* $f : V \to W$ *o aplicaţie liniară. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *este injectivă;*

ii) f *este surjectivă;*

iii) f *este bijectivă.*

Demonstraţie. i)⇒ii) Dacă f este injectivă, atunci $Kerf = \{\overline{0}\}$ şi astfel $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$, adică $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$. Prin urmare, $\operatorname{Im} f = W$, ceea ce înseamnă că f este surjectivă.

ii)⇒i) Dacă f este surjectivă, adică $\operatorname{Im} f = W$, atunci $\dim \operatorname{Im} f = \dim W = \dim V$, de unde rezultă că $\dim Kerf = 0$. Deci, $Kerf = \{\overline{0}\}$, ceea ce înseamnă că f este injectivă.

Restul echivalenţelor sunt evidente. ■

2.4 Spaţii vectoriale izomorfe

Fie V, W două spaţii vectoriale peste K.

Definiţia 2.4.1 *Spunem că spaţiile vectoriale V şi W sunt* ***izomorfe*** *dacă există o aplicaţie liniară $f : V \to W$ bijectivă. În acest caz, aplicaţia f se numeşte* ***izomorfism*** *de spaţii vectoriale. Vom nota $V \simeq W$. Dacă $W = V$ atunci spunem că f este un* ***automorfism*** *al spaţiului vectorial V.*

Exemplul 2.4.1 *1) Aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definită prin $f(\overline{x}) = (x^1 + x^2, x^1 - x^2)$, oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$ este un automorfism al lui $\mathbf{R}^2$, întrucât este liniară şi bijectivă (verificarea temă!).*

2) Aplicaţia $f : M_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4$ definită prin $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$, oricare ar fi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Teorema 2.4.1 *Două spaţii vectoriale V şi W peste K, finit dimensionale sunt izomorfe dacă şi numai dacă* $\dim V = \dim W$.

Demonstraţie. Presupunem că V şi W sunt spaţii vectoriale finit dimensionale izomorfe, cu $\dim V = m$ si $\dim W = n$. Atunci, există o aplicaţie liniară bijectivă $f : V \to W$. Dacă $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}$ este o bază a lui V, atunci $\{f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_m)\}$ este o bază a lui W, conform unui corolar din secţiunea precedentă. Aplicând teorema bazei, rezultă că $m = n$, adică $\dim V = \dim W$.

Reciproc, dacă $\dim V = \dim W = n$, să aratăm că V şi W sunt izomorfe. Într-adevăr, dacă considerăm bazele $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}$ pentru V, respectiv, W şi definim aplicaţia $f : V \to W$ prin $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{b}_i$, pentru orice $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$, atunci f este un izomorfism de spaţii vectoriale, pentru că
$f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha x^i + \beta y^i)\overline{a}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha x^i+\beta y^i)\overline{b}_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x^i\overline{b}_i+\beta \sum\limits_{i=1}^{n} y^i\overline{b}_i = \alpha f(\overline{x}) + \beta f(\overline{y})$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V$ şi

din $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, cu $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i\overline{a}_i$, $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i\overline{a}_i$, rezultă $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i\overline{b}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i\overline{b}_i$, adică $x^i = y^i$, $\forall i = \overline{1, n}$ sau $\overline{x} = \overline{y}$, iar pentru orice $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{b}_i \in W$, există $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{a}_i \in V$ astfel ca $f(\overline{x}) = \overline{y}$, adică f este injectivă şi surjectivă. ■

Corolarul 2.4.1 *Orice spaţiu vectorial V peste K, de dimensiune n este izomorf cu spaţiul aritmetic K^n.*

2.5 Matricea unei aplicaţii liniare

Fie V şi W spaţii vectoriale peste K, de dimensiuni finite n, respectiv m.

Propoziţia 2.5.1 *Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V, iar $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ vectori arbitrari din W. Atunci, există o unică aplicaţie liniară $f : V \to W$ astfel încât $f(\overline{a}_i) = \overline{b}_i$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$.*

Demonstraţie. Existenţa: dacă definim aplicaţia $f : V \to W$ prin $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{b}_i$, $\forall \overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$, atunci este clar că f este liniară şi $f(\overline{a}_i) = \overline{b}_i$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$.

Unicitatea: Dacă $g : V \to W$ este o altă aplicaţie liniară aşa încât $g(\overline{a}_i) = \overline{b}_i$, $\forall i = \overline{1,n}$, atunci pentru orice $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$ avem $g(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i g(\overline{a}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{b}_i = f(\overline{x})$, adică $g = f$. ■

Corolarul 2.5.1 *Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V, iar $f, g : V \to W$ două aplicaţii liniare astfel ca $f(\overline{a}_i) = g(\overline{a}_i)$, $\forall i = \overline{1,n}$. Atunci $f = g$.*

Corolarul 2.5.2 *O aplicaţie liniară $f : V \to W$ este complet determinată dacă se cunosc imaginile $f(\overline{a}_1)$, ..., $f(\overline{a}_n)$ ale vectorilor unei baze $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ a lui V, prin f.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă se dau vectorii $\overline{b}_i = f(\overline{a}_i)$, $1 \leq i \leq n$, atunci pentru orice vector $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$, din liniaritatea lui f, avem că $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{b}_i$. Membrul drept este însă cunoscut şi astfel rezultă că $f(\overline{x})$ este cunoscut, pentru orice $\overline{x} \in V$. ■

Acum, dacă fixăm bazele $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ în V şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m\}$ în W, iar pentru $f \in Hom(V, W)$ avem

$$\begin{array}{c}
f(\overline{a}_1) = \alpha_1^1 \overline{b}_1 + \alpha_1^2 \overline{b}_2 + \cdots + \alpha_1^m \overline{b}_m \ , \\
f(\overline{a}_2) = \alpha_2^1 \overline{b}_1 + \alpha_2^2 \overline{b}_2 + \cdots + \alpha_2^m \overline{b}_m \ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(\overline{a}_n) = \alpha_n^1 \overline{b}_1 + \alpha_n^2 \overline{b}_2 + \cdots + \alpha_n^m \overline{b}_m \ ,
\end{array}$$

atunci putem da definiţia:

Definiţia 2.5.1 *Matricea A pe ale cărei coloane sunt coordonatele imaginilor prin f ale vectorilor bazei $\mathcal{B}_1$ în raport cu baza $\mathcal{B}_2$ se numeşte* ***matricea aplicaţiei liniare f în raport cu bazele $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$****.*

Prin urmare,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K).$$

Exemplul 2.5.1 *1) Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definită prin $f(\overline{x}) = (2x^1 - x^3, x^1 + 3x^2 + x^3)$, oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$. Evident, f este o aplicaţie liniară şi $f(\overline{e}_1) = (2,1)$, $f(\overline{e}_2) = (0,3)$, $f(\overline{e}_3) = (-1,1)$. Atunci, matricea lui f relativ la bazele canonice $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0), \overline{e}_3 = (0,0,1)\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{f}_1 = (1,0), \overline{f}_2 = (0,1)\}$ ale spaţiilor $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ este $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.*

2) Fie V, W spaţii vectoriale peste K de dimensiuni 2, respectiv 3 şi $\theta \in Hom(V,W)$ aplicaţia nulă. Atunci, matricea lui θ în raport cu bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ oarecare din V, respectiv din W este matricea nulă $O_{3,2} \in M_{3,2}(K)$.

În particular, dacă $W = V$ şi fixăm $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}$ o bază în V, iar pentru $f \in End(V)$ avem

$$f(\overline{a}_i) = \alpha_i^1 \overline{a}_1 + \alpha_i^2 \overline{a}_2 + \dots + \alpha_1^n \overline{a}_n, \quad \forall i = \overline{1,n},$$

atunci prin **matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$** înţelegem matricea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \in M_n(K),$$

pe ale cărei coloane avem, respectiv, coordonatele lui $f(\overline{a}_1)$, ..., $f(\overline{a}_n)$, relativ la baza $\mathcal{B}$ a lui V.

Exemplul 2.5.2 *1) Matricea endomorfismului identitate 1_V relativ la orice bază $\mathcal{B}$ a lui V este matricea unitate $I_n \in M_n(K)$.*

2) Matricea lui $f \in End(\mathbf{R}^3)$, definit prin $f(\overline{x}) = (x^2 + x^3, x^3 + x^1, x^1 + x^2)$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$, relativ la baza canonică $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

În continuare ne propunem să vedem cum se schimbă matricea unei aplicaţii liniare la o schimbare a bazelor spaţiilor vectoriale V şi W.

Propoziţia 2.5.2 *Fie $f \in Hom(V,W)$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}'_1$ două baze în V şi $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}'_2$ două baze în W. Dacă C este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}'_1$, D este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_2$ la baza $\mathcal{B}'_2$, iar A este matricea aplicaţiei liniare f relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, B este matricea lui f relativ la bazele $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2$, atunci avem*

$$B = D^{-1}AC.$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$, $\mathcal{B}'_1 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}$ baze în V, iar $C = (c_i^j)_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}'_1$, adică $\overline{b}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_i^k \overline{a}_k$, $\forall i = \overline{1,n}$. Fie $\mathcal{B}_2 = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\}$, $\mathcal{B}'_2 = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_m\}$ baze în W, iar $D = (d_i^j)_{i,j=\overline{1,n}} \in M_m(K)$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}_2$ la baza $\mathcal{B}'_2$, adică $\overline{f}_i = \sum\limits_{k=1}^{m} d_i^k \overline{e}_k$, $\forall i = \overline{1,m}$.

Dacă $A = (a_i^j) \in M_{m,n}(K)$ şi $B = (b_i^j) \in M_{m,n}(K)$ sunt matricele lui f în raport cu bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, respectiv $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2$, atunci avem $f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_i^k \overline{e}_k$ şi $f(\overline{b}_i) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_i^k \overline{f}_k$, pentru toţi $i = \overline{1,n}$.

Ţinând cont relaţiile de mai sus avem $f(\overline{b}_i) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_i^k \overline{f}_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} b_i^k d_k^j \overline{e}_j$ şi $f(\overline{b}_i) = f(\sum\limits_{k=1}^{n} c_i^k \overline{a}_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_i^k f(\overline{a}_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} c_i^k a_k^j \overline{e}_j$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Din unicitatea scrierii unui vector în raport cu o bază rezultă că $\sum\limits_{k=1}^{m} b_i^k d_k^j = \sum\limits_{k=1}^{m} c_i^k a_k^j$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$ şi $j = \overline{1,m}$, ceea ce înseamnă că $DB = AC$ sau $B = D^{-1}AC$. ■

Corolarul 2.5.3 *Fie $f \in End(V)$ şi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ două baze în V. Dacă C este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, iar A este matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ şi B este matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}'$, atunci avem*

$$B = C^{-1}AC.$$

Observaţia 2.5.1 *Ţinând cont de rezultatul de mai sus şi de proprietăţi ale rangului unei matrice, avem că* ***rangul matricei unei aplicaţii liniare nu se schimbă odată cu schimbarea bazelor****, deşi matricea aplicaţiei liniare se schimbă.*

Teorema 2.5.1 *Rangul unei aplicaţii liniare $f : V \to W$ coincide cu rangul matricei aplicaţiei f în raport cu bazele arbitrare $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ din V, respectiv W.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază în V şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m\}$ o bază în W. Atunci $\operatorname{Im} f = L(f(\overline{a}_1), \ldots, f(\overline{a}_n))$ şi astfel rangul lui $f = \dim \operatorname{Im} f$ = numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $f(\overline{a}_1)$, ..., $f(\overline{a}_n)$, adică chiar rangul matricei lui f relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ (ţinând cont de definiţia rangului unei matrici). ■

Corolarul 2.5.4 *Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci* $\dim \operatorname{Im} f = rangA$ *şi* $\dim Kerf = n - rangA$, *unde* $n = \dim V$ *şi* A *este matricea lui* f *relativ la bazele oarecare* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *din* V, *respectiv* W.

Dacă fixăm arbitrar bazele $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ în V şi $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m\}$ în W, iar pentru $f \in Hom(V, W)$ avem $A = (\alpha_i^k) \in M_{m,n}(K)$ matricea sa relativ la cele două baze, atunci pentru orice $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$, obţinem că $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} x^i \alpha_i^k \overline{b}_k$. Dar, pe de altă parte $f(\overline{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} y^k \overline{b}_k$. Din unicitatea scrierii lui $f(\overline{x})$ în raport cu baza $\mathcal{B}_2$ rezultă că $y^k = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \alpha_i^k$, pentru toţi $k = \overline{1, m}$ sau, altfel scris,

$$\left\{ \begin{array}{c} y^1 = \alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2 + \cdots + \alpha_n^1 x^n \\ y^2 = \alpha_1^2 x^1 + \alpha_2^2 x^2 + \cdots + \alpha_n^2 x^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^m = \alpha_1^m x^1 + \alpha_2^m x^2 + \cdots + \alpha_n^m x^n \end{array} \right. .$$

Relaţiile de mai sus se numesc **ecuaţiile aplicaţiei liniare f relativ la bazele $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$.**

Matriceal, putem scrie $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$ sau $\widetilde{(f(\overline{x}))}_{\mathcal{B}_2} = A \widetilde{x}_{\mathcal{B}_1}$.

Observaţia 2.5.2 *Având în vedere relaţia de mai sus, putem spune că, în raport cu bazele* $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m\}$ *din* V, *respectiv* W, *o aplicaţie liniară* $f : V \to W$ *se poate defini în trei moduri echivalente:*

a) prin expresie analitică: $f(\overline{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} y^k \overline{b}_k$, $\forall \overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$, *sau*

b) prin matrice: $A = (a_i^j) \in M_{m,n}(K)$, *unde* $f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i^j \overline{b}_j$, $\forall i = \overline{1, n}$, *sau*

c) prin ecuaţii: $\left\{ y^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k x^i \right.$, *pentru orice* $k = \overline{1, m}$.

Exemplul 2.5.3 *Fie* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *o aplicaţie liniară care relativ la bazele canonice* $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1 = (1, 0, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, 0), \overline{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ *şi* $\mathcal{B}_2 = \{\overline{f}_1 =$

$(1,0), \overline{f}_2 = (0,1)\}$ *ale spaţiilor* $\mathbf{R}^3$ *şi* $\mathbf{R}^2$ *are matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Atunci, din relaţia $\widetilde{(f(\overline{x}))}_{\mathcal{B}_2} = A\widetilde{x}_{\mathcal{B}_1}$, *rezultă ecuaţiile lui* f *relativ la bazele canonice* $\begin{cases} y^1 = x^1 - x^2 + x^3 \\ y^2 = x^1 + 2x^2 + x^3 \end{cases}$ *şi expresia analitică a lui* f *faţă de* $\mathcal{B}_1$ *şi* $\mathcal{B}_2$,

$f(\overline{x}) = (x^1 - x^2 + x^3)\overline{f}_1 + (x^1 + 2x^2 + x^3)\overline{f}_2$, $\forall \overline{x} = x^1\overline{e}_1 + x^2\overline{e}_2 + x^3\overline{e}_3 \in \mathbf{R}^3$, *sau* $f(\overline{x}) = (x^1 - x^2 + x^3, x^1 + 2x^2 + x^3)$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$.

Propoziţia 2.5.3 *a) Fie* f, $g \in Hom(V,W)$, $\alpha \in K$ *şi bazele* $\mathcal{B}_1$ *şi* $\mathcal{B}_2$ *în* V, *respectiv* W. *Dacă* A *şi* B *sunt matricile aplicaţiilor liniare* f, g *în raport cu bazele* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, *atunci* $A + B$, αA *sunt matricile aplicaţiilor* $f + g$, *respectiv* αf, *în raport cu bazele* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$.

b) Fie $f \in Hom(V,W)$, $g \in Hom(W,Z)$ *şi bazele* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ *în* V, W, *respectiv* Z. *Dacă* A *este matricea lui* f *în raport cu* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, *iar* B *este matricea lui* g *în raport cu* $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, *atunci* BA *este matricea aplicaţiei liniare* $g \circ f$ *în raport cu bazele* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_3$.

Demonstraţie. a) Dacă $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_m\}$ şi $A = (\alpha_i^j)$, $B = (\beta_i^j) \in M_{m,n}(K)$ sunt matricile lui f, g relativ la $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, atunci $(f+g)(\overline{a}_i) = f(\overline{a}_i) + g(\overline{a}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\alpha_i^j \overline{b}_j + \beta_i^j \overline{b}_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{m} (\alpha_i^j + \beta_i^j)\overline{b}_j$, pentru toţi $i = \overline{1,n}$. Astfel $A + B = (\alpha_i^j + \beta_i^j)$ este matricea lui $f + g$ relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. La fel pentru αf.

b) Dacă $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_m\}$, $\mathcal{B}_3 = \{\overline{c}_1, \dots, \overline{c}_p\}$ şi $A = (\alpha_i^j) \in M_{m,n}(K)$, $B = (\beta_j^k) \in M_{p,m}(K)$ sunt matricile lui f relativ la $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, respectiv g relativ la $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, atunci pentru orice $i = \overline{1,n}$ avem că $(g \circ f)(\overline{a}_i) = g(f(\overline{a}_i)) = g\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i^j \overline{b}_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i^j g(\overline{b}_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_i^j \beta_j^k \overline{c}_k$. Atunci este clar că matricea de elemente $\gamma_i^k = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i^j \beta_j^k = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j^k \alpha_i^j$, $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p})$, care este chiar matricea BA, este matricea aplicaţiei liniare $g \circ f$ în raport cu bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_3$. ■

Teorema 2.5.2 *Fie* V, W *spaţii vectoriale peste* K, *finit dimensionale, cu bazele fixate* $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_m\}$. *Atunci, aplicaţia*

$h : Hom(V,W) \to M_{m,n}(K)$, *definită prin* $h(f) = A$, *pentru orice* $f \in Hom(V,W)$ *(unde* A *este matricea lui* f *relativ la bazele* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$*) este un izomorfism de spaţii vectoriale.*

Demonstraţie. Ţinând cont de propoziţia de mai sus avem că $h(f + g) = h(f) + h(g)$ şi $h(\alpha f) = \alpha h(f)$, pentru orice f, $g \in Hom(V,W)$, $\alpha \in K$. Deci, h este liniară.

Dacă f, $g \in Hom(V,W)$ astfel ca $h(f) = h(g)$, atunci înseamnă că cele două aplicaţii liniare au aceeaşi matrice $A = (\alpha_i^j) \in M_{m,n}(K)$ relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$.

Prin urmare $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x^i \alpha_i^j \overline{b}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i g(\overline{a}_i) = g(\overline{x})$, oricare ar fi $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$, adică $f = g$. Deci, h este injectivă.

Dacă $A = (\alpha_i^j) \in M_{m,n}(K)$, atunci putem lua aplicaţia liniară (de verificat că este liniară!) $f : V \to W$, $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i^j x^i \overline{b}_j$, $\forall \overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V$ şi se observă uşor că $f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i^j \overline{b}_j$, $\forall i = \overline{1,n}$. Deci, A este matricea lui f relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, adică $h(f) = A$. Prin urmare, h este surjectivă şi astfel h este bijectivă.

În concluzie, h este un izomorfism de spaţii vectoriale. ■

Corolarul 2.5.5 *Dacă* $\dim V = n$, $\dim W = m$ *atunci* $\dim Hom(V, W) = mn$.

2.6 Subspaţii invariante faţă de un endomorfism

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi $f \in End(V)$.

Definiţia 2.6.1 *Spunem că subspaţiul vectorial V_1 al lui V este **invariant faţă de** f dacă $f(\overline{x}) \in V_1$, oricare ar fi $\overline{x} \in V_1$ (adică $f(V_1) \subseteq V_1$).*

Exemplul 2.6.1 *1) Subspaţiile improprii $\{\overline{0}\}$ şi V sunt subspaţii invariante faţă de orice endomorfism f al lui V.*

2) $Ker f$ şi $\operatorname{Im} f$ sunt subspaţii invariante faţă de f (verificarea - temă!).

3) Dacă V_1, V_2 sunt două subspaţii invariante faţă de f, atunci $V_1 \cap V_2$ şi $V_1 + V_2$ sunt subspaţii invariante faţă de f.

Într-adevăr, dacă $\overline{x} \in V_1 \cap V_2$ atunci, ţinând seama că V_1, V_2 sunt invariante faţă de f, avem $f(\overline{x}) \in V_1$ şi $f(\overline{x}) \in V_2$, adică $f(\overline{x}) \in V_1 \cap V_2$. Apoi, dacă $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \in V_1 + V_2$ atunci $f(\overline{x}_1) \in V_1$ şi $f(\overline{x}_2) \in V_2$, pentru că $\overline{x}_1 \in V_1$ şi $\overline{x}_2 \in V_2$. Astfel, $f(\overline{x}) = f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) \in V_1 + V_2$.

Propoziţia 2.6.1 *Fie V_1 un subspaţiu vectorial al lui V şi $\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p\}$ un sistem de generatori pentru V_1. Atunci, V_1 este invariant faţă de $f \in End(V)$ dacă şi numai dacă $f(\overline{a}_1)$, ..., $f(\overline{a}_p) \in V_1$.*

Demonstraţie. Dacă V_1 este invariant faţă de $f \in End(V)$, atunci este clar că $f(\overline{a}_i) \in V_1$, pentru orice $i = \overline{1,p}$.

Reciproc, dacă $f(\overline{a}_1)$, ..., $f(\overline{a}_p) \in V_1$, atunci pentru orice $\overline{x} \in V_1$ avem că $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i \overline{a}_i$ şi astfel $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha^i f(\overline{a}_i) \in V_1$. În concluzie, $f(\overline{x}) \in V_1$, $\forall \overline{x} \in V_1$. ■

Observaţia 2.6.1 *Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finită n. Daca $f \in End(V)$, iar $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}$ este o bază a subspaţiului vectorial $V_1 \subset V$, invariant faţă de f, atunci există o bază $\mathcal{B}$ a lui V în raport cu care matricea lui f are forma $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, unde $A \in M_m(K)$, $B \in M_{m,n-m}(K)$, $O \in M_{n-m,m}(K)$, $C \in M_{n-m,n-m}(K)$.*

Este suficient să se completeze $\mathcal{B}_1$ până la o bază $\mathcal{B}$ a lui V şi apoi se observă că $f(\overline{a}_i) = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_i^j \overline{a}_j$, oricare ar fi $i = \overline{1,p}$, întrucât V_1 este invariant faţă de f.

Observaţia 2.6.2 *Dacă V este un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finita n, iar V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale ale lui V invariante faţă de $f \in End(V)$ astfel ca $V = V_1 \oplus V_2$, atunci există o bază $\mathcal{B}$ a lui V în raport cu care matricea lui f are forma $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, unde $A \in M_p(K)$, $B \in M_{n-p}(K)$, $p = \dim V_1$, $n - p = \dim V_2$.*

Într-adevăr, dacă alegem $\mathcal{B}_1$ o baza în V_1, $\mathcal{B}_2$ o bază în V_2 şi luăm $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ atunci obţinem cele afirmate aici, ţinând cont şi de invarianţa faţă de f a celor doua spaţii suplimentare.

2.7 Valori proprii şi vectori proprii pentru un endomorfism

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi $f \in End(V)$.

Definiţia 2.7.1 *i) Vectorul nenul $\overline{x} \in V$ se numeşte **vector propriu** al operatorului liniar f dacă există un scalar $\lambda \in K$ astfel încât $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$.*

*ii) Un scalar $\lambda \in K$ se numeşte **valoare proprie** a operatorului liniar f dacă există un vector $\overline{x} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ astfel încât $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$.*

Scalarul λ de mai sus se mai numeşte şi *valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu* $\overline{x}$, iar vectorul nenul $\overline{x}$ de mai sus se mai zice şi *vector propriu corespunzător valorii proprii* λ.

Propoziţia 2.7.1 *i) Dacă $\overline{x} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ este un vector propriu al lui f, atunci există un singur scalar $\lambda \in K$ pentru care $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$. Cu alte cuvinte, oricărui vector propriu îi corespunde o singură valoare proprie.*

ii) Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui f, atunci există o infinitate de vectori $\overline{x} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ pentru care $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$. Adică, oricarei valori proprii îi corespund o infinitate de vectori proprii.

Demonstraţie. i) Dacă $f(\overline{x}) = \lambda_1\overline{x}$ şi $f(\overline{x}) = \lambda_2\overline{x}$, atunci $\lambda_1\overline{x} = \lambda_2\overline{x}$. Cum $\overline{x} \neq \overline{0}$ rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2$.

ii) Dacă $\overline{x}$ este un vector propriu asociat valorii proprii λ, atunci $\alpha\overline{x}$ este tot un vector propriu asociat valorii proprii λ, pentru orice scalar nenul α. Într-adevăr, $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x}) = \alpha(\lambda\overline{x}) = \lambda(\alpha\overline{x})$ pentru orice $\alpha \in K$. ■

Exemplul 2.7.1 *1) Fie $\lambda \in K$, fixat şi aplicaţia $f : V \to V$ definită prin $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$, $\forall\overline{x} \in V$. Evident $f \in End(V)$ şi orice vector nenul din V este un vector propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ.*

2) Fie $f \in End(\mathbf{R}^2)$ care în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$ este dat prin expresia analitică $f(\overline{x}) = (x^2, x^1)$, $\forall\overline{x} = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$. Atunci, scalarii $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 1$ sunt valori proprii ale lui f deoarece există vectorii nenuli (care sunt vectori proprii corespunzatori acestor valori proprii) $\overline{a}_1 = (1, -1)$ şi $\overline{a}_2 = (1, 1)$ din $\mathbf{R}^2$ astfel încât $f(\overline{a}_1) = \lambda_1\overline{a}_1$ şi $f(\overline{a}_2) = \lambda_2\overline{a}_2$.

3) Fie $\mathcal{F}$ mulţimea functiilor reale de o variabilă reală, indefinit derivabile. Este clar că $\mathcal{F}$ are o structură de spaţiu vectorial real infinit dimensional, în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari reali a funcţiilor reale de o variabilă reală.

Aplicaţia $D : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definită prin $(Df)(x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall f \in \mathcal{F}$, numită operatorul de derivare, este, în mod evident, un endomorfism al lui $\mathcal{F}$. Fie $\lambda \in \mathbf{R}$, arbitrar fixat. Deoarece derivata funcţiei $f_0(x) = e^{\lambda x}$ este $f_o'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, rezultă că $f_o \in \mathcal{F}$ este un vector propriu al lui D, corespunzător valorii proprii λ.

Propoziţia 2.7.2 *Dacă λ este o valoare proprie a operatorului $f \in End(V)$, atunci mulţimea vectorilor proprii ai lui f corespunzători valorii proprii λ coincide cu mulţimea $Ker\ (f - \lambda 1_V) \setminus \{\overline{0}\}$.*

Demonstraţie. Vectorul nenul $\overline{x}$ este vector propriu al lui f asociat valorii proprii λ dacă şi numai dacă $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$, adică $(f - \lambda 1_V)(\overline{x}) = \overline{0}$. ■

Teorema 2.7.1 *Fie $A \in M_n(K)$ matricea operatorului liniar $f : V \to V$, în raport cu baza $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ a lui V. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

a) Un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie a lui f dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

b) Un vector $\overline{x}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_0^i \overline{a}_i \in V$ este vector propriu al lui f, corespunzator valorii proprii λ, dacă şi numai dacă n-uplul $\widetilde{x}_0^t = (x_0^1, \ldots, x_0^n)^t$ este o soluţie nenulă a sistemului liniar omogen $(A - \lambda I_n)\widetilde{x} = \widetilde{0}$.

Demonstraţie. a) $\lambda \in K$ este valoare proprie a lui f dacă şi numai dacă există $\overline{x} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ astfel ca $f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$, adică $(f - \lambda 1_V)(\overline{x}) = \overline{0}$ sau, în scriere matriceală, $(A - \lambda I_n)\widetilde{x} = \widetilde{0}$. Prin urmare, $\lambda \in K$ este valoare proprie a lui f dacă şi numai dacă sistemul liniar şi omogen $(A-\lambda I_n)\widetilde{x}=\widetilde{0}$ are cel puţin o soluţie nebanală $\widetilde{x}^t \neq \widetilde{0}^t$, fapt care se întâmplă dacă şi numai dacă $\det(A-\lambda I_n)=0$.

b) Se ţine cont de definiţia vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ. ■

Teorema 2.7.2 *Fie $f \in End(V)$ şi A, B matricile lui f relativ la bazele $\mathcal{B}=\{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n\}$, respectiv $\mathcal{B}'=\{\overline{b}_1,\ldots,\overline{b}_n\}$ ale lui V. Atunci,* $\det(A-\lambda I_n)=\det(B-\lambda I_n)$.

Demonstraţie. Fie C matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$. Atunci $B=C^{-1}AC$ şi avem $\det(B-\lambda I_n)=\det(C^{-1}AC-\lambda I_n)=\det(C^{-1}(A-\lambda I_n)C)=\det C^{-1}\det(A-\lambda I_n)\det C=\det(A-\lambda I_n)$. ■

Definiţia 2.7.2 *Polinomul (în λ) $P_f(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ se numeşte **polinomul caracteristic** al endomorfismului f, iar ecuaţia (cu necunoscuta λ) $\det(A-\lambda I_n)=0$ se numeşte **ecuaţia caracteristică** a lui f.*

Teoremele de mai sus arată că un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie a lui f dacă şi numai dacă este o rădăcină din K a polinomului caracteristic $P_f(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$, polinom care este invariant la schimbarea bazei spaţiului vectorial V.

Practic, pentru aflarea valorilor proprii şi a vectorilor proprii pentru un endomorfism f al lui V, cu $\dim V=n$, se procedează după algoritmul:

Pasul 1. Se fixează o bază $\mathcal{B}=\{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n\}$ în V.

Pasul 2. Se scrie matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$.

Pasul 3. Se calculează polinomul caracteristic $P_f(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$.

Pasul 4. Se rezolvă (în corpul K) ecuaţia caracteristică $\det(A-\lambda I_n)=0$, adică se determină valorile proprii λ_1, λ_2, ..., $\lambda_m \in K$, $m \leq n$ (egalitate avem pentru $K=\mathbf{C}$).

Pasul 5. Pentru fiecare valoare proprie λ_i $(i=1,\ldots,m)$ se determină vectorii proprii, adică vectorii nenuli $\overline{x}_i$ prin rezolvarea sistemului liniar şi omogen $(A-\lambda_i I_n)\widetilde{x}=\widetilde{0}$.

Exemplul 2.7.2 *1) Fie $f \in End(\mathbf{R}^2)$ care în raport cu baza canonică $\mathcal{B}=\{\overline{e}_1=(1,0),\overline{e}_2=(0,1)\}$ a lui $\mathbf{R}^2$ are expresia analitică $f(\overline{x})=(x^1-2x^2,2x^1-4x^2)$, pentru orice $\overline{x}=(x^1,x^2)\in\mathbf{R}^2$. Pentru a determina valorile proprii şi vectorii proprii pentru f parcurgem paşii:*

***Pasul 1**: Deja este fixată baza canonică $\mathcal{B}$ a lui $\mathbf{R}^2$.*

***Pasul 2:** Cum $f(\overline{e}_1)=(1,2)$ şi $f(\overline{e}_2)=(-2,-4)$ rezultă că matricea lui f relativ la baza canonică $\mathcal{B}$ este $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.*

***Pasul 3:** Polinomul caracteristic este $P_f(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & -4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda$.*

Pasul 4: *Ecuaţia caractersitică* $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ *are rădăcinile reale* $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$, *care sunt valorile proprii ale lui* f.

Pasul 5: *Pentru* $\lambda_1 = -3$, *rezolvăm sistemul liniar omogen* $\{(A - \lambda_1 I_2)\widetilde{x} = \widetilde{0}$, *adică* $\left\{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$ *sau, mai exact,* $\begin{cases} 4x^1 - 2x^2 = 0 \\ 2x^1 - x^2 = 0 \end{cases}$, *care are soluţiile de forma* $(\alpha, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *Astfel, un vector propriu corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = -3$ *este de forma* $\overline{u}_1 = (\alpha, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. *În particular, pentru* $\alpha = 1$, *obţinem un vector propriu corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = -3$, $\overline{v}_1 = (1, 2)$.

Pentru $\lambda_2 = 0$, *rezolvăm sistemul liniar omogen* $\{(A - \lambda_2 I_2)\widetilde{x} = \widetilde{0}$, *mai exact* $\begin{cases} x^1 - 2x^2 = 0 \\ 2x^1 - 4x^2 = 0 \end{cases}$, *care are soluţiile de forma* $(2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *Astfel, un vector propriu corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 0$ *este de forma* $\overline{u}_2 = (2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. *În particular, pentru* $\alpha = 1$, *obţinem un vector propriu corespunzător valorii proprii* $\lambda_2 = 0$, $\overline{v}_2 = (2, 1)$.

2) Fie $f \in End(\mathbf{R}^3)$ *care în raport cu baza canonică* $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0), \overline{e}_3 = (0,0,1)\}$ *a lui* $\mathbf{R}^3$ *are matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Vom determina valorile proprii şi vectorii proprii pentru* f, *având în vedere că primii doi paşi din algoritm sunt deja parcurşi. Astfel, ecuaţia caracteristică*
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, *echivalentă cu* $(1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1) = 0$, *are o singură rădăcină reală* $\lambda_1 = 1$ *(*$\lambda_{2,3} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$*). Prin urmare* f *are o singură valoare proprie* $\lambda_1 = 1$.

Pentru $\lambda_1 = 1$, *rezolvând sistemul liniar omogen* $\{(A - \lambda_1 I_3)\widetilde{x} = \widetilde{0}$, *adică* $\begin{cases} 0 = 0 \\ x^3 = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases}$, *obţinem soluţia generală* $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *Atunci, un vector propriu asociat valorii proprii* $\lambda_1 = 1$ *este de forma* $\overline{u}_1 = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. *În particular, pentru* $\alpha = 1$, *obţinem un vector propriu corespunzător valorii proprii* $\lambda_1 = 1$, *chiar pe* $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$.

3) Fie V *un spaţiu vectorial peste* $\mathbf{R}$ *şi* $f \in End(V)$ *care în raport cu baza* $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ *a lui* V *are matricea* $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. *Întrucât polinomul caracteristic asociat lui* f, $P_f(\lambda) = (2-\lambda)^2 + 20$, *nu are rădăcini reale rezultă că* f *nu are valori proprii şi nici vectori proprii.*

4) Fie V *un spaţiu vectorial real şi* $f \in End(\mathbf{R})$ *care în raport cu baza* $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4\}$ *a lui* V *are ecuaţiile*

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + 2x^3 - x^4 \\ y^2 = x^2 + 4x^3 - 2x^4 \\ y^3 = 2x^1 - x^2 + x^4 \\ y^4 = 2x^1 - x^2 - x^3 + 2x^4 \end{cases}.$$

Pentru a determina valorile proprii şi vectorii proprii pentru f să scriem mai întâi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ (vezi $\widetilde{f(\overline{x})}_{\mathcal{B}} = A\widetilde{x}_{\mathcal{B}}$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $\det(A-\lambda I_4) = 0$ *înseamnă* $(\lambda-1)^4 = 0$. *Rezultă* $\lambda_{1,2,3,4} = 1$ *valoare proprie multiplă de ordinul 4. Sistemul liniar omogen care dă vectorii proprii asociaţi valorii proprii 1 este* $\left\{(A - I_4)\widetilde{x} = \widetilde{0}\right.$, *adică* $\begin{cases} 2x^3 - x^4 = 0 \\ 4x^3 - 2x^4 = 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$. *Dacă alegem drept ecuaţii principale prima ecuaţie şi a treia ecuaţie şi notăm* $x^1 = \alpha$, $x^2 = \beta$ *obţinem* $x^3 = -2\alpha+\beta$, $x^4 = -4\alpha+2\beta$. *Prin urmare un vector propriu asociat valorii proprii* $\lambda = 1$ *este de forma* $\overline{u}_1 = \alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2 + (-2\alpha+\beta)\overline{a}_3 + (-4\alpha+2\beta)\overline{a}_4$, *unde* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *cu* $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. *În particular, pentru* $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *şi* $\alpha = 0$, $\beta = 1$ *avem vectorii proprii* $\overline{v}_1 = \overline{a}_1 + (-2)\overline{a}_3 + (-4)\overline{a}_4$, *respectiv* $\overline{v}_2 = \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + 2\overline{a}_4$. *De fapt, orice vector propriu al lui* f *este o combinaţie liniară nenulă de* $\overline{v}_1$ *şi* $\overline{v}_2$.

2.8 Endomorfisme diagonalizabile

Fie V un spaţiu vectorial peste K, cu $\dim V = n$ şi $f \in End(V)$.

Definiţia 2.8.1 *Dacă λ este o valoare proprie a lui f, atunci subspaţiul vectorial* $V_\lambda \overset{not}{=} \{\overline{x} \in V | f(\overline{x}) = \lambda\overline{x}\} = Ker(f - \lambda 1_V)$ *se numeşte* ***subspaţiul propriu*** *corespunzător valorii proprii λ.*

Se observă că subspaţiul propriu V_λ este format din *toţi* vectorii proprii asociaţi valorii proprii λ la care se adaugă vectorul nul al spaţiului V.

Exemplul 2.8.1 *Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$ din exemplul 4 de la finalul secţiunii precedente este* $V_1 = \{\overline{x} \in V | \exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *astfel ca* $\overline{x} = \alpha\overline{v}_1 + \beta\overline{v}_2\} = L(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$.

Observaţia 2.8.1 *Subspaţiul propriu V_λ asociat unei valori proprii λ a lui f este invariant faţă de f (verificarea - temă!).*

Propoziţia 2.8.1 *Fie λ_0 o valoare proprie a operatorului liniar f, multiplă cu ordinul p (ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice). Atunci,* $\dim V_{\lambda_0} \leq p$.

Demonstraţie. Este clar că $1 \leq p \leq n$. Dacă $m = \dim V_{\lambda_0}$ putem alege

în V o bază $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m, \overline{a}_{m+1}, \ldots, \overline{a}_n\}$ astfel ca $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\}$ să fie o bază a lui V_{λ_0}. Atunci, din $f(\overline{a}_i) = \lambda_0 \overline{a}_i$, pentru $i = \overline{1,m}$ şi $f(\overline{a}_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_j^k \overline{a}_k + \sum\limits_{k=m+1}^{n} \alpha_j^k \overline{a}_k$ pentru $j = \overline{m+1,n}$, rezultă că matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m+1}^1 & \alpha_{m+2}^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \alpha_{m+1}^2 & \alpha_{m+2}^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \alpha_{m+1}^m & \alpha_{m+2}^m & \cdots & \alpha_n^m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m+1}^{m+1} & \alpha_{m+2}^{m+1} & \cdots & \alpha_n^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m+1}^n & \alpha_{m+2}^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Atunci, polinomul caracteristic este

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{m+1}^{m+1} - \lambda & \cdots & \alpha_n^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m+1}^n & \cdots & \alpha_n^n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Prin urmare ordinul rădăcinii λ_0 este cel puţin m, întrucât polinomul în λ care se obţine prin calculul determinantului din membrul drept al relaţiei de mai sus poate să conţină factorul $\lambda - \lambda_0$. Deci, $p \geq m$. ■

Corolarul 2.8.1 *Dacă valoarea proprie λ_0 este simplă, atunci* $\dim V_{\lambda_0} = 1$.

Propoziţia 2.8.2 *Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Fie λ_1, λ_2, ..., λ_m valori proprii distincte ale lui f şi $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_m$ vectori proprii corespunzători ($f(\overline{v}_i) = \lambda_i \overline{v}_i$, $\forall i = \overline{1,m}$). Vom demonstra propoziţia folosind metoda inducţiei matematice după $m \geq 1$.

Etapa I (Verificarea): Dacă $m = 1$, atunci sistemul $\{\overline{v}_1\}$ este liniar independent deoarece $\overline{v}_1 \neq \overline{0}$.

Etapa a II-a (Demonstraţia): Presupunem că afirmaţia este adevarată pentru orice r vectori proprii asociaţi la r valori proprii distincte şi demonstrăm că aceasta are loc şi pentru $r+1$ vectori proprii asociaţi la $r+1$ valori proprii distincte.

În acest scop, fie $\alpha^1 \overline{v}_1 + \cdots + \alpha^r \overline{v}_r + \alpha^{r+1} \overline{v}_{r+1} = \overline{0}$, cu α^1, ..., α^r, $\alpha^{r+1} \in K$.

Aplicând operatorul f în ambii membrii ai egalităţii avem $\alpha^1 f(\overline{v}_1) + \cdots + \alpha^r f(\overline{v}_r) + \alpha^{r+1} f(\overline{v}_{r+1}) = \overline{0}$.

Dar $f(\overline{v}_i) = \lambda_i \overline{v}_i$, $\forall i = \overline{1, r+1}$ şi atunci avem

$$\alpha^1 \lambda_1 \overline{v}_1 + \cdots + \alpha^r \lambda_r \overline{v}_r + \alpha^{r+1} \lambda_{r+1} \overline{v}_{r+1} = \overline{0}. \qquad (*)$$

Pe de altă parte, din $\alpha^1\overline{v}_1 + \cdots + \alpha^r\overline{v}_r + \alpha^{r+1}\overline{v}_{r+1} = \overline{0}$ rezultă

$$\alpha^1(-\lambda_{r+1})\overline{v}_1 + \cdots + \alpha^r(-\lambda_{r+1})\overline{v}_r + \alpha^{r+1}(-\lambda_{r+1})\overline{v}_{r+1} = \overline{0}. \qquad (**)$$

Adunând relaţiile (*) şi (**) obţinem

$$\alpha^1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\overline{v}_1 + \cdots + \alpha^r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\overline{v}_r = \overline{0}.$$

Dar, conform ipotezei de inducţie, vectorii $\overline{v}_1$, ..., $\overline{v}_r$ sunt liniar independenţi şi atunci $\alpha^i(\lambda_i - \lambda_{r+1}) = 0$, pentru orice $i = \overline{1,r}$. Cum $\lambda_i \neq \lambda_{r+1}$, $\forall\ i = \overline{1,r}$, rezultă $\alpha^1 = \cdots = \alpha^r = 0$ şi atunci $\alpha^{r+1}\overline{v}_{r+1} = \overline{0}$, de unde $\alpha^{r+1} = 0$, deoarece $\overline{v}_{r+1} \neq \overline{0}$. Deci $\alpha^1 = \cdots = \alpha^r = \alpha^{r+1} = 0$ şi astfel avem că $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_{r+1}$ sunt liniar independenţi. ■

Corolarul 2.8.2 *Dacă V este un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune n, iar ecuaţia caracteristică a lui $f \in End(V)$ are n rădăcini distincte în K, λ_1, λ_2, ..., λ_n, cu $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_n$ vectori proprii corespunzători, atunci sistemul $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ este o bază pentru V. Mai mult, matricea lui f în raport cu această bază este matricea diagonală*

$$D \overset{not}{=} diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definiţia 2.8.2 *Spunem că endomorfismul $f \in End(V)$ este **diagonalizabil** dacă există o bază $\mathcal{B}$ a lui V în raport cu care matricea sa are forma diagonală.*

Exemplul 2.8.2 *Endomorfismul $f \in End(\mathbf{R}^2)$ din exemplul 1 din secţiunea precedentă este diagonalizabil deoarece matricea sa relativ la baza formată din vectori proprii, $\{\overline{v}_1 = (1,2), \overline{v}_1 = (2,1)\}$, este $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, adică este o matrice diagonală.*

Acum rezultă în mod clar:

Teorema 2.8.1 *Condiţia necesară şi suficientă ca matricea lui $f \in End(V)$ să aibă forma diagonală relativ la baza $\mathcal{B}$ este ca toţi vectorii din $\mathcal{B}$ să fie vectori proprii ai lui f.*

Teorema 2.8.2 *Condiţia necesară şi suficientă ca $f \in End(V)$ să fie diagonalizabil este ca ecuaţia caracteristică să aibă n rădăcini în K şi subspaţiile proprii corespunzătoare să aibă dimensiunile egale cu multiplicităţile rădăcinilor.*

Demonstraţie. Dacă f este diagonalizabil, atunci să considerăm $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$

o bază a lui V în raport cu care matricea lui f are forma diagonală. Dacă primele m_1 elemente de pe diagonala principală sunt egale cu λ_1, urmatoarele m_2 cu λ_2, ..., ultimele m_k sunt egale cu λ_k, cu $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$, atunci polinomul caracteristic al lui f este

$$P_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}.$$

Evident, rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt λ_1, λ_2, ..., $\lambda_k \in K$, cu ordinele de multiplicitate m_1, m_2, ..., respectiv m_k.

Dar, din definiţia matricei A, avem $f(\overline{a}_i) = \lambda_1 \overline{a}_i$, oricare ar fi $i = \overline{1, m_1}$. Prin urmare λ_1 este valoare proprie a lui f, multiplă de ordin m_1. Mai mult, subspaţiul V_{λ_1} conţine m_1 vectori proprii liniar independenţi, $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_{m_1}$ şi atunci $\dim V_{\lambda_1} \geq m_1$. Cum $\dim V_{\lambda_1} \leq m_1$, rezultă că $\dim V_{\lambda_1} = m_1$.

Analog se arată că $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, pentru toţi $i = \overline{2, k}$.

Reciproc, dacă avem că toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice a lui f sunt în K şi subspaţiile proprii corespunzătoare au dimensiunile egale cu multiplicităţile rădăcinilor, atunci vom arăta că se poate construi o bază în V în raport cu care matricea lui f are forma diagonală.

Fie λ_1, λ_2, ..., $\lambda_k \in K$ valorile proprii ale lui f, cu ordinele de multiplicitate m_1, m_2, ..., respectiv m_k $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n)$. Ştim că $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, pentru toţi $i = \overline{1, k}$. Dacă considerăm vectorii $\overline{b}_1$, ..., $\overline{b}_{m_1}$, $\overline{b}_{m_1+1}$, ..., $\overline{b}_{m_1+m_2}$, ..., $\overline{b}_{m_1+\cdots+m_{k-1}}$, ..., $\overline{b}_n$ astfel încât primii m_1 să formeze o bază pentru V_{λ_1}, următorii m_2 să formeze o bază pentru V_{λ_2}, ..., ultimii m_k să formeze o bază pentru V_{λ_k}, atunci arătăm că $\overline{b}_1$, ..., $\overline{b}_n$ sunt liniar independenţi.

Într-adevăr, dacă considerăm $\alpha^1 \overline{b}_1 + \cdots + \alpha^n \overline{b}_n = \overline{0}$ atunci, notând cu $\overline{v}_1$ suma primilor m_1 termeni, cu $\overline{v}_2$ suma urmatorilor m_2 termeni, ..., cu $\overline{v}_k$ suma ultimilor m_k termeni (evident $\overline{v}_i \in V_{\lambda_i}$, $\forall i = \overline{1, k}$), obţinem $\overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_k = \overline{0}$. Acum, dacă presupunem că un număr de p $(1 \leq p \leq k)$ vectori dintre vectorii $\overline{v}_1$, ..., $\overline{v}_k$ ar fi nenuli, atunci am obţine o combinaţie liniară nulă (în care nu toţi scalarii sunt nuli, mai precis sunt egali cu 1) de vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte. Contradicţie cu faptul că la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenţi. Prin urmare, $\overline{v}_i = \overline{0}$, pentru toţi $i = \overline{1, k}$.

Din $\overline{v}_1 = \overline{0}$, adică $\alpha^1 \overline{b}_1 + \cdots + \alpha^{m_1} \overline{b}_{m_1} = \overline{0}$, rezultă $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{m_1} = 0$ deoarece $\overline{b}_1$, ..., $\overline{b}_{m_1}$ sunt liniar independenţi. Analog, obţinem că toţi scalarii α^j, $j = \overline{1, n}$, sunt nuli. Deci, $\overline{b}_1$, ..., $\overline{b}_n$ sunt liniar independenţi şi chiar sunt bază pentru V, deoarece $\dim V = n$.

În final, să remarcăm că matricea lui f în raport cu această bază este matricea diagonală

$$D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k),$$

unde λ_1 apare de m_1 ori, λ_2 de m_2 ori, ..., λ_k apare de m_k ori. ■

Exemplul 2.8.3 *1) Endomorfismul f al lui $\mathbf{R}^2$ din exemplul 3) din secţiunea precedentă nu este diagonalizabil, pentru ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice nu sunt reale.*

2) Fie operatorul liniar $f \in End(V)$ care în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a stabili dacă f este diagonalizabil sau nu trebuie să determinăm, mai întâi, valorile proprii şi vectorii proprii ai lui f.

Polinomul caracteristic $P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda+1)^3$ are rădăcina triplă $\lambda_{1,2,3} = -1$.

Vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = -1$ sunt daţi de sistemul liniar omogen $\left\{(A-(-1)I_3)\widetilde{x} = \widetilde{0}\right.$, adică $\begin{cases} 3x^1 - x^2 + 2x^3 = 0 \\ 5x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0 \\ -x^1 - x^3 = 0 \end{cases}$. Obţinem soluţia $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ şi astfel un vector propriu asociat valorii proprii triple $\lambda = -1$ este forma $\overline{u}_1 = (-\alpha, -\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Subspaţiul propriu corespunzător lui $\lambda = -1$ este $V_{-1} = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbf{R}\} = L(\overline{v}_1)$, unde $\overline{v}_1 = (-1, -1, 1)$. Deci $\dim V_{-1} = 1 < 3 =$ordinul rădăcinii $\lambda = -1$ şi atunci f nu este diagonalizabil.

3) Fie $f \in End(\mathbf{R}^4)$ care relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvând ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_4) = 0$ avem valorile proprii simple $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$. Atunci f este diagonalizabil şi baza relativ la care f are matricea diagonală

$$D \overset{not}{=} diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

este formată cu $\overline{v}_1 = (1, -1, -1, 1)$, $\overline{v}_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $\overline{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\overline{v}_4 = (-1, -1, 1, 1)$, vectori proprii corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2, λ_3, respectiv λ_4.

Ţinând cont de cele de mai sus şi de teoria sistemelor de ecuaţii liniare, avem următorul rezultat foarte util în aplicaţii:

Observaţia 2.8.2 *Dacă λ_0 este o valoare proprie a lui $f \in End(V)$, atunci $\dim V_{\lambda_0} = n - rang(A - \lambda_0 I_n)$, unde $n = \dim V$ şi A este matricea lui f relativ la o bază a lui V.*

Dacă λ_0 este o valoare proprie a lui f, atunci $\dim V_{\lambda_0}$ se numeşte **multiplicitatea geometrică** a valorii proprii λ_0.

Exemplul 2.8.4 *Fie V un spaţiu vectorial real şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ o bază a sa. Dacă endomorfismul $f : V \to V$ are, în raport cu baza $\mathcal{B}$, ecuaţiile:*

$$\begin{cases} y^1 &= x^1 + x^3 \\ y^2 &= x^2 + x^4 \\ y^3 &= x^1 + x^3 \\ y^4 &= x^2 + x^4 \end{cases}.$$

Se cere: a) găsiţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$;
b) găsiţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{a}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 + \bar{e}_4, \bar{a}_4 = \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$;
c) găsiţi ecuaţiile operatorului liniar f în raport cu baza $\mathcal{B}$;
d) determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
e) găsiţi valorile şi vectorii proprii pentru f;
f) verificaţi dacă există o bază a lui V în raport cu care matricea lui f să aibă forma diagonală;
g) calculaţi A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

Rezolvare:

a) Deoarece $f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $f(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 + \bar{e}_4$, $f(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $f(\bar{e}_4) = \bar{e}_2 + \bar{e}_4$ matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi atunci matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}'$ este dată de formula $B = C^{-1}AC$. Pentru a găsi inversa matricei C procedăm ca în liceu şi gasim $C^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci, se obţine $B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 7/4 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 5/4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Ecuaţiile lui f relativ la baza $\mathcal{B}'$ sunt

$$\begin{cases} z^1 &= t^1 + \frac{1}{2}t^2 - t^3 \\ z^2 &= \frac{1}{2}t^1 + \frac{7}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + t^4 \\ z^3 &= -\frac{1}{2}t^1 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ z^4 &= -\frac{1}{2}t^1 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{3}{2}t^3 + t^4 \end{cases},$$

unde $\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$ *şi* $\widetilde{f(\bar{x})}_{\mathcal{B}'} = B\tilde{x}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix}$.

d) $Ker\,f$ *este mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen* $A\tilde{x}_{\mathcal{B}} = \tilde{0}$, *adică*

$$\begin{cases} x^1 + x^3 &= 0 \\ x^2 + x^4 &= 0 \\ x^1 + x^3 &= 0 \\ x^2 + x^4 &= 0 \end{cases},$$

sistem care are soluţia generală $x^1 = -\alpha, x^2 = -\beta, x^3 = \alpha, x^4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Atunci,* $\dim Kerf = \dim V - rang\,A = 2$, *defectul lui* f *şi* $Kerf = \{-\alpha\bar{e}_1 - \beta\bar{e}_2 + \alpha\bar{e}_3 + \beta\bar{e}_4 | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = \{\alpha(\bar{e}_3 - \bar{e}_1) + \beta(\bar{e}_4 - \bar{e}_2) | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$, *unde* $\bar{b}_1 = \bar{e}_3 - \bar{e}_1$ *şi* $\bar{b}_2 = \bar{e}_4 - \bar{e}_2$. *Evident că* $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ *este o bază a lui* $Ker\,f$.
$Im\,f$ *are dimensiunea egală cu rangul matricii* A, *adică* $\dim Imf = 2$ *şi* $Imf = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in V\} = \{(x^1 + x^3)(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) + (x^2 + x^4)(\bar{e}_2 + \bar{e}_4) | x^i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,4}\} = L(\bar{b}_3, \bar{b}_4)$, *unde* $\bar{b}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $\bar{b}_4 = \bar{e}_2 + \bar{e}_4$. *Deci,* $\{\bar{b}_3, \bar{b}_4\}$ *este o bază pentru* $Im\,f$.
Observaţie: *Dacă* $\{\bar{b}_i | i = \overline{1,4}\}$ *este un sistem liniar independent, atunci* $Ker\,f \oplus Im\,f = V$.
e)

$$\det(A - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow [(1-\lambda)^2 - 1]^2 = 0$ *şi astfel există două valori proprii reale duble* $\lambda_{1,2} = 0$ *şi* $\lambda_{3,4} = 2$.

Pentru $\lambda_{1,2} = 0$, *avem* $(A - 0 \cdot I_4)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\tilde{x}_{\mathcal{B}} = \tilde{0}$ *şi prin urmare subspaţiul propriu asociat valorii proprii duble* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *este* $V_0 = Ker\,f = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. *Deci,* $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ *sunt doi vectori proprii, corespunzători valorii proprii* 0, *care formează bază pentru* V_0.

Pentru $\lambda_{3,4} = 2$, *avem* $(A - 2 \cdot I_4)\tilde{x}_{\mathcal{B}} = \tilde{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^1 + x^3 &= 0 \\ -x^2 + x^4 &= 0 \\ x^1 - x^3 &= 0 \\ x^2 - x^4 &= 0 \end{cases}$ *şi astfel un vector propriu corespunzător valorii proprii* 2 *este de forma* $\bar{v} = \alpha(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) + \beta(\bar{e}_2 = \bar{e}_4)$.
Deci, subspaţiul propriu asociat lui $\lambda_{3,4} = 2$ *este* $V_2 = L(\bar{b}_3, \bar{b}_4) = Im\,f$.
f) Deoarece cele patru valori proprii $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2$ *sunt reale şi multiplicităţile algebrice şi geometrice sunt egale* ($m_{alg}(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 2$, $i = \overline{1,4}$), *rezultă că operatorul* f *este diagonalizabil. Adică, există o bază* $\mathcal{B}^*$ *a lui* V, *formată cu vectorii proprii* $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4$, *relativ la care matricea lui* f *are*

forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g) Dacă $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *este matricea de trecere de la baza* $\mathcal{B}$ *la baza* $\mathcal{B}^*$ *atunci se ştie că* $D = L^{-1}AL$ *şi astfel* $A = LDL^{-1}$ *. Prin urmare* $A^n = (LDL^{-1})^n = (LDL^{-1})(LDL^{-1})\cdots(LDL^{-1}) = LD^nL^{-1}$.

Evident, $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$ *. Inversa matricii* L *este* $L^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *şi atunci se obţine*

$$A^n = LD^nL^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

2.9 Probleme propuse spre rezolvare

1. În $\mathbf{R}^4$ se consideră baza $\mathcal{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$, unde $\bar{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\bar{a}_2 = (1,1,1,0)$, $\bar{a}_3 = (0,1,1,1)$, $\bar{a}_4 = (0,0,1,1)$ şi operatorul liniar $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, care relativ la baza $\mathcal{B}$ are matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
   b) Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f ;
   c) Este operatorul f diagonalizabil? Dacă este diagonalizabil, găsiţi baza lui $\mathbf{R}^4$ în raport cu care matricea f are forma diagonală, precum şi forma diagonală a matricei lui f .

2. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{K}$, şi $f \in End(V)$, $f \neq \mathbf{O}_V$, $f \neq \mathbf{1}_V$, astfel încât $f^2 = f$. Să se arate că valorile proprii ale morfismului f sunt 0 şi 1.

3. Fie V un spaţiu vectorial real şi $f \in End(V)$, $f \neq \mathbf{1}_V$, $f \neq -\mathbf{1}_V$, astfel încât $f \circ f = \mathbf{1}_V$.

a) Determinaţi valorile proprii pentru endomorfismul f;
b) Arătaţi că $Ker\,(f - \mathbf{1}_V) \oplus Ker\,(f + \mathbf{1}_V) = V$.

4. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbf{K}$, şi $f \in End(V)$. Dacă f este inversabil, $\overline{x}$ vector propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ, atunci $\overline{x}$ este vector propriu al lui f^{-1} corespunzător valorii proprii $\frac{1}{\lambda}$.

5. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi f, g două automorfisme ale lui V. Arătaţi că automorfismele $f \circ g$ şi $g \circ f$ au aceleaşi valori proprii.

6. Fie V un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K şi f un endomorfism al lui V. Se fac notaţiile $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ..., $f^n = f^{n-1} \circ f$. Arătaţi că au loc afirmaţiile:

   a) dacă $m \leq n$, atunci $Ker\ f^m \subseteq Ker\ f^n$;

   b) dacă există $p \geq 1$ astfel ca $Ker\ f^{n+p} = Ker\ f^n$ pentru un $n \geq 1$, fixat arbitrar, atunci $Ker\ f^{n+p} = Ker\ f^n$ are loc pentru orice $p \geq 1$;

   c) $Ker\ f^n \cap Im\ f^n = \{\overline{0}\} \Leftrightarrow Ker\ f^{n+1} = Ker\ f^n$, pentru orice $n \geq 1$;

   d) dacă $\dim V < \infty$, atunci există un număr natural $r \leq \dim V$ astfel ca $Ker\ f^r = Ker\ f^{r+1}$;

   e) dacă $\dim E < \infty$, atunci există un număr natural $r \leq \dim V$ astfel ca $V = Ker\ f^r \oplus Im\ f^r$.

7. Fie $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^2$ spaţiile vectoriale aritmetice reale dotate cu bazele canonice $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, respectiv $\mathcal{B}_2 = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, dată prin

   $f(\overline{e}_1) = \overline{e}'_1 + \overline{e}'_2$, $f(\overline{e}_2) = 2\overline{e}'_1 - 5\overline{e}'_2$, $f(\overline{e}_3) = \overline{e}'_1 + \sqrt{2}\overline{e}'_2$.

   a) Scrieţi matricea lui f relativ la bazele $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$;

   b) Dacă $\overline{x} = (1, 1, 2)$, atunci găsiţi vectorul $f(\overline{x})$;

   c) Este adevărat că $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbf{R}^3$? Justificaţi răspunsul.

8. Fie V un spaţiu vectorial real cu baza $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ şi $f \in End(V)$ astfel încât $-1, 0, 1$ să fie valori proprii ale lui f şi $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ să fie vectori proprii ai lui f corespunzători valorilor proprii -1, 0, respectiv 1. Găsiţi matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$.

9. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, atunci se cer:

   a) determinaţi $f^{-1}(\{\overline{a}\})$, unde $\overline{a} = (1, 2, 1)$;

   b) determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Kerf$ şi Imf;

   c) este f un endomorfism diagonalizabil? Justificaţi răspunsul.

10. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ o aplicaţie liniară a cărei matrice în raport cu bazele canonice din $\mathbf{R}^3$ şi $\mathbf{R}^4$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinaţi rangul şi defectul aplicaţiei f;

b) Precizaţi câte o bază pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

c) Determinaţi o bază şi dimensiunea pentru subspaţiul $f(V)$, unde

$$V = \{\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 - x^2 + 2x^3 = 0\}.$$

11. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(\overline{x}) = (x^1 + x^2 - x^3, 2x^1 + 2x^2 - 2x^3, -x^1 - x^2 + x^3)$, oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$. Se cer:

a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară;

b) Determinaţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

c) Este adevărat că $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbf{R}^3$? Justificare;

d) Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii pentru f;

e) Este f un endomorfism diagonalizabil? In caz afirmativ, determinaţi forma diagonală a matricii lui f şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are forma diagonală.

12. Fie $f \in End(\mathbf{R}^3)$ care, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, are ecuaţiile:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2 \\ y^2 = x^2 + x^3 \\ y^1 = x^1 + x^3 \end{cases}$$

a) Stabiliţi că f este automorfism al lui $\mathbf{R}^3$;

b) Determinaţi o bază şi dimensiunea subspaţiului $f(V)$, unde $V = \left\{\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 + x^2 - x^3 = 0\right\}$;

c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificaţi răspunsul.

13. Fie $f \in End(K^3)$, care relativ la baza canonică a spaţiului vectorial aritmetic K^3 are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Studiaţi dacă f este diagonalizabil şi găsiţi forma diagonală a matricii lui f, precum şi baza relativ la care f are acea matrice diagonală, dacă: a) $K = \mathbf{R}$; b) $K = \mathbf{C}$.

14. Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru nucleul şi imaginea aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ pentru care $f(\overline{a}) = \overline{b}$, $f(\overline{b}) = \overline{c}$, $f(\overline{c}) = \overline{a}$, unde $\overline{a} = (1, 0, 1)$, $\overline{b} = (0, 1, 1)$, $\overline{c} = (1, 1, 0)$.

15. Se dau subspaţiile lui $\mathbf{R}^3$

    $V_1 = \left\{\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3 | x^1 + x^2 + x^3 = 0\right\}$,

    $V_2 = \{(0, \alpha, 0) | \alpha \in \mathbf{R}\}$.

    Să se determine $f \in End(\mathbf{R}^3)$ astfel ca $Ker\ f = V_1$ şi $Im\ f = V_2$. Este f unic determinată? Justificaţi răspunsul.

16. Fie V un spaţiu vectorial real 2-dimensional. Să se determine toate endomorfismele f ale lui V cu proprietatea că $f \circ f = \mathbf{0}_V$.

Capitolul 3

Forme biliniare. Forme pătratice

3.1 Noţiunea de formă biliniară. Matricea şi rangul unei forme biliniare

Fie V un spaţiu vectorial peste K.

Definiţia 3.1.1 *O aplicaţie $b : V \times V \to K$ care este liniară în fiecare argument, adică verifică condiţiile*
i) $b(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \overline{z}) = \alpha b(\overline{x}, \overline{z}) + \beta b(\overline{y}, \overline{z})$, $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$,
ii) $b(\overline{z}, \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha b(\overline{z}, \overline{x}) + \beta b(\overline{z}, \overline{y})$, $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$,
*se numeşte **formă biliniară** pe V.*

Propoziţia 3.1.1 *Dacă b este o formă biliniară pe V, atunci*
i) $b(\overline{0}, \overline{y}) = 0$, $\forall \overline{y} \in V$ şi $b(\overline{x}, \overline{0}) = 0$, $\forall \overline{x} \in V$;
ii) $b\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i, \sum\limits_{j=1}^{m} y^j \overline{b}_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x^i y^j b(\overline{a}_i, \overline{b}_j)$, $\forall m, n \in N^*$, $\forall \overline{a}_1, ..., \overline{a}_n, \overline{b}_1, ..., \overline{b}_m \in V$.

Demonstraţie. Se foloseşte liniaritatea în fiecare argument. ■

Exemplul 3.1.1 *1) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice din $M_n(K)$, fixată arbitrar. Aplicaţia $b : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definită prin $b(\overline{x}, \overline{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j$, pentru orice $\overline{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, $\overline{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$, este o formă biliniară pe $\mathbf{R}^n$.*

2) Fie spaţiul vectorial real infinit dimensional $\mathcal{R}([a, b])$ al funcţiilor reale definite pe intervalul real $[a, b]$, care sunt integrabile Riemann. Aplicaţia

$b : \mathcal{R}([a,b]) \times \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbf{R}$ definită prin $b(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, $\forall f,\ g \in \mathcal{R}([a,b])$ este o forma biliniară pe $\mathcal{R}([a,b])$.

Definiţia 3.1.2 *Spunem că forma biliniară b este* ***simetrică*** *dacă $b(\overline{x},\overline{y}) = b(\overline{y},\overline{x})$, $\forall \overline{x},\ \overline{y} \in V$. Dacă $b(\overline{x},\overline{y}) = -b(\overline{y},\overline{x})$, $\forall \overline{x},\ \overline{y} \in V$, atunci spunem că forma biliniară b este* ***antisimetrică****.*

Exemplul 3.1.2 *1) Forma biliniară din exemplul 2) de mai sus este simetrică.*

2) În exemplul 1) de mai sus dacă matricea A este simetrică (respectiv antisimetrică) atunci forma biliniară b este simetrică (respectiv antisimetrică).

3) Forma biliniară $b : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin $b(\overline{x},\overline{y}) = -x^2y^1 + x^1y^2$, pentru orice $\overline{x} = (x^1,x^2)$, $\overline{y} = (y^1,y^2) \in \mathbf{R}^2$ este antisimetrică.

Dacă spaţiul vectorial V este n-dimensional şi fixăm o bază $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n\}$ a sa, atunci oricare ar fi o formă biliniară $b : V \times V \to K$ avem

$$b(\overline{x},\overline{y}) = b(\sum_{i=1}^n x^i\overline{a}_i, \sum_{j=1}^n y^j\overline{a}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x^iy^j b(\overline{a}_i,\overline{a}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x^iy^j a_{ij},$$

$\forall \overline{x} = \sum_{i=1}^n x^i\overline{a}_i, \overline{y} = \sum_{j=1}^n y^j\overline{a}_j \in V$, unde $a_{ij} = b(\overline{a}_i,\overline{a}_j)$, pentru orice $i,j = \overline{1,n}$.

Egalitatea

$$b(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x^iy^j a_{ij}, \tag{1}$$

se numeşte **expresia analitică** a formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$, iar matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ se numeşte **matricea** formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$.

Se verifică uşor ca relaţia (1) se poate scrie uşor sub **forma matriceală**

$$b(\overline{x},\overline{y}) = \widetilde{x}^t A\widetilde{y}. \tag{2}$$

Observaţia 3.1.1 *O formă biliniară b definită pe spaţiul vectorial n-dimensional V este complet determinată dacă se cunosc valorile sale pe vectorii unei baze din V.*

Propoziţia 3.1.2 *O formă biliniară b definită pe spaţiul vectorial n-dimensional V este simetrică (respectiv antisimetrică) dacă şi numai dacă matricea sa în raport cu o bază a lui V este simetrică (respectiv antisimetrică).*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a lui V şi $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(K)$ matricea lui b în raport cu aceasta bază. Dacă b este simetrică atunci avem $a_{ij} = b(\overline{a}_i, \overline{a}_j) = b(\overline{a}_j, \overline{a}_i) = a_{ji}$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$. Prin urmare, A este matrice simetrică.

Reciproc, dacă A este simetrică (adică $A = A^t$) atunci avem $b(\overline{x}, \overline{y}) = (b(\overline{x}, \overline{y}))^t = (\widetilde{x}^t A \widetilde{y})^t = \widetilde{y}^t A^t \widetilde{x} = b(\overline{y}, \overline{x})$, pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in V$, adică b este simetrică.

La fel pentru cazul antisimetric. ■

În continuare, dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea formei biliniare b faţă de baza $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$, iar $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea lui b faţă de altă baza $\mathcal{B}_1 = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}$ a lui V şi $C = (c_i^j)_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}_1$, adică $\overline{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_i^j \overline{a}_j$, $1 \leq i \leq n$, atunci ne propunem să stabilim legătura dintre A si B.

Ţinând cont că $b_{ij} = b(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = b\left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_i^k \overline{a}_k, \sum\limits_{l=1}^{n} c_j^l \overline{a}_l\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} c_i^k c_j^l b(\overline{a}_k, \overline{a}_l) = \\ = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} c_i^k c_j^l a_{kl}$, oricare ar fi i, $j = \overline{1,n}$, rezultă că

$$B = C^t A C. \tag{3}$$

Egalitatea (3) arată că *rangul matricei unei forme biliniare nu se schimbă la schimbarea bazei*, deşi matricea se modifică.

Definiţia 3.1.3 *Se numeşte **rang** al formei biliniare b rangul matricei sale în raport cu bază al lui V.*

Exemplul 3.1.3 *Fie forma biliniară $b : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin $b(\overline{x}, \overline{y}) = x^1y^1 + x^2y^1 + x^1y^2 + x^2y^2$, pentru orice $\overline{x} = (x^1, x^2)$, $\overline{y} = (y^1, y^2) \in \mathbf{R}^2$. Deoarece matricea lui b relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rezultă că rangul lui b este 1.*

3.2 Noţiunea de formă pătratică. Forma canonică a unei forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi b o forma biliniară simetrică pe V.

Definiţia 3.2.1 *Aplicaţia $f : V \to K$ definită prin $f(\overline{x}) = b(\overline{x}, \overline{x})$, oricare ar fi $\overline{x} \in V$ se numeşte **formă pătratică** pe V.*

Este clar că o formă pătratică este unic determinată de o formă biliniară simetrică, care o defineşte. Este valabil şi invers.

Propoziţia 3.2.1 *Forma biliniară simetrică b este unic determinată de forma pătratică f.*

Demonstraţie. Din definiţia lui f avem că $f(\overline{x}+\overline{y}) = b(\overline{x}+\overline{y}, \overline{x}+\overline{y}) = b(\overline{x}, \overline{x}) + b(\overline{x}, \overline{y}) + b(\overline{y}, \overline{x}) + b(\overline{y}, \overline{y})$, pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in V$. Atunci, obţinem

$$b(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\overline{x}+\overline{y}) - f(\overline{x}) - f(\overline{y})\right), \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in V. \tag{4}$$

■

Forma biliniară simetrică b din care provine forma pătratică f se numeşte **polara** lui f.

Observaţia 3.2.1 *Dacă b este o formă biliniară oarecare pe V, atunci aplicaţia $f : V \to K$ definită prin $f(\overline{x}) = b(\overline{x}, \overline{x})$, oricare ar fi $\overline{x} \in V$ este tot o formă pătratică pe V, pentru că lui b îi putem asocia, în mod natural, forma biliniară simetrică b_1 definită prin $b_1(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}\left(b(\overline{x}, \overline{y}) + b(\overline{y}, \overline{x})\right)$ şi se observă că $f(\overline{x}) = b_1(\overline{x}, \overline{x})$, pentru orice $\overline{x} \in V$ (adică f este o formă pătratică întrucât provine din forma biliniară simetrică b_1).*

Exerciţiul 3.2.1 *1) Arătaţi că orice formă biliniară b se poate scrie în mod unic ca suma dintre o formă biliniară simetrică b_1 şi una antisimetrică b_2, adică $b(\overline{x}, \overline{y}) = b_1(\overline{x}, \overline{y}) + b_2(\overline{x}, \overline{y})$, $\forall \overline{x}$, $\overline{y} \in V$.*

2) O formă biliniară b este antisimetrică dacă şi numai dacă $b(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $\forall \overline{x} \in V$.

Exemplul 3.2.1 *1) Forma pătratică asociată formei biliniare simetrice $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $b(\overline{x}, \overline{y}) = x^2y^1 + 2x^3y^1 + x^1y^2 + 3x^3y^2 + 2x^1y^3 + 3x^2y^3$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$, este $f(\overline{x}) = 2x^1x^2 + 6x^2x^3 + 4x^1x^3$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$,*

2) Polara formei pătratice $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definită prin $f(\overline{x}) = (x^1)^2 + 2x^1x^2$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$, este o formă biliniară simetrică $b : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definită prin $b(\overline{x}, \overline{y}) = x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2)$, $\overline{y} = (y^1, y^2) \in \mathbf{R}^2$,

Definiţia 3.2.2 *Se numeşte **matrice** a formei pătratice $f : V \to K$, în raport cu baza $\mathcal{B}$ a lui V, matricea polarei lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$.*

Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a lui V şi $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea lui f relativ la această bază. Atunci, **expresia analitică** a lui f relativ la baza $\mathcal{B}$ este

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^i x^j a_{ij}, \ \forall \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i \in V, \tag{1'}$$

iar **forma matriceală** este

$$f(\overline{x}) = \widetilde{x}^t A \widetilde{x}. \tag{2'}$$

Definiţia 3.2.3 *Prin **rangul** formei pătratice f înţelegem rangul matricei sale în raport cu o bază a lui V.*

Din cele expuse aici rezultă clar că expresia analitică sau matriceală a formei pătratice f depinde de alegerea bazei spaţiului vectorial n-dimensional V. Ne propunem să determinăm acele baze din V în raport cu care expresia analitică a lui f să fie cât mai simplă, mai precis să fie de tipul

$$f(\overline{x}) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 + \cdots + \lambda_n(y^n)^2, \tag{5}$$

unde y^1, y^2, ..., $y^n \in K$ sunt coordonatele lui $\overline{x}$ în raport acea bază din V faţă de care f are această expresie simplă, iar λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in K$.

Acest tip de expresie analitică din (5) se numeşte **formă canonică** a formei pătratice f. Scalarii λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in K$ din (5) se numesc **coeficienţii** formei canonice (5) a lui f.

Problema determinării unei forme canonice pentru o formă pătratică şi a bazei corespunzătoare ei se va aborda în următoarele două secţiuni în care se vor prezenta două metode de aducere la forma canonică (metoda lui Gauss şi metoda lui Jacobi). O a treia metodă (metoda transformărilor ortogonale sau metoda valorilor proprii şi vectorilor proprii) va fi prezentată la finalul următorului capitol.

3.3 Metoda lui Gauss de aducere la forma canonică a unei forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune n şi $f : V \to K$ o formă pătratică oarecare.

Teorema 3.3.1 *(Gauss) Există cel puţin o bază în V în raport cu care forma pătratică f are o formă canonică.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază a lui V, faţă de care f are expresia analitică $f(\overline{x}) = x^i x^j a_{ij}$, oricare ar fi $\overline{x} = x^i \overline{a}_i \in V$.

Dacă f este nulă, atunci este clar că f are formă canonică în raport cu orice bază a lui V. Prin urmare, vom presupune că f este nenulă, adică cel puţin un element al matricii $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este nenul. Mai mult, putem presupune că există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$. (În caz contrar, f fiind nenulă, există o pereche de indici (i, j), cu $i \neq j$, pentru care $a_{ij} \neq 0$. Dacă, de pildă $a_{12} \neq 0$, atunci făcând schimbarea de coordonate $x^1 = t^1 + t^2$, $x^2 = t^1 - t^2$, $x^3 = t^3$, ..., $x^n = t^n$ (adică, alegând o nouă bază) obţinem că forma pătratică f are, relativ la noua bază, expresia analitică $f(\overline{x}) = \alpha_{ij} t^i t^j$, cu $\alpha_{11} = 2a_{12} \neq 0$.)

Fără a micşora generalitatea, presupunem că $a_{11} \neq 0$. Grupând toţi termenii care conţin pe x^1 obţinem $f(\overline{x}) = a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + \cdots + 2a_{1n}x^1x^n + f_1(\overline{x}) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \cdots + a_{1n}x^n)^2 + \widetilde{f}_1(\overline{x})$, unde $f_1(\overline{x})$, $\widetilde{f}_1(\overline{x})$ sunt forme pătratice pe V care, în raport cu baza $\mathcal{B}$, nu conţin coordonata x^1.

Făcând schimbarea de coordonate $y^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \cdots + a_{1n}x^n$, $y^k = x^k$, $k = \overline{2, n}$ (adică trecând la o nouă bază în V), forma pătratică f are în raport cu noua bază expresia analitică

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{a_{11}}(y^1)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}y^iy^j.$$

Continuând procedeul şi cu forma pătratică $\widetilde{f}_1(\overline{x}) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} b_{ij}y^iy^j$, după un număr finit de paşi obţinem forma canonică (5).

În final, găsind legătura dintre coordonatele x^1, x^2, ..., x^n şi coordonatele y^1, y^2, ..., y^n, obţinem din baza $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{B}^*$ faţă de care f are forma canonică determinată (cu formula $\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = A\widetilde{x}_{\mathcal{B}^*}$). ■

Să remarcăm că baza relativ la care forma pătratică are o formă canonică *nu este unică*. Prin urmare există mai multe forme canonice pentru o formă pătratică. Mai mult, se observă ca metoda prezentată aici, numită **metoda lui Gauss** de aducere la forma canonică a unei forme pătratice, se poate aplica pentru orice formă pătratică, **fără nici o restricţie**.

Observaţia 3.3.1 *Matricea formei pătratice f în raport cu baza $\mathcal{B}^*$ (construită în teorema de mai sus, bază faţă de care f are forma canonică determinată) are forma diagonală $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, iar λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in K$ sunt coeficienţii formei canonice. Prin urmare, rangul lui f este chiar numărul coeficienţilor nenuli dintr-o formă canonică a lui f. Cum rangul lui f este invariant la schimbări de baze, rezultă că numărul coeficienţilor nenuli din orice formă canonică a lui f este acelaşi.*

Exemplul 3.3.1 *Fie forma pătratică $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, care în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$, are expresia analitică $f(\overline{x}) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 + x^2x^3$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$. Vom determina o formă canonică pentru f şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are această formă canonică prin metoda lui Gauss.*

Observând că există un termen cu $(x^i)^2$, mai precis $(x^1)^2$, vom grupa termenii care conţin pe x^1, adăugând termenii necesari, şi avem

$f(\overline{x}) = (x^1 + x^2)^2 - (x^2)^2 + x^2x^3 = (x^1 + x^2)^2 - (x^2 - \frac{1}{2}x^3)^2 + \frac{1}{4}(x^3)^2$.

Făcând schimbarea de coordonate $y^1 = x^1 + x^2$, $y^2 = x^2 - \frac{1}{2}x^3$, $y^3 = x^3$ obţinem că, în raport cu baza $\mathcal{B}^* = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$ faţă de care $\overline{x}$ are coordonatele y^1, y^2, y^3 date mai sus, forma pătratică f are forma canonică $f(\overline{x}) = (y^1)^2 - (y^2)^2 + \frac{1}{4}(y^3)^2$.

Matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}^*$ este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ *şi astfel rangul lui f este* 3.

Deoarece $x^3 = y^3,\ x^2 = y^2 + \frac{1}{2}y^3,\ x^1 = y^1 - y^2 - \frac{1}{2}y^3$ *rezultă* $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$. *Ţinând cont de formula de trecere de la baza* $\mathcal{B}$ *la baza* $\mathcal{B}^*$ *(*$\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = A\widetilde{x}_{\mathcal{B}^*}$*) avem* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Astfel, am determinat şi baza faţă de care* f *are forma canonică gasită,* $\mathcal{B}^* = \{\bar{b}_1 = (1,0,0), \bar{b}_2 = (-1,1,0), \bar{b}_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$.

Exemplul 3.3.2 *Fie* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ *o formă pătratică pe* $\mathbf{R}^4$ *a cărei expresie analitică în raport cu baza canonică a lui* $\mathbf{R}^4$ *este*

$$f(\bar{x}) = x^1x^2 - x^2x^3 + x^3x^4 + x^4x^1\ ,\ \forall \bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x^i \bar{e}_i \in \mathbf{R}^4\,.$$

a) Găsiţi matricea formei pătratice f *în raport cu baza canonică* $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1,0,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0,0), \bar{e}_3 = (0,0,1,0), \bar{e}_4 = (0,0,0,1)\}$ *;*
b) Găsiţi expresia analitică a polarei lui f *relativ la baza canonică* $\mathcal{B}$ *;*
c) Folosind metoda lui Gauss, găsiţi forma canonică a formei pătratice f *şi baza lui* $\mathbf{R}^4$ *relativ la care* f *are expresia canonică.*

Rezolvare:

a) Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,4}$ *a formei pătratice* f *în raport cu baza canonică* $\mathcal{B}$ *este chiar matricea formei biliniare simetrice* b *din care provine forma pătratică* f *(numită polara lui* f*), relativ la baza* $\mathcal{B}$*.*
Din faptul că $b(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}[f(\bar{x} + \bar{y}) - f(\bar{x}) - f(\bar{y})]$ *putem determina elementele matricii cerute* $a_{ij} = b(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$*.*
În mod practic, pentru a evita calculele, elementele matricii A *se determină astfel:*
- elementul a_{ij}*, cu* $i \neq j$*, este egal cu jumătate din coeficientul lui* x^ix^j *din expresia analitică a lui* f *;*
- elementul a_{ii} *este egal coeficientul lui* $(x^i)^2$ *din expresia analitică a lui* f*.*

$$\textit{Deci}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Expresia analitică a polarei lui f *relativ la baza canonică* $\mathcal{B}$ *se poate obţine după formula de mai sus sau, mai practic, prin dedublarea expresiei lui* f *din ipoteză. Deci*
$b(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}x^1y^2 + \frac{1}{2}x^2y^1 - \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{1}{2}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^3y^4 + \frac{1}{2}x^4y^3 + \frac{1}{2}x^4y^1 + \frac{1}{2}x^1y^4\,,$
$\forall \bar{x} = x^i\bar{e}_i,\ \bar{y} = y^j\bar{e}_j \in \mathbf{R}^4\,.$

c) Având în vedere expresia analitică a lui f, vom proceda mai întâi la schimbarea de coordonate:

$$I)\begin{cases} x^1 &= t^1+t^2\\ x^2 &= t^1-t^2\\ x^3 &= t^3\\ x^4 &= t^4\end{cases}$$

(de fapt, s-a schimbat baza lui $\mathbf{R}^4$ şi t^i, $i=\overline{1,4}$, sunt coordonatele lui $\bar{x}$ relativ la noua bază)
Atunci $f(\bar{x})=(t^1)^2-(t^2)^2-t^1t^3+t^2t^3+t^3t^4+t^1t^4+t^2t^4=$
$=\left[(t^1)^2-t^1t^3+t^1t^4-\frac{1}{2}t^3t^4+\frac{1}{4}(t^3)^2+\frac{1}{4}(t^4)^2\right]-$
$-\frac{1}{4}(t^3)^2-\frac{1}{4}(t^4)^2-(t^2)^2+t^2t^3+t^2t^4+\frac{3}{2}t^3t^4=\left(t^1-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^4\right)^2-$
$-\left[(t^2)^2-t^2t^3-t^2t^4+\frac{1}{4}(t^3)^2+\frac{1}{4}(t^4)^2+\frac{1}{2}t^3t^4\right]+2t^3t^4$
şi prin urmare $f(\bar{x})=\left(t^1-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^4\right)^2-\left(t^2-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^4\right)^2+2t^3t^4$.
Făcând schimbarea de coordonate:

$$II)\begin{cases} s^1 &= t^1-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^4\\ s^2 &= t^2-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^4\\ s^3 &= t^3\\ s^4 &= t^4\end{cases}$$

rezultă $f(\bar{x})=(s^1)^2-(s^2)^2+2s^3s^4$. *În final, din*

$$III)\begin{cases} y^1 &= s^1\\ y^2 &= s^2\\ y^3+y^4 &= s^3\\ y^3-y^4 &= s^4\end{cases}$$

rezultă că forma canonică a formei pătratice f este

$$f(\bar{x})=(y^1)^2-(y^2)^2+2(y^3)^2-2(y^4)^2\,,$$

unde y^i, $i=\overline{1,4}$ sunt coordonatele vectorului $\bar{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}^*=\{\bar{b}_i|i=\overline{1,4}\}$, în raport cu care f are forma canonică. Baza $\mathcal{B}^*$ se găseşte astfel:
Dacă C este matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}$ la baza căutată $\mathcal{B}^*$, atunci $\tilde{x}_{\mathcal{B}^*}=C^{-1}\tilde{x}_{\mathcal{B}}$ *sau* $\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\\y^4\end{pmatrix}$.
Pe de altă parte, dacă avem în vedere cele trei schimbări de coordonate avem:

$$\begin{cases} x^4=t^4=s^4=y^3-y^4\\ x^3=t^3=s^3=y^3+y^4\\ x^2=t^1-t^2=s^1-s^2-t^4=y^1-y^2-y^3+y^4\\ x^1=t^1+t^2=s^1+s^2+t^3=y^1+y^2+y^3+y^4\end{cases}.$$

Atunci $\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^1+y^2+y^3+y^4\\y^1-y^2-y^3+y^4\\y^3+y^4\\y^3-y^4\end{pmatrix}=$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix} \text{ şi prin urmare}$$

$$\mathcal{B}^* = \left\{\bar{b}_1 = (1,1,0,0), \bar{b}_2 = (1,-1,0,0), \bar{b}_3 = (1,-1,1,1), \bar{b}_4 = (1,1,1,-1)\right\}.$$

3.4 Metoda lui Jacobi de aducere la forma canonică a unei forme patratice

Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune n şi $f : V \to K$ o formă pătratică.

Teorema 3.4.1 *(Jacobi) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea formei pătratice f în raport cu baza $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ a lui V. Dacă în matricea A toţi minorii* $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$, $1 \leq i \leq n$, *sunt nenuli, atunci există o bază* $\mathcal{B}^* = \{\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n\}$ *a lui V faţă de care f are forma canonică*

$$f(\overline{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(y^1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y^2)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y^n)^2, \tag{6}$$

unde $\Delta_0 = 1$ şi y^1, y^2, ..., y^n sunt coordonatele vectorului $\overline{x}$ în raport cu baza $\mathcal{B}^*$.

Baza $\mathcal{B}^*$ se determină alegând

$$\begin{cases} \overline{b}_1 = \alpha_{11}\overline{a}_1, \\ \overline{b}_2 = \alpha_{21}\overline{a}_1 + \alpha_{22}\overline{a}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{b}_n = \alpha_{n1}\overline{a}_1 + \cdots + \alpha_{nn}\overline{a}_n, \end{cases} \tag{7}$$

unde scalarii $\alpha_{ij} \in K$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,i})$ se află din sistemele $\left\{b(\overline{b}_1, \overline{a}_1) = 1\right.$,

$$\begin{cases} b(\overline{b}_2, \overline{a}_1) = 0 \\ b(\overline{b}_2, \overline{a}_2) = 1 \end{cases}, \ldots, \begin{cases} b(\overline{b}_n, \overline{a}_1) = 0 \\ b(\overline{b}_n, \overline{a}_2) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b(\overline{b}_n, \overline{a}_{n-1}) = 0 \\ b(\overline{b}_n, \overline{a}_n) = 1 \end{cases}.$$

Demonstraţie. Căutăm vectorii bazei $\mathcal{B}^*$ de forma $\begin{cases} \overline{b}_1 = \alpha_{11}\overline{a}_1, \\ \overline{b}_2 = \alpha_{21}\overline{a}_1 + \alpha_{22}\overline{a}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{b}_n = \alpha_{n1}\overline{a}_1 + \cdots + \alpha_{nn}\overline{a}_n, \end{cases}$ astfel încât $b(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = 0$, oricare ar fi $1 \leq i \neq j \leq n$, unde b este polara lui f (adică matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}^*$ este matrice diagonală).

Din punct de vedere practic este util să observăm că dacă

$$b(\overline{b}_i, \overline{a}_j) = 0,\ \forall j = \overline{1, i-1},\ i = \overline{2, n}, \tag{8}$$

atunci avem $b(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = 0$, pentru orice $1 \leq i \neq j \leq n$. Într-adevăr, $b(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = b(\overline{b}_i, \sum\limits_{k=1}^{j} \alpha_{jk}\overline{a}_k) = \sum\limits_{k=1}^{j} \alpha_{jk} b(\overline{b}_i, \overline{a}_k) = 0$ pentru orice $j < i$ şi apoi, din simetria lui b, rezultă că $b(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = 0$ şi pentru orice $j > i$.

Prin acest procedeu, pentru fiecare $i = \overline{1, n}$, determinăm vectorul $\overline{b}_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \alpha_{ik}\overline{a}_k$ aşa încât să aibă loc (7), iar pentru unicitatea lui $\overline{b}_i$ impunem condiţia

$$b(\overline{b}_i, \overline{a}_i) = 1,\ \forall\ i = \overline{1, n}. \tag{8'}$$

Acum relaţiile (8) şi (8') conduc, pentru fiecare $i = \overline{1, n}$, la un sistem liniar cu i ecuatii şi i necunoscute $(\alpha_{ij},\ j = \overline{1, i})$,

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{i1} + a_{12}\alpha_{i2} + \cdots + a_{1i}\alpha_{ii} = 0 \\ a_{21}\alpha_{i1} + a_{22}\alpha_{i2} + \cdots + a_{2i}\alpha_{ii} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i-1,1}\alpha_{i1} + a_{i-1,2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{1-i,i}\alpha_{ii} = 0 \\ a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{ii}\alpha_{ii} = 1 \end{cases} \tag{S$_i$}$$

al cărui determinant este chiar $\Delta_i \neq 0$. Aşadar sistemul (S$_i$) are soluţie unică şi deci $\overline{b}_i$ este determinat în mod unic.

Fie $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea formei pătratice f în raport cu baza $\mathcal{B}^*$. Atunci $b_{ij} = b(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = 0$ pentru orice $i \neq j$. Pe de altă parte, $b_{ii} = b(\overline{b}_i, \overline{b}_i) = \sum\limits_{k=1}^{i} \alpha_{ik} b(\overline{b}_i, \overline{a}_k) = \alpha_{ii}$, oricare ar fi $i = \overline{1, n}$ şi din (S$_i$) rezultă că $\alpha_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, oricare ar fi $i = \overline{1, n}$. Prin urmare

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}.$$

Aşadar, în raport cu baza $\mathcal{B}^*$ forma pătratică f are forma canonică $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}(y^i)^2$, unde $\Delta_0 = 1$ şi y^1, y^2, ..., y^n sunt coordonatele vectorului $\overline{x}$ în raport cu baza $\mathcal{B}^*$. ■

Să remarcăm că metoda prezentată aici, numită **metoda lui Jacobi** de aducere la forma canonică a unei forme pătratice, se poate aplica numai în anumite condiţii spre deosebire de metoda lui Gauss care se poate folosi oricând. Algoritmul de determinare a bazei corespunzătoare formei canonice, prin metoda lui Jacobi, este prezentat în demonstraţia de mai sus, iar în exemplul următor îl ilustram într-un mod concret.

Exemplul 3.4.1 *Fie forma pătratică $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, dată prin expresia analitică $f(\overline{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2$, oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$. Verificaţi dacă se poate aplica metoda lui Jacobi şi în caz afirmativ determinaţi o formă canonică pentru f şi baza corespunzătoare, prin această metodă.*

Rezolvare:

Mai întâi, să observăm că matricea lui f relativ la baza canonică $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci $\Delta_1 = |1| = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Prin urmare se poate aplica metoda lui Jacobi şi f are forma canonică

$f(\overline{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(y^1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y^2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(y^3)^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + \frac{1}{3}(y^3)^2$, unde y^1, y^2, y^3 sunt coordonatele lui $\overline{x}$ relativ la baza $\mathcal{B}^* = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\}$, bază în raport cu care f are forma canonică determinată.

Pentru a determina baza $\mathcal{B}^*$, alegem $\overline{b}_1 = \alpha_{11}\overline{e}_1$, $\overline{b}_2 = \alpha_{21}\overline{e}_1 + \alpha_{22}\overline{e}_2$, $\overline{b}_3 = \alpha_{31}\overline{e}_1 + \alpha_{32}\overline{e}_2 + \alpha_{33}\overline{e}_3$, unde scalarii α_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,i}$, se determina din relaţiile

$\left\{ b(\overline{b}_1, \overline{e}_1) = 1 \right.$, $\begin{cases} b(\overline{b}_2, \overline{e}_1) = 0 \\ b(\overline{b}_2, \overline{e}_2) = 1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} b(\overline{b}_3, \overline{e}_1) = 0 \\ b(\overline{b}_3, \overline{e}_2) = 0 \\ b(\overline{b}_3, \overline{e}_3) = 1 \end{cases}$. Rezultă $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$, $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$, $\alpha_{33} = \frac{1}{3}$ de unde obţinem $\overline{b}_1 = \overline{e}_1$, $\overline{b}_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{b}_3 = \frac{1}{3}\overline{e}_3$.

Exerciţiul 3.4.1 *Folosind metoda lui Gauss să se determine o formă canonică şi baza corespunzătoare pentru forma pătratică din exemplul de mai sus.*

3.5 Forme pătratice definite pe spaţii vectoriale reale. Signatura unei forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial *real* n-dimensional şi f o formă pătratică pe V.

Definiţia 3.5.1 *Spunem că forma pătratică f este*

i) ***pozitiv definită*** *dacă $f(\overline{x}) > 0$, pentru orice $\overline{x} \in V \setminus \{\overline{0}\}$.*

ii) ***pozitiv semidefinită*** *dacă $f(\overline{x}) \geq 0$, pentru orice $\overline{x} \in V$ şi există $\overline{y} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ astfel ca $f(\overline{y}) = 0$.*

iii) ***negativ definită*** *dacă $f(\overline{x}) < 0$, pentru orice $\overline{x} \in V \setminus \{\overline{0}\}$.*

iv) ***negativ semidefinită*** *dacă $f(\overline{x}) \leq 0$, pentru orice $\overline{x} \in V$ şi există $\overline{y} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ astfel ca $f(\overline{y}) = 0$.*

v) ***nedefinită*** *dacă există $\overline{x}$, $\overline{y} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ astfel ca $f(\overline{x}) < 0$, $f(\overline{y}) > 0$.*

Să remarcăm că $f(\overline{0}) = 0$.

Propoziţia 3.5.1 *Forma pătratică f este pozitiv definită (respectiv negativ definită) dacă şi numai dacă forma sa canonică, într-o bază oarecare, are toţi coeficienţii strict pozitivi (respectiv strict negativi).*

Demonstraţie. Presupunem că este pozitiv definită. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ o

bază a lui V faţă de care f are forma canonică $f(\overline{x}) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 + \cdots + \lambda_n(y^n)^2$, oricare ar fi $\overline{x} = y^i\overline{a}_i \in V$. Dacă ar exista $j = \overline{1,n}$ astfel ca $\lambda_j \leq 0$ atunci $f(\overline{a}_j) = \lambda_j \leq 0$ ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare $\lambda_i > 0$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Afirmaţia reciprocă este evidentă.

Analog pentru o formă pătratică negativ definită. ■

În mod logic putem enunţa:

Propoziţia 3.5.2 *Forma pătratică f este pozitiv semidefinită (respectiv negativ semidefinită) dacă şi numai dacă forma sa canonică, într-o bază oarecare, are toti coeficienţii pozitivi (respectiv negativi), cel puţin unul fiind nul.*

Propoziţia 3.5.3 *Forma pătratică f este nedefinită dacă şi numai dacă forma sa canonică, într-o bază oarecare, are coeficienţi de semne contrare.*

Exemplul 3.5.1 *Formele pătratice din exemplele 1) şi 2) secţiunea 3.3 sunt nedefinite, iar forma pătratică din exemplul din secţiunea 3.4 este pozitiv definită.*

Este clar că o formă pătratică se poate reduce, în raport cu baze diferite, la forme canonice diferite, în sensul că diferă coeficienţii în funcţie de baza aleasă. Avem însă rezultatul următor, numit *legea inerţiei a lui Sylvester*:

Teorema 3.5.1 *Numărul coeficienţilor nenuli, iar dintre aceştia numărul coeficienţilor pozitivi şi negativi într-o formă canonică a unei forme pătratice nu depinde de baza în raport cu care este obţinută acea formă canonică.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază a lui V în raport cu care f are

forma canonică

$$f(\overline{x}) = \lambda_1(x^1)^2 + \cdots + \lambda_p(x^p)^2 + \mu_{p+1}(x^{p+1})^2 + \cdots + \mu_{p+q}(x^{p+q})^2, \qquad \text{(a)}$$

cu λ_1, ..., $\lambda_p > 0$ şi μ_{p+1}, ..., $\mu_{p+q} < 0$, $p + q \leq n = \dim V$, iar $\mathcal{B}' = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n\}$ o altă bază a lui V în raport cu care f are forma canonică

$$f(\overline{x}) = \lambda'_1(y^1)^2 + \cdots + \lambda'_{p'}(y^{p'})^2 + \mu'_{p'+1}(y^{p'+1})^2 + \cdots + \mu'_{p'+q'}(y^{p'+q'})^2, \quad \text{(b)}$$

cu λ_1, ..., $\lambda_{p'} > 0$ şi $\mu_{p'+1}$, ..., $\mu_{p'+q'} < 0$, $p' + q' \leq n = \dim V$.

Trebuie să arătăm că $p = p'$ si $q = q'$şi teorema este demonstrată.

Presupunem prin absurd că $p > p'$. Considerăm subspaţiile $V' = L(\overline{e}_1, ..., \overline{e_p})$ şi $V'' = L(\overline{f}_{p'+1}, ..., \overline{f}_n)$. Întrucât $\overline{e}_1$, ..., $\overline{e_p}$ sunt liniar independenţi rezultă că $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e_p}\}$ este bază în V' şi $\dim V' = p$. Analog, $\dim V'' = n - p'$. Deoarece $p + (n - p') > n$ rezultă că există cel puţin un vector nenul în $V' \cap V''$, conform exerciţiului 1.5.3 de la finele capitolului 1. Dacă $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\overline{x} \in V' \cap V''$, atunci putem scrie $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} x^i \overline{e}_i = \sum\limits_{j=p'+1}^{n} y^j \overline{f}_j$ ceea ce arată că $\widetilde{x}^t_{\mathcal{B}} = (x^1, \dots, x^p, 0, \dots, 0)$ şi $\widetilde{x}^t_{\mathcal{B}'} = (0, \dots, 0, y^{p'+1}, \dots, y^n)$.

Acum, ţinând cont de (a) şi (b), avem că $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i (x^i)^2 > 0$ şi $f(\overline{x}) = \sum\limits_{j=p'+1}^{p'+q'} \mu_j (y^j)^2 \leq 0$, deoarece cel puţin unul dintre scalarii x^1, ..., x^p este nenul ($\overline{x} \neq \overline{0}$), iar $p' + q' \leq n$. Contradicţie. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi atunci $p \leq p'$.

Repetând raţionamentul de mai sus se deduce că $p \geq p'$. Prin urmare $p = p'$. Analog se arată că $q = q'$. ■

Numărul coeficienţilor strict pozitivi dintr-o formă canonică se numeşte **indicele pozitiv de inerţie**, iar numărul coeficienţilor strict negativi dintr-o formă canonică se numeşte **indicele negativ de inerţie**.

Definiţia 3.5.2 *Prin signatură a unei forme pătratice* $f : V \to \mathbf{R}$ *înţelegem tripletul* (n, r, p)*, unde* $n = \dim V$*,* r *este rangul lui* f*,* p *este indicele pozitiv de inerţie.*

Observaţia 3.5.1 *Se mai foloseşte şi definiţia echivalentă: Prin signatura unei forme pătratice* f *înţelegem perechea* (p, q)*, unde* p *este indicele pozitiv de inerţie, iar* q *este indicele negativ de inerţie.*

Observăm că $p + q = r$*, iar* $n - r$ *este numărul coeficienţilor nuli dintr-o formă canonică.*

Exemplul 3.5.2 *Formele pătratice din exemplele 1) şi 2) secţiunea 3.3 au signatura* $(3, 3, 2)$*, respectiv* $(4, 4, 2)$*, iar forma pătratică din exemplul din secţiunea 3.4 are signatura* $(3, 3, 3)$*.*

3.6 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie forma biliniară $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $b(\overline{x}, \overline{y}) = 2x^1y^1 + x^2y^2 + 5x^3y^3 - x^1y^2 + x^2y^1 + 5x^3y^1$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$.

   a) Fără a determina matricea lui b relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, să se precizeze dacă b este simetrică sau dacă este antisimetrică;

   b) Determinaţi matricea lui b relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$;

   c) Arătaţi că există şi sunt unice două forme biliniare pe $\mathbf{R}^3$, b_1 simetrică şi b_2 antisimetrică astfel ca $b(\overline{x}, \overline{y}) = b_1(\overline{x}, \overline{y}) + b_2(\overline{x}, \overline{y})$, $\forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$;

d) Găsiţi forma canonică a formei pătratice f asociate formei biliniare simetrice b_1, precum şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are forma canonică găsită.

2. Folosind metoda lui Gauss să se aducă la forma canonică forma pătratică $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(\bar{x}) = x^1x^2 + x^2x^3 + (x^3)^2$, $\forall \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$.
Găsiţi baza lui $\mathbf{R}^3$ în raport cu care f are forma canonică şi signatura lui f. Ce fel de formă pătratică este f?

3. Fie forma pătratică $f(\bar{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 3(x^3)^2 + (x^4)^2 - x^1x^2 + 3x^2x^3 + 5x^3x^4$, pentru orice $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{R}^4$.
Să se aducă la forma canonică folosind mai întâi metoda lui Jacobi,iar apoi folosind metoda lui Gauss. Determinaţi signatura lui f. Ce fel de formă pătratică este f?

4. Fie $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ o formă biliniară şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$. Dacă avem $b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$, $b(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = -1$, $b(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 2$, $b(\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_2) = 2$, $b(\bar{e}_2, \bar{e}_1 - \bar{e}_2) = 4$, $b(\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_3) = 3$, $b(\bar{e}_3, \bar{e}_2 - \bar{e}_3) = -1$, $b(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 3$ şi $b(\bar{e}_3, 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = 5$, atunci se cer:
a) matricea formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$;
b) arătaţi că b este o formă biliniară simetrică;
c) expresia analitică a formei biliniare b în raport cu baza $\mathcal{B}$;
d) matricea şi expresia analitică a formei biliniare b în raport cu o altă bază $\mathcal{B}' = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$, unde $\bar{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{a}_3 = (1, 1, 0)$;
e) expresia analitică a formei pătratice $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(\bar{x}) = b(\bar{x}, \bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbf{R}^3$, în raport cu baza $\mathcal{B}$;
f) forma canonică a formei pătratice f şi baza lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are forma canonică, prin metoda lui Jacobi;
g) signatura lui f.

5. Fie V un spaţiu vectorial real n-dimensional şi forma biliniarā antisimetrică $\omega : V \times V \to \mathbf{R}$. Dacă $A = (\omega_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea lui ω relativ la o bază $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\} \subset V$, atunci spunem că ω este *nedegenerată* dacă $\det A \neq 0$. O formă biliniară antisimetrică şi nedegenerată pe V se numeşte *formă simplectică* pe V.

a) Arătaţi că determinantul matricii asociate unei forme simplectice relativ la orice bază a lui V este nenul;

b) Dacă există o formă simpletică ω definită pe V, atunci dimensiunea lui V este un număr par.

6. Fie $b : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$b(X, Y) = 2Tr(XY) - Tr(X)Tr(Y)\,,\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$$

unde $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ este *urma* matricii $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2}}$.
a) Arătaţi că b este o formă biliniară simetrică;
b) Găsiţi matricea formei biliniare b relativ la baza naturală a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,

$\mathcal{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;
c) Găsiţi expresia analitică a formei pătratice asociată $f(X) = b(X, X)$, relativ la baza naturală a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$;
d) Aduceţi la forma canonică forma pătratică f şi determinaţi baza corespunzătoare;
e) Arătaţi că f este o formă pătratică nedefinită.

7. Dacă $\mathbf{R}_n[X]$ este spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult n, se consideră aplicaţia
$F : \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_{2n-3}[X]$ definită prin

$$F(P, Q) = P''' \cdot Q - P'' \cdot Q' + P' \cdot Q'' - P \cdot Q''',$$

unde P', P'', P''', ... sunt polinoame determinate de derivatele funcţiei polinomiale asociată polinomului P.

a) Arătaţi că aplicaţia F este liniară în ambele argumente şi antisimetrică;

b) Dacă se consideră $Q = X^n$, atunci să se determine matricea aplicaţiei liniare $g : P \to F(P, Q)$ relativ la bazele canonice ale domeniului şi codomeniului lui g;

c) Dacă $n = 3$, ce se spune despre $Ker\ g$ şi $Im\ g$?

d) Este g un endomorfism diagonalizabil, în cazul $n = 3$?

8. Fie
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea unei forme pătratice f pe $\mathbf{R}^3$, relativ la baza cononică a lui $\mathbf{R}^3$.

a) Determinaţi expresia analitică pentru polara lui f;

b) Determinaţi o bază a lui $\mathbf{R}^3$ relativ la care f are o formă canonică;

c) Determinaţi signatura lui f;

d) Este diagonalizabil un endomorfism al lui $\mathbf{R}^3$ care, relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, are matricea A?

9. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ o formă pătratică a cărei expresie analitică, în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + 4(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3, \\ \forall \overline{x} &= (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

a) Se poate aplica metoda lui Jacobi pentru determinarea unei forme canonice pentru f? Dacă da, să se determine o formă canonică pentru f şi baza corespunzătoare, folosind această metodă;

b) Să se determine o formă canonică pentru f şi baza corespunzătoare, folosind metoda lui Gauss;

c) Este f negativ definită? Dar negativ semidefinită?

10. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se cer:

a) Arătaţi că forma biliniară b care are matricea AA^t, relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$, este simetrică;

b) Determinaţi o formă canonică pentru forma pătratică asociată $f(\overline{x}) = b(\overline{x}, \overline{x})$ şi baza corespunzătoare;

c) Arătaţi că f este pozitiv definită.

Capitolul 4

Spaţii euclidiene

4.1 Noţiunea de spaţiu vectorial euclidian. Produs scalar, normă, ortogonalitate

Fie E un spaţiu vectorial real.

Definiţia 4.1.1 *O formă biliniară, simetrică şi pozitiv definită pe E se numeşte* ***produs scalar*** *pe E şi se notează cu $\langle , \rangle$.*

Cu alte cuvinte, aplicaţia $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbf{R}$ este un *produs scalar* pe E dacă satisface următoarele axiome:

i) $\langle \alpha \overline{x} + \beta \overline{y}, \overline{z} \rangle = \alpha \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \beta \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle$, oricare ar fi $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

ii) $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$, oricare ar fi $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$.

iii) $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle \geq 0$, oricare ar fi $\overline{x} \in E$; $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0$ dacă şi numai dacă $\overline{x} = \overline{0}$.

Propoziţia 4.1.1 *Dacă $\langle , \rangle$ este un produs scalar pe E, atunci*

a) $\langle \overline{z}, \alpha \overline{x} + \beta \overline{y} \rangle = \alpha \langle \overline{z}, \overline{x} \rangle + \beta \langle \overline{z}, \overline{y} \rangle$, oricare ar fi $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

b) $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \overline{x}_i, \overline{y} \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \langle \overline{x}_i, \overline{y} \rangle$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{x}_1$, ..., $\overline{x}_n$, $\overline{y} \in E$, α^1, ..., $\alpha^n \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie. Se folosesc i), ii) pentru a), iar pentru b) putem folosi metoda inducţiei matematice după $n \geq 1$. ∎

Pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$, scalarul $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ se numeşte **produsul scalar** al vectorului $\overline{x}$ cu vectorul $\overline{y}$.

Definiţia 4.1.2 *Un spaţiu vectorial real E înzestrat cu un produs scalar $\langle , \rangle$ se numeşte* ***spaţiu vectorial euclidian*** *(pe scurt* ***spaţiu euclidian****) şi se va nota prin $(E, \langle , \rangle)$.*

Exemplul 4.1.1 *1) Aplicaţia* $\langle , \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$*, definită prin* $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$*, oricare ar fi* $\overline{x} = (x^1, \ldots, x^n)$*,* $\overline{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ *este un produs scalar pe* $\mathbf{R}^n$*, numit* ***produs scalar canonic****. Spaţiul euclidian* $(\mathbf{R}^n, \langle , \rangle)$ *se numeşte* ***spaţiu euclidian canonic****.*

2) Aplicaţia $\langle , \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbf{R}$*, definită prin* $\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(t) g(t) dt$*, oricare ar fi* $f, g \in C([a,b])$ *este un produs scalar pe* $C([a,b])$*. Deci* $(C([a,b]), \langle , \rangle)$ *este un spaţiu euclidian.*

3) Aplicaţia $\langle , \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$*, definită prin* $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x^1 y^1$*, oricare ar fi* $\overline{x} = (x^1, \ldots, x^n)$*,* $\overline{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ *nu este un produs scalar pe* $\mathbf{R}^n$*.*

Definiţia 4.1.3 *Aplicaţia* $\| \ \| : E \to [0, +\infty)$*, definită prin* $\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle}$*, oricare ar fi* $\overline{x} \in E$ *se numeşte* ***norma euclidiană****, iar* $\|\overline{x}\|$ *se numeşte* ***norma*** *(sau* ***modulul****) vectorului* $\overline{x}$*.*

Definiţia 4.1.4 *Spunem că vectorii* $\overline{x}$*,* $\overline{y}$ *din spaţiul euclidian* $(E, \langle , \rangle)$ *sunt* ***ortogonali*** *(şi scriem* $\overline{x} \perp \overline{y}$*) dacă* $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0$*.*

Exemplul 4.1.2 *În spaţiul euclidian canonic* $\mathbf{R}^3$*, vectorii* $\overline{x} = (1,1,2)$ *şi* $\overline{y} = (1,-1,0)$ *sunt ortogonali, pentru că* $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0$*.*

Teorema 4.1.1 *(generalizarea teoremei lui Pitagora) Fie* $(E, \langle , \rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian. Vectorii* $\overline{x}$*,* $\overline{y} \in E$ *sunt ortogonali dacă şi numai dacă* $\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2$*.*

Demonstraţie. Deoarece $\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = \langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y} \rangle = \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle + 2 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle =$

$\|\overline{x}\|^2 + 2 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \|\overline{y}\|^2$, oricare ar fi $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$, rezultă concluzia teoremei. ∎

Observaţia 4.1.1 *Pentru orice* $\overline{x} \in E$*, avem* $\left\langle \overline{x}, \overline{0} \right\rangle = \left\langle \overline{0}, \overline{x} \right\rangle = 0$*, pentru că* $\left\langle \overline{x}, \overline{0} \right\rangle = \left\langle \overline{x}, \overline{0} + \overline{0} \right\rangle = \left\langle \overline{x}, \overline{0} \right\rangle + \left\langle \overline{x}, \overline{0} \right\rangle$*.*

Propoziţia 4.1.2 *Dacă vectorii nenuli* $\overline{x}_1$*,* $\overline{x}_2$*, ...,* $\overline{x}_n$ *ai spaţiului euclidian* $(E, \langle , \rangle)$ *sunt ortogonali doi câte doi (adică* $\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = 0$*,* $\forall i \neq j$*), atunci ei sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Fie $\alpha^1 \overline{x}_1 + \alpha^2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha^n \overline{x}_n = \overline{0}$, α^1, α^2, ..., $\alpha^n \in \mathbf{R}$. Atunci, pentru orice $j = \overline{1,n}$, avem $0 = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \overline{x}_i, \overline{x}_j \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i \langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = \alpha^j \langle \overline{x}_j, \overline{x}_j \rangle$. Cum $\overline{x}_j \neq \overline{0}$ avem că $\langle \overline{x}_j, \overline{x}_j \rangle \neq 0$ şi atunci $\alpha^j = 0$, pentru orice $j = \overline{1,n}$. Deci, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_n$ sunt liniar independenţi. ∎

4.2 Inegalitatea lui Cauchy. Unghiul dintre doi vectori nenuli

Fie $(E, \langle, \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian.

Teorema 4.2.1 *Oricare ar fi vectorii $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$ are loc inegalitatea*

$$|\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle| \leq \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|, \tag{1}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă vectorii $\overline{x}$, $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi.

Demonstraţie. Este evident că dacă $\overline{x} = \overline{0}$ sau $\overline{y} = \overline{0}$ atunci (1) are loc, cu egalitate ($\overline{x}$, $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi).

Fie $\overline{x}$, $\overline{y} \in E \setminus \{\overline{0}\}$. Atunci, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, avem $\langle \overline{x} - t\overline{y}, \overline{x} - t\overline{y} \rangle \geq 0$ ceea ce înseamnă

$$\|\overline{y}\|^2 t^2 - 2 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle t + \|\overline{x}\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{*}$$

Prin urmare $\Delta = 4 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 - 4 \|\overline{x}\|^2 \|\overline{y}\|^2 \leq 0$, adică $|\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle| \leq \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|$.

Acum, egalitatea are loc în (1) dacă şi numai dacă $\Delta = 0$, adică trinomul de grad doi în t din (*) are o rădăcină reală dublă t_0, adică $\langle \overline{x} - t_0\overline{y}, \overline{x} - t_0\overline{y} \rangle = 0$ ceea ce implică $\overline{x} - t_0\overline{y} = 0$ sau $\overline{x} = t_0\overline{y}$. Prin urmare, avem egalitate în (1) dacă şi numai dacă $\overline{x}$, $\overline{y}$ sunt vectori liniar dependenţi. ■

Inegalitatea (1) se numeşte **inegalitatea lui Cauchy**.

Teorema 4.2.2 *Norma euclidiană are următoarele proprietăţi:*

a) $\|\overline{x}\| = 0$ dacă şi numai dacă $\overline{x} = \overline{0}$.

b) $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \|\overline{x}\|$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$, $\overline{x} \in E$.

c) ***Inegalitatea lui Minkowski*** *sau* ***inegalitatea triunghiului***

$$\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|, \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in E \tag{2}$$

Egalitatea are loca dacă şi numai dacă $\overline{x}$, $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi.

Demonstraţie. a) Este evident. b) $\|\alpha\overline{x}\| = \sqrt{\langle \alpha\overline{x}, \alpha\overline{x} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle} = |\alpha| \|\overline{x}\|$.

c) Dacă $\overline{x} = \overline{0}$ sau $\overline{y} = \overline{0}$, atunci (2) are loc, cu egalitate ($\overline{x}$, $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi).

Fie $\overline{x}, \overline{y} \in E \setminus \{\overline{0}\}$. Atunci, avem $\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = \langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y} \rangle = \|\overline{x}\|^2 + 2 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle +$
$+ \|\overline{y}\|^2 \leq \|\overline{x}\|^2 + 2 |\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle| + \|\overline{y}\|^2 \leq \|\overline{x}\|^2 + 2 \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\| + \|\overline{y}\|^2 = (\|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|)^2$, conform inegalităţii lui Cauchy (1).

Prin urmare, $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$. Este clar că în (2) avem egalitate dacă şi numai dacă avem egalitate în (1), adică $\overline{x}$, $\overline{y}$ sunt liniar dependenţi. ■

Dacă $\overline{x}$, $\overline{y} \in E \setminus \{\overline{0}\}$, atunci inegalitatea lui Cauchy este echivalentă cu $\left| \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|} \right| \leq 1$. Astfel, putem da definiţia:

Definiţia 4.2.1 *Se numeşte* ***unghi*** *al vectorilor nenuli $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$, unicul număr real $\varphi \in [0, \pi]$ pentru care*

$$\cos\varphi = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|}. \tag{3}$$

Exemplul 4.2.1 *În spaţiul eclidian canonic $\mathbf{R}^3$, unghiul dintre vectorii $\overline{x} = (1, 2, 1)$ şi $\overline{y} = (-1, 0, 2)$ este dat de $\cos\varphi = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|} = \frac{1\cdot(-1)+2\cdot 0+1\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$, adică $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{30}}$.*

Observaţia 4.2.1 *Oricărui vector $\overline{x} \in E$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, îi putem asocia un vector de normă 1, $\overline{x}_0 = \frac{1}{\|\overline{x}\|}\overline{x}$, numit* ***versor*** *al vectorului $\overline{x}$ (sau* ***vector unitar*** *asociat lui $\overline{x}$).*

4.3 Baze ortonormate. Procedeul Gram-Schmidt

Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional (adică spaţiul vectorial E are dimensiunea n).

Definiţia 4.3.1 *Spunem că baza $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a lui E este* ***ortonormată*** *dacă*

$$\langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}.$$

Cu alte cuvinte, o bază este *ortonormată* dacă vectorii ei au norma egală cu 1 şi sunt ortogonali doi câte doi.

Exemplul 4.3.1 *În spatiul euclidian canonic $\mathbf{R}^n$ baza canonică este o bază ortonormată.*

Teorema 4.3.1 *În orice spaţiu vectorial euclidian n-dimensional $(E, \langle , \rangle)$ există baze ortonormate. Mai precis, pornind de la o bază oarecare $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ a lui E, se poate construi o bază ortonormată $\mathcal{B}^* = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a lui E.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ o bază oarecare a lui E.

Mai întâi, vom construi o bază $\mathcal{B}' = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$ a lui E formată din vectori nenuli, ortogonali doi câte doi.

Fie $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$. Evident $\overline{b}_1$ este nenul. Propunem $\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \alpha_2^1 \overline{b}_1$ şi determinăm scalarul α_2^1 astfel încât $\overline{b}_2 \perp \overline{b}_1$, adică $0 = \langle \overline{b}_2, \overline{b}_1 \rangle = \langle \overline{a}_2, \overline{a}_1 \rangle + \alpha_2^1 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle$. Cum $\overline{a}_1 \neq \overline{0}$ rezultă că $\alpha_2^1 = -\frac{\langle \overline{a}_2, \overline{a}_1 \rangle}{\|\overline{a}_1\|^2}$ şi astfel vectorul $\overline{b}_2$ este determinat. Evident $\overline{b}_2$ este nenul, altfel ar trebui ca $\overline{a}_2 + \alpha_2^1 \overline{b}_1 = \overline{0}$, adică $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ să fie liniar dependenţi, ceea ce este fals.

Urmărind a folosi metoda inducţiei matematice (verificarea fiind deja făcută), presupunem că am construit vectorii $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ..., $\overline{b}_k$ (cu $1 \leq k \leq n$), nenuli şi ortogonali doi câte doi. Arătăm că putem construi vectorul nenul $\overline{b}_{k+1}$ aşa încât $\overline{b}_{k+1} \perp \overline{b}_i$, oricare ar fi $i = \overline{1,k}$.

Căutăm $\overline{b}_{k+1}$ de forma $\overline{b}_{k+1} = \overline{a}_{k+1} + \alpha^1_{k+1}\overline{b}_1 + \cdots + \alpha^k_{k+1}\overline{b}_k$ şi dorim ca oricare ar fi $i = 1, 2, ..., k$ să avem $0 = \left\langle \overline{b}_{k+1}, \overline{b}_i \right\rangle = \left\langle \overline{a}_{k+1}, \overline{b}_i \right\rangle + \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha^j_{k+1} \left\langle \overline{b}_j, \overline{b}_i \right\rangle$. Deoarece $\left\langle \overline{b}_j, \overline{b}_i \right\rangle = 0$, oricare ar fi $1 \leq i \neq j \leq k$, rezultă că $0 = \left\langle \overline{a}_{k+1}, \overline{b}_i \right\rangle + \alpha^i_{k+1} \left\| \overline{b}_i \right\|^2 = 0$, oricare ar fi $i = 1, 2, ..., k$. Ţinând cont că toţi $\overline{b}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ sunt nenuli deducem că $\alpha^i_{k+1} = -\frac{\left\langle \overline{a}_{k+1}, \overline{b}_i \right\rangle}{\left\| \overline{b}_i \right\|^2}$, oricare ar fi $i = 1, 2, ..., k$ şi astfel este determinat vectorul $\overline{b}_{k+1}$.

Dacă $\overline{b}_{k+1} = \overline{0}$ atunci, cu uşurinţă, se observă că putem scrie $\overline{0} = \overline{a}_{k+1} + \lambda_1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k$ şi atunci avem o combinaţie liniară nulă, în care nu toţi scalarii sunt nuli, de primii $k+1$ vectori ai bazei $\mathcal{B}$. Absurd. Prin urmare $\overline{b}_{k+1}$ este nenul.

Prin metoda inducţiei matematice am construit baza $\mathcal{B}' = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n\}$ a lui E, formată din vectori nenuli, ortogonali doi câte doi.

În final, dacă luăm $\overline{e}_j = \frac{1}{\left\| \overline{b}_j \right\|}\overline{b}_j$, oricare ar fi $j = \overline{1,n}$, obţinem baza ortonormată căutată $\mathcal{B}^* = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$. ■

Metoda folosită în această demonstraţie pentru construirea unei baze ortonormate, pornind de la o bază oarecare, se numeşte **procedeul lui Gram-Schmidt**.

Exemplul 4.3.2 *Pornind de la baza $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1 = (1, -1, 1), \overline{a}_2 = (0, 1, 0), \overline{a}_3 = (1, 1, -1)\}$ a spaţiului euclidian canonic $\mathbf{R}^3$ să se construiască o bază ortonormată în $\mathbf{R}^3$.*

Rezolvare:

Construim mai întâi baza $\mathcal{B}' = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\}$ formată din vectori ortogonali doi câte doi.

Considerăm $\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = (1, -1, 1)$, $\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \alpha\ \overline{b}_1$, $\overline{b}_3 = \overline{a}_3 + \beta\ \overline{b}_1 + \gamma\ \overline{b}_2$, unde scalarii α, β, γ se determină din condiţiile $\left\langle \overline{b}_1, \overline{b}_2 \right\rangle = 0$, $\left\langle \overline{b}_1, \overline{b}_3 \right\rangle = 0$, $\left\langle \overline{b}_2, \overline{b}_3 \right\rangle = 0$. Obţinem $0 = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle + \alpha \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle = -1 + 3\alpha$, adică $\alpha = \frac{1}{3}$ şi atunci $\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \frac{1}{3}\overline{a}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Din $0 = \left\langle \overline{b}_1, \overline{b}_3 \right\rangle = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_3 \rangle + \beta \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle + \gamma \left\langle \overline{a}_1, \overline{b}_2 \right\rangle = -1 + 3\beta$ şi $0 = \left\langle \overline{b}_2, \overline{b}_3 \right\rangle = \left\langle \overline{b}_2, \overline{a}_3 \right\rangle + \beta \left\langle \overline{b}_2, \overline{a}_1 \right\rangle + \gamma \left\langle \overline{b}_2, \overline{b}_2 \right\rangle = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\gamma$ obţinem $\beta = \frac{1}{3}$ şi $\gamma = -1$, de unde $\overline{b}_3 = \overline{a}_3 + \frac{1}{3}\overline{b}_1 - \overline{b}_2 = (1, 0, -1)$.

Normând vectorii bazei $\mathcal{B}'$, adică construind vectorii $\overline{e}_1 = \frac{1}{\left\| \overline{b}_1 \right\|}\overline{b}_1 =$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \overline{e}_2 = \frac{1}{\left\| \overline{b}_2 \right\|}\overline{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \overline{e}_3 = \frac{1}{\left\| \overline{b}_3 \right\|}\overline{b}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

obţinem baza ortonormată $\mathcal{B}^* = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ a spaţiului euclidian canonic $\mathbf{R}^3$.

Teorema 4.3.2 *Într-un spaţiu euclidian n-dimensional E matricea de trecere de la o bază ortonormată la o altă bază ortonormată este o matrice ortogonală.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n\}$ două baze ortonormate ale spaţiului euclidian $(E, \langle , \rangle)$ şi $C = (c^j_i)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea de trecere

de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, adică $\overline{f}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_i^j \overline{e}_j$, $1 \le i \le n$. Atunci, oricare ar fi i, $j = \overline{1,n}$, $\delta_{ij} = \langle \overline{f}_i, \overline{f}_j \rangle = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{n} c_i^k \overline{e}_k, \sum\limits_{s=1}^{n} c_j^s \overline{e}_s \right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} c_i^k c_j^s \langle \overline{e}_k, \overline{e}_s \rangle =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} c_i^k c_j^s \delta_{ks} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_i^k c_j^k$, relaţii care sunt echivalente cu scrierea matriceală $CC^t = I_n$, ceea ce arată că matricea C este ortogonală. ■

Acum, dacă $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ este o bază oarecare a spaţiului euclidian n-dimensional $(E, \langle , \rangle)$, atunci oricare ar fi $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{a}_i$ şi $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{a}_i \in E$ avem $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x^i y^j \langle \overline{a}_i, \overline{a}_j \rangle$ sau $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x^i y^j a_{ij}$, unde $a_{ij} \overset{not}{=} \langle \overline{a}_i, \overline{a}_j \rangle$, $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Norma lui $\overline{x}$ este $\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x^i x^j a_{ij}}$, iar cosinusul unghiului dintre vectorii nenuli $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ este

$$\cos \varphi = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \, \|\overline{y}\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x^i y^j a_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x^i x^j a_{ij}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} y^i y^j a_{ij}}}.$$

Exemplul 4.3.3 *În spaţiul euclidian $(E, \langle , \rangle)$, în raport cu baza $\mathcal{B} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$, se dau vectorii $\overline{x} = 3\overline{a}_1 - \overline{a}_2$, $\overline{y} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$. Ştiind că $\|\overline{a}_1\|^2 = 2$, $\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle = -1$, $\|\overline{a}_2\|^2 = 3$, se cere unghiul dintre vectorii $\overline{x}$ şi $\overline{y}$.*

Rezolvare:

Cum $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle 3\overline{a}_1 - \overline{a}_2, \overline{a}_1 + \overline{a}_2 \rangle = 3 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle + 2 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle - \langle \overline{a}_2, \overline{a}_2 \rangle = 1$, $\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle 3\overline{a}_1 - \overline{a}_2, 3\overline{a}_1 - \overline{a}_2 \rangle} = \sqrt{9 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle - 6 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle + \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle} = 3\sqrt{3}$, $\|\overline{y}\| = \sqrt{\langle \overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{a}_1 + \overline{a}_2 \rangle} = \sqrt{\langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle + 2 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle + \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle} = \sqrt{3}$ *rezultă că* $\cos \varphi = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \|\overline{y}\|} = \frac{1}{9}$, *adică* $\varphi = \arccos \frac{1}{9}$.

În schimb, dacă considerăm în $(E, \langle , \rangle)$ baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, atunci $\langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ şi astfel, pentru orice vectori $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{e}_i$ şi $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{e}_i$ din E avem $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x^i y^j \delta_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$, $\|\overline{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2}$, iar

$$\cos \varphi = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\|\overline{x}\| \, \|\overline{y}\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y^i)^2}}.$$

Observând că $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i = \widetilde{x}^t_{\mathcal{B}'} \widetilde{y}_{\mathcal{B}'}$, putem spune că *produsul scalar este invariant la schimbări de baze ortonormate*, pentru că $\widetilde{x}^t_{\mathcal{B}'} \widetilde{y}_{\mathcal{B}'} = (C\widetilde{x}_{\mathcal{B}''})^t (C\widetilde{y}_{\mathcal{B}''}) = \widetilde{x}^t_{\mathcal{B}''} C^t C \widetilde{y}_{\mathcal{B}''} = \widetilde{x}^t_{\mathcal{B}''} I_n \widetilde{y}_{\mathcal{B}''} = \widetilde{x}^t_{\mathcal{B}''} \widetilde{y}_{\mathcal{B}''}$, unde C este matricea de trecere (matrice ortogonală) de la baza ortonormată $\mathcal{B}'$ la baza ortonormată $\mathcal{B}''$.

4.4 Complementul ortogonal al unui subspaţiu vectorial al unui spaţiu euclidian

Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional.

Definiţia 4.4.1 *Spunem că vectorul $\overline{x} \in E$ este* ***ortogonal*** *pe subspaţiul vectorial E_1 al lui E dacă $\overline{x} \perp \overline{y}$, oricare ar fi $\overline{y} \in E_1$ (vom nota $\overline{x} \perp E_1$).*

Propoziţia 4.4.1 *Vectorul $\overline{x} \in E$ este ortogonal pe subspaţiul E_1 dacă şi numai dacă el este ortogonal pe fiecare vector al unei baze a lui E_1.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k\}$ o bază a lui E_1 şi $\overline{x} \in E$.

Dacă $\overline{x} \perp E_1$, atunci este clar că $\overline{x}$ este ortogonal pe fiecare vector al bazei $\mathcal{B}_1$.

Dacă $\overline{x} \perp \overline{a}_i$, oricare ar fi $i = \overline{1,k}$, atunci pentru orice $\overline{y} \in E_1$, avem că $\overline{y} = y^i \overline{a}_i$ şi astfel $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = y^i \langle \overline{x}, \overline{a}_i \rangle = 0$. Prin urmare, $\overline{x} \perp E_1$. ∎

Fie $E_1^\perp = \{\overline{x} \in E | \overline{x} \perp E_1\}$, unde E_1 este un subspaţiu vectorial al lui E.

Teorema 4.4.1 *Pentru orice subspaţiu vectorial E_1 al lui E au loc următoarele afirmaţii:*
a) $E_1^\perp$ este un subspaţiu vectorial al lui E.
b) $E = E_1 \oplus E_1^\perp$.

Demonstraţie. a) Fie $\overline{x}$, $\overline{y} \in E_1^\perp$, α, $\beta \in \mathbf{R}$, arbitrar fixaţi. Atunci, pentru orice $\overline{z} \in E_1$ avem $\langle \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \overline{z} \rangle = \alpha \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \beta \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle = 0 + 0 = 0$. Prin urmare, $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in E_1^\perp$ şi astfel, $E_1^\perp$ este un subspaţiu vectorial al lui E.

b) Fie $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază ortonormată a lui E astfel încât $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k\}$ să fie o bază ortonormată a lui E_1 ($\dim E_1 = k \leq n = \dim E$).

Mai întâi arătăm că $\dim E_1^\perp = n - k$. Pentru aceasta, din faptul că

$$E_1^\perp = \{\overline{x} \in E | \overline{x} \perp E_1\} = \{\overline{x} \in E | \overline{x} \perp \overline{e}_j,\ j = \overline{1,k}\} =$$
$$\left\{\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{e}_i | \left\langle \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{e}_i, \overline{e}_j \right\rangle = 0,\ j = \overline{1,k}\right\} = \left\{\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{e}_i | x^j = 0,\ j = \overline{1,k}\right\}$$
$$= L(\overline{e}_{k+1}, \ldots, \overline{e}_n),$$ rezultă că $\dim E_1^\perp = n - k$.

Mai rămâne să arătăm că $E_1 \cap E_1^\perp = \{\overline{0}\}$. Este clar că $\{\overline{0}\} \subseteq E_1 \cap E_1^\perp$. Apoi, dacă $\overline{x} \in E_1 \cap E_1^\perp$ avem că $\overline{x} \in E_1$ şi $\overline{x} \in E_1^\perp$, adică $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0$ ceea ce implică $\overline{x} = \overline{0}$. Prin urmare $E_1 \cap E_1^\perp \subseteq \{\overline{0}\}$.

Conform principiului dublei incluziuni $E_1 \cap E_1^{\perp} = \{\overline{0}\}$ şi astfel, $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$.
■

Această teoremă justifică denumirea dată subspaţiului $E_1^{\perp}$ de **complement ortogonal** al subspaţiului E_1.

Evident, avem că oricare ar fi $\overline{x} \in E$, există şi sunt unici vectorii $\overline{x}_1 \in E_1$, $\overline{x}_2 \in E_1^{\perp}$ astfel ca $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$. Vectorul $\overline{x}_1$ se numeşte **proiecţia ortogonală** a vectorului $\overline{x}$ pe subspaţiul E_1, notată $pr_{E_1}\overline{x}$.

Practic, pentru a determina proiecţia ortogonală a unui vector $\overline{x} \in E$ pe subspaţiul E_1 procedăm astfel: alegem o bază $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ în E astfel încât $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k\}$ să fie o bază a lui E_1. Apoi, egalitatea $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$, cu $\overline{x}_1 = x^1\overline{e}_1 + \cdots + x^k\overline{e}_k \in E_1$, $\overline{x}_2 \in E_1^{\perp}$ o înmulţim scalar cu $\overline{e}_i$, $i = \overline{1,k}$. Obţinem

$\langle \overline{x}, \overline{e}_i \rangle = x^1 \langle \overline{e}_1, \overline{e}_i \rangle + \cdots + x^k \langle \overline{e}_k, \overline{e}_i \rangle + \langle \overline{x}_2, \overline{e}_i \rangle = x^1 \langle \overline{e}_1, \overline{e}_i \rangle + \cdots + x^k \langle \overline{e}_k, \overline{e}_i \rangle$, $\forall i = \overline{1,k}$.

Deci, pentru a găsi pe $\overline{x}_1$ este suficient să determinăm scalarii x^1, ..., x^k din sistemul liniar

$$\left\{ x^1 \langle \overline{e}_1, \overline{e}_i \rangle + \cdots + x^k \langle \overline{e}_k, \overline{e}_i \rangle = \langle \overline{x}, \overline{e}_i \rangle \right., \ i = \overline{1,k}.$$

Dacă baza $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ este ortonormată atunci se obţine imediat că $x^i = \langle \overline{x}, \overline{e}_i \rangle$, $\forall i = \overline{1,k}$.

Exemplul 4.4.1 *În spaţiul euclidian $(E, \langle , \rangle)$, relativ la baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ se dau vectorii $\overline{a}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{a}_2 = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{x} = 2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$. Se cere $pr_{E_1}\overline{x}$, unde $E_1 = L(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$.*

Rezolvare:

Se observă usor că vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ sunt liniar independenţi şi atunci $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ este o bază pentru E_1. Fie $\overline{x}_1 = x^1\overline{a}_1 + x^2\overline{a}_2 \in E_1$ şi $\overline{x}_2 \in E_1^{\perp}$ astfel ca $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$. Atunci $\langle \overline{x}, \overline{a}_1 \rangle = x^1 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle + x^2 \langle \overline{a}_2, \overline{a}_1 \rangle + \langle \overline{x}_2, \overline{a}_1 \rangle = x^1 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1 \rangle + x^2 \langle \overline{a}_2, \overline{a}_1 \rangle$, $\langle \overline{x}, \overline{a}_2 \rangle = x^1 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle + x^2 \langle \overline{a}_2, \overline{a}_2 \rangle + \langle \overline{x}_2, \overline{a}_2 \rangle = x^1 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle + x^2 \langle \overline{a}_2, \overline{a}_2 \rangle$,

ţinând seama că $\overline{x}_2 \perp \overline{a}_1$ si $\overline{x}_2 \perp \overline{a}_2$. Obţinem sistemul $\begin{cases} 3x^1 + x^2 = 1 \\ x^1 + 5x^2 = 6 \end{cases}$, a cărui soluţie este $x^1 = -\frac{1}{14}$, $x^2 = \frac{17}{14}$, adică $\overline{x}_1 = pr_{E_1}\overline{x} = -\frac{1}{14}\overline{a}_1 + \frac{17}{14}\overline{a}_2 = \frac{33}{14}\overline{e}_1 + \frac{18}{14}\overline{e}_2 - \frac{1}{14}\overline{e}_3$.

4.5 Operatori simetrici: definiţie, proprietăţi

Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $f \in End(E)$.

Definiţia 4.5.1 *Spunem că operatorul liniar f este **simetric** dacă*
$\langle f(\overline{x}), \overline{y} \rangle = \langle \overline{x}, f(\overline{y}) \rangle$, pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$.

Exemplul 4.5.1 *Pe spaţiul euclidian canonic $\mathbf{R}^2$ aplicaţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definită prin $f(\overline{x}) = (2x^1 - x^2, -x^1 + 3x^2)$, oricare ar fi $\overline{x} = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2$, este* *un operator simetric. Într-adevăr, oricare ar fi* $\overline{x} = (x^1, x^2)$, $\overline{y} = (y^1, y^2) \in \mathbf{R}^2$ *avem* $\langle f(\overline{x}), \overline{y}\rangle = (2x^1 - x^2)y^1 + (-x^1 + 3x^2)y^2 = 2x^1y^1 - x^2y^1 - x^1y^2 + 3x^2y^2$ *şi* $\langle \overline{x}, f(\overline{y})\rangle = x^1(2y^1 - y^2) + x^2(-y^1 + 3y^2) = 2x^1y^1 - x^2y^1 - x^1y^2 + 3x^2y^2$.

Propoziţia 4.5.1 *Operatorul liniar* $f : E \to E$ *este simetric dacă şi numai dacă matricea sa în raport cu o baza ortonormată a lui* E *este simetrică.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază ortonormată a lui E şi $A = (a_i^j)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea lui f în raport cu $\mathcal{B}$.

Dacă f este simetric, atunci $\langle f(\overline{e}_i), \overline{e}_j\rangle = \langle \overline{e}_i, f(\overline{e}_j)\rangle$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$. Cum $f(\overline{e}_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k \overline{e}_k$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, rezultă $\left\langle \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k \overline{e}_k, \overline{e}_j \right\rangle = \left\langle \overline{e}_i, \sum\limits_{k=1}^{n} a_j^k \overline{e}_k \right\rangle$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$ sau $\sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k \langle \overline{e}_k, \overline{e}_j\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_j^k \langle \overline{e}_i, \overline{e}_k\rangle$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$, adică $\sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k \delta_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_j^k \delta_{ik}$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$ sau $a_i^j = a_j^i$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$. Deci, A este o matrice simetrică.

Reciproc, dacă matricea A este simetrică (adică $a_i^j = a_j^i$, pentru orice i, $j = \overline{1,n}$), atunci oricare ar fi $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \overline{e}_i$ şi $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{e}_i$ avem $\langle f(\overline{x}), \overline{y}\rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x^i f(\overline{e}_i), \sum\limits_{j=1}^{n} y^j \overline{e}_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x^i y^j \left\langle a_i^k \overline{e}_k, \overline{e}_j \right\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} x^i y^j a_i^k \delta_{kj} = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j a_i^j = \sum_{i,j=1}^{n} y^j x^i a_j^i =$$

$\langle \overline{x}, f(\overline{y})\rangle$, datorită simetriei lui A. Deci, f este simetric. ■

Observaţia 4.5.1 *Matricea unui operator simetric este simetrică indiferent de baza ortonormată la care ne raportăm. Într-adevăr, dacă* A *şi* B *sunt matricile operatorului simetric* f *relativ la bazele ortonormate* $\mathcal{B}$*, respectiv* $\mathcal{B}'$*, iar* C *este matricea de trecere de la* $\mathcal{B}$ *la* $\mathcal{B}'$*, atunci* $B = C^{-1}AC$*. Dacă* A *este simetrică atunci* $B^t = (C^{-1}AC)^t = C^tA^t(C^{-1})^t = C^{-1}AC = B$*, deoarece* $CC^t = I_n$*. Deci,* B *este simetrică.*

Propoziţia 4.5.2 *Toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice asociate unui operator simetric sunt reale.*

Demonstraţie. Fie $f \in End(E)$ un operator simetric şi A matricea sa în raport cu baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$.

Fie $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ o rădăcină oarecare a ecuaţiei caracteristice $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Atunci, soluţia nenulă $\widetilde{x}^t = (x^1, \ldots, x^n)$ a sistemului liniar omogen $(A - \lambda_0 I_n)\,\widetilde{x} = \widetilde{0}$ are eventual componente complexe, pentru că A are numai elemente numere reale. Dacă înmulţim, matriceal, cu $\overline{\widetilde{x}}^t = (\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)$, unde $\overline{x}^i$ este conjugatul complex al lui $x^i \in \mathbf{C}$, atunci obţinem $\overline{\widetilde{x}}^t (A - \lambda_0 I_n) \widetilde{x} = \widetilde{0}$ sau $\overline{\widetilde{x}}^t A\widetilde{x} = \lambda_0 \overline{\widetilde{x}}^t \widetilde{x} = \lambda_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2$, de unde avem că $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2 \in \mathbf{R}$ şi $\overline{\widetilde{x}}^t A\widetilde{x} \in \mathbf{R}$ (deoarece $\overline{\overline{\widetilde{x}}^t A\widetilde{x}} = \overline{\overline{\widetilde{x}}}^t \overline{A\widetilde{x}} = \widetilde{x}^t A\overline{\widetilde{x}} = (\widetilde{x}^t A\overline{\widetilde{x}})^t = \overline{\widetilde{x}}^t A^t \widetilde{x} = \overline{\widetilde{x}}^t A\widetilde{x}$). ■

Propoziţia 4.5.3 *Dacă $\overline{e} \in E$ este un vector propriu al operatorului simetric $f : E \to E$, atunci există un subspaţiu E_1 al lui E, de dimensiune $n-1$, invariant faţă de f astfel ca $\overline{e} \perp E_1$.*

Demonstraţie. Dacă considerăm subspaţiul $E_1 = (L(\overline{e}))^{\perp}$, atunci este clar că $\overline{e}$ este ortogonal pe E_1 şi are dimensiunea $n-1$. Rămâne de arătat că $f(E_1) \subseteq E_1$. Pentru aceasta, dacă λ este valoarea proprie a lui f, corespunzătoare lui $\overline{e}$, atunci pentru orice $\overline{x} \in E_1$ avem că $\langle f(\overline{x}), \overline{e} \rangle = \langle \overline{x}, f(\overline{e}) \rangle = \langle \overline{x}, \lambda\overline{e} \rangle = \lambda \langle \overline{x}, \overline{e} \rangle = 0$,întrucât $\overline{x} \perp \overline{e}$. Deci, $f(\overline{x}) \in E_1$, $\forall \overline{x} \in E_1$. ■

Teorema 4.5.1 *Pentru orice operator simetric $f : E \to E$ există o bază ortonormată a lui E formată numai din vectori proprii ai lui f. Mai precis, orice operator simetric $f : E \to E$ este diagonalizabil, iar matricea sa diagonală are pe diagonala principală valorile proprii ale lui f, scrise de atâtea ori cât arată ordinul lor de multiplicitate.*

Demonstraţie. Fie λ_1 o valoare proprie (reală) a lui f şi $\overline{e}_1 \in E$ un vector propriu unitar asociat lui λ_1. Atunci, există un subspaţiu E_1 al lui E, de dimensiune $n-1$, ortogonal pe $\overline{e}_1$ şi invariant faţă de f. Cum restricţia lui f la E_1, $f_1 : E_1 \to E_1$, rămâne operator simetric rezultă că există cel puţin o valoare proprie (reală) λ_2 a lui f_1 şi $\overline{e}_2 \in E_1$ un vector propriu unitar asociat lui λ_2. Prin urmare putem găsi un subspaţiu E_2 al lui E_1, de dimensiune $n-2$, ortogonal pe $\overline{e}_2$ şi invariant faţă de f_1. Este clar că $\overline{e}_2 \perp \overline{e}_1$. Se repetă raţionamentul cu E_2 şi f_2 restricţia lui f_1 la E_2, ş.a.m.d. şi după n paşi vom determina o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a lui E, formată numai din vectori proprii. ■

Exemplul 4.5.2 *Fie operatorul simetric $f : E \to E$ care, în raport cu baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ a lui E, are matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine o bază ortonormată a lui E faţă de care matricea lui f are formă diagonală.

Rezolvare:

Ecuaţia caracteristică a lui f

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt $\overline{a}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - 2\overline{e}_3$, $\overline{a}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{a}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2$ şi se observa că sunt ortogonali doi câte doi. Dacă considerăm $\overline{b}_1 = \frac{1}{\|\overline{a}_1\|}\overline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{e}_3$, $\overline{b}_2 = \frac{1}{\|\overline{a}_2\|}\overline{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$, $\overline{b}_3 = \frac{1}{\|\overline{a}_3\|}\overline{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2$, atunci obţinem baza ortonormată $\mathcal{B}^* = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ a lui E faţă de care f are matricea diagonală

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 4.5.4 *Vectorii proprii ai unui operator simetric corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.*

Demonstraţie. Fie λ_1, λ_2 valori proprii distincte ale operatorului simetric

f şi $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ vectori proprii corespunzători. Atunci, $\langle f(\overline{a}_1), \overline{a}_2\rangle = \langle \lambda_1 \overline{a}_1, \overline{a}_2\rangle = \lambda_1 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2\rangle$ şi $\langle \overline{a}_1, f(\overline{a}_2)\rangle = \langle \overline{a}_1, \lambda_2 \overline{a}_2\rangle = \lambda_2 \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2\rangle$. Cum f este simetric, obţinem $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2\rangle = 0$ sau $\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2\rangle = 0$, pentru că $\lambda_1 \neq \lambda_2$. ■

Exemplul 4.5.3 *Fie $(E, \langle,\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian real cu baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ şi $\bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. Dacă $f : E \to E$ este definită prin*

$$f(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{a}\rangle \bar{a}\,,\ \forall \bar{x} \in E,$$

se cer:
a) Arătaţi că f este un operator liniar şi simetric;
b) Scrieţi matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$ şi ecuaţiile lui f relativ la aceeaşi bază;
c) Determinaţi $Ker\, f$ şi $Im\, f$;
d) Determinaţi o bază ortonormată a lui $Ker\, f$;
e) Găsiţi o bază ortonormată a lui E relativ la care matricea lui f este diagonală.

Rezolvare:

a) Deoarece avem $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \langle \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{a}\rangle\bar{a} = \langle \alpha\bar{x}, \bar{a}\rangle\bar{a} + \langle \beta\bar{y}, \bar{a}\rangle\bar{a} =$
$= \alpha\langle \bar{x}, \bar{a}\rangle\bar{a} + \beta\langle \bar{y}, \bar{a}\rangle\bar{a} = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $\bar{x}, \bar{y} \in E$, rezultă că $f \in End\,(E)$.
f este simetric pentru că:
$\langle f(\bar{x}), \bar{y}\rangle = \langle \bar{x}, \bar{a}\rangle\langle \bar{a}, \bar{y}\rangle = \langle \bar{a}, \bar{y}\rangle\langle \bar{x}, \bar{a}\rangle = \langle \bar{y}, \bar{a}\rangle\langle \bar{x}, \bar{a}\rangle = \langle \bar{x}, \langle \bar{y}, \bar{a}\rangle\bar{a}\rangle = \langle \bar{x}, f(\bar{y})\rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$.
b) Deoarece f este un operator liniar simetric rezultă că matricea sa, relativ la baza ortormată $\mathcal{B}$, este simetrică. Se calculează $f(\bar{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

$f(\bar{e}_1) = \langle \bar{e}_1, \bar{a}\rangle \bar{a} = 1 \cdot \bar{a} = \bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$,
$f(\bar{e}_2) = \langle \bar{e}_2, \bar{a}\rangle \bar{a} = (-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$,
$f(\bar{e}_3) = \langle \bar{e}_3, \bar{a}\rangle \bar{a} = 2 \cdot \bar{a} = \bar{a} = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$.
(deoarece $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j\rangle = \delta_{ij}$*)*
Deci, matricea lui f *relativ la* $\mathcal{B}$ *este*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Prin urmare, cum $f(\tilde{\bar{x}})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = A\tilde{x}_{\mathcal{B}} = A\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, *obţinem ecuaţiile lui* f *relativ la baza* $\mathcal{B}$ *:*

$$\begin{cases} y^1 &= x^1 - x^2 + 2x^3 \\ y^2 &= -x^1 + x^2 - 2x^3 \\ y^3 &= 2x^1 - 2x^2 + 4x^3 \end{cases}$$

c) Nucleul operatorului f *este* $Ker\, f = \{\bar{x} \in E | f(\bar{x}) = \bar{0}\} =$
$= \left\{ \bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \bar{e}_i \in E | (x^1, x^2, x^3) \text{ soluţie pentru sistemul} \right.$
$\left. \begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 &= 0 \\ -x^1 + x^2 - 2x^3 &= 0 \\ 2x^1 - 2x^2 + 4x^3 &= 0 \end{cases} \right\}.$
Se observă că rangul matricii asociate acestui sistem liniar omogen este 1 *şi atunci* $\dim Ker\, f = \dim E - rang\, A = 2$.
Rezolvăm sistemul pentru a găsi o bază pentru $Ker f$, *adică un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen de mai sus.*
Avem soluţia generală $\begin{cases} x^1 &= \alpha - 2\beta \\ x^2 &= \alpha \\ x^3 &= \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$
şi prin urmare $\bar{x} \in Ker\, f$ *dacă şi numai dacă* $\bar{x} = (\alpha - 2\beta)\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 + \beta\bar{e}_3$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, *adică*
$\bar{x} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2$, *unde* $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ *şi* $\bar{a}_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_3$. *Deci* $Ker\, f = \{\alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2 | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ *şi*
$\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ *este o bază pentru* $Ker\, f$ *pentru că rangul matricii pe ale cărei coloane avem coordonatele vectorilor* $\bar{a}_1$ *şi* $\bar{a}_2$, *relativ la baza* $\mathcal{B}$, *este* 2.
Acum, $\dim Im\, f = \dim E - \dim Ker\, f = rang A = 1$ *şi*
$Imf = \{f(\bar{x}) | \bar{x} \in E\} = \{(x^1 - x^2 + 2x^3)\bar{e}_1 + (-x^1 + x^2 - 2x^3)\bar{e}_2 + (2x^1 - 2x^2 + 4x^3)\bar{e}_3 | x^i \in \mathbf{R}\}$.
Deci $Im\, f = \{(x^1 - x^2 + 2x^3)(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) | x^i \in \mathbf{R}\} = L(\bar{a})$ *şi astfel* $\{\bar{a}\}$ *este o bază pentru* $Im\, f$.
d) Deoarece $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2\rangle = -2 + 0 + 0 = -2$ *rezultă că* $\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ *nu este bază ortonormată pentru* $Ker\, f$. *Pentru a obţine o bază ortonormată vom utiliza procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt, plecând de la baza* $\mathcal{B}_1$.
Se consideră $\bar{g}_1 = \bar{a}_1$ *şi* $\bar{g}_2 = \bar{a}_2 + \alpha\bar{g}_1$, *unde* $\alpha \in \mathbf{R}$ *se află din condiţia de*

ortogonalitate $\langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = 0$.
Din $0 = \langle \bar{g}_1, \bar{g}_2 \rangle = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle + \alpha \langle \bar{a}_1, \bar{a}_1 \rangle$ *rezultă* $-2 + 2\alpha = 0$, *adică* $\alpha = 1$. *Astfel, obţinem că* $\bar{g}_1 = \bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ *şi* $\bar{g}_2 = \bar{a}_2 + \bar{g}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
Acum, calculând $\|\bar{g}_1\| = \sqrt{\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ *şi* $\|\bar{g}_2\| = \sqrt{\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ *şi considerând*

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\|\bar{g}_1\|} \bar{g}_1 \, , \ \bar{f}_2 = \frac{1}{\|\bar{g}_2\|} \bar{g}_2$$

rezultă că $B_1^* = \left\{ \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) \right\}$ *este o bază ortonormată a lui* $Ker\, f$.
e) Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$ *are toate rădăcinile reale (pentru că* A *este matrice simetrică).*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 6) = 0$$

şi atunci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$.
Baza ortonormată relativ la care matricea lui f *este diagonală este* $\mathcal{B}^* = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, *unde* $\bar{v}_i$ *este un vector propriu (versor) corespunzător valorii proprii* λ_i , *iar forma diagonală a matricii operatorului* f *este:*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \, \lambda_3 = 6)$$

Pentru $\lambda_{1,2} = 0$ *avem sistemul*

$$(A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 - x^2 + 2x^3 & = & 0 \\ -x^1 + x^2 - 2x^3 & = & 0 \\ 2x^1 - 2x^2 + 4x^3 & = & 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că subspaţiul propriu crespunzător valorii proprii 0 *este* $V_0 = Ker\,(f - 0 \cdot I_3) = Ker\, f$ *şi atunci* $\bar{v}_1 = \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$, $\bar{v}_2 = \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{3})$. *Pentru* $\lambda_3 = 6$ *avem sistemul*

$$(A - \lambda_3 I_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x^1 - x^2 + 2x^3 & = & 0 \\ -x^1 - 5x^2 - 2x^3 & = & 0 \\ 2x^1 - 2x^2 - 2x^3 & = & 0 \end{cases}$$

de unde rezultă $x^1 = \alpha/2, x^2 = -\alpha/2, x^3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$ *şi astfel subspaţiul propriu crespunzător valorii proprii* 6 *este* $V_6 = Ker\,(f - 6 \cdot I_3) = \{\alpha(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) | \alpha \in \mathbf{R}\} = L(\bar{a})$, *cu* $\bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.
Luăm $\bar{v}_3 = \frac{1}{\|\bar{a}\|} \cdot \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{3})$ *şi astfel obţinem baza ortonormată* $\mathcal{B}^*$ *(ştiind că vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte, pentru un operator liniar şi simetric, sunt ortogonali).*
Observăm că $Ker\, f \oplus Im\, f = E$.

4.6 Metoda transformărilor ortogonale de aducere la forma canonică a unei forme pătratice definită pe un spaţiu euclidian

Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $f : E \to \mathbf{R}$ o formă pătratică care în raport cu o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a lui E are expresia analitică $f(\overline{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i x^j a_{ij}$, pentru orice $\overline{x} = x^i \overline{e}_i \in E$.

Ne propunem să determinăm o formă canonică pentru forma pătratică f şi *baza ortonormată* corespunzătoare, folosind proprietăţile operatorilor simetrici. În acest sens, fie $u \in End(E)$ operatorul simetric care are aceeaşi matrice ca şi forma pătratică f, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, relativ la baza ortonormată $\mathcal{B}$. Atunci, $f(\overline{x}) = \widetilde{x}^t_{\mathcal{B}} A \widetilde{x}_{\mathcal{B}} = \langle \overline{x}, u(\overline{x}) \rangle$, $\forall \overline{x} \in E$. Mai mult, există o bază ortonormată $\mathcal{B}^* = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n\}$ a lui E în raport cu care matricea lui u are forma digonală $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, unde λ_1, ..., λ_n sunt valorile proprii ale lui u. Prin urmare, oricare ar fi $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{f}_i \in E$ avem $f(\overline{x}) = \langle \overline{x}, u(\overline{x}) \rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \overline{f}_i, u\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y^j \overline{f}_j \right) \right\rangle =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} y^i y^j \left\langle \overline{f}_i, u(\overline{f}_j) \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} y^i y^j \left\langle \overline{f}_i, \lambda_j \overline{f}_j \right\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \lambda_j y^i y^j \left\langle \overline{f}_i, \overline{f}_j \right\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \lambda_j y^i y^j \delta_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (y^i)^2.$

Am arătat astfel că pentru orice formă pătratică definită pe un spaţiu euclidian n-dimensioanal E se poate găsi o bază ortonormată relativ la care forma pătratică are o formă canonică. Această metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice definită pe un spatiu euclidian n-dimensional se numeşte **metoda transformărilor ortogonale** (sau *metoda valorilor proprii şi vectorilor proprii*). Se va vedea în partea de geometrie analitică că această metodă este deosebit de utilă pentru aducerea ecuaţiei curbelor şi suprafeţelor algebrice de ordinul al doilea (conice şi cuadrice) la forma canonică şi pentru clasificarea lor.

Exemplul 4.6.1 *Considerând pe* $\mathbf{R}^3$ *produsul scalar canonic să se aducă la forma canonică, cu ajutorul metodei transformărilor ortogonale, forma pătratică* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *care, în raport cu baza canonică* $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, *are expresia analitică*

$$f(\overline{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 4(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 4x^3x^1 + 4x^2x^3, \ \forall \overline{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3.$$

Rezolvare:

Determinăm valorile proprii ale operatorului simetric $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *care are* *matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

ca şi forma pătratică f, relativ la baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$.

Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$ *devine* $\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0$ *şi atunci* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$ *sunt valorile proprii ale lui u. Atunci o formă canonică pentru f este*

$$f(\overline{x}) = \lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 + \lambda_3(y^3)^2 = 6(y^3)^2, \ \forall \overline{x} = y^i\overline{f}_i \in \mathbf{R}^3,$$

unde $\mathcal{B}^* = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ este baza ortonormată a lui $\mathbf{R}^3$, relativ la care f are forma canonică de mai sus. Pentru a determina vectorii lui $\mathcal{B}^*$, vom găsi întâi vectorii proprii ai lui u:

Pentru $\lambda_{1,2} = 0$ rezolvăm sistemul liniar omogen $\Big\{(A - 0I_3)\widetilde{x} = \widetilde{0}$, *adică* $\begin{cases} x^1 + x^2 + 2x^3 = 0 \\ x^1 + x^2 + 2x^3 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 + 4x^3 = 0 \end{cases}$, *care are soluţia de forma* $(-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta)$, *unde* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Atunci avem* $\overline{a}_1 = (-1, 1, 0)$, $\overline{a}_2 = (-2, 0, 1)$ *vectori proprii corespunzători valorii proprii duble* $\lambda_{1,2} = 0$ *care formează o bază (neortonormată) pentru subspaţiul propriu* V_0.

Pentru $\lambda_3 = 6$ rezolvăm sistemul liniar omogen $\Big\{(A - 6I_3)\widetilde{x} = \widetilde{0}$, *adică* $\begin{cases} -5x^1 + x^2 + 2x^3 = 0 \\ x^1 - 5x^2 + 2x^3 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0 \end{cases}$, *care are soluţia de forma* $(\alpha, \alpha, 2\alpha)$, *unde* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Atunci* $\overline{a}_3 = (1, 1, 2)$ *este un vector propriu asociat lui* $\lambda_3 = 6$ *şi formează o bază pentru subspaţiul propriu* V_6.

Normăm vectorul $\overline{a}_3$ şi obţinem versorul $\overline{f}_3 = \frac{1}{\|\overline{a}_3\|}\overline{a}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, *iar pentru sistemul* $\{\overline{a}_1 = (-1, 1, 0), \overline{a}_2 = (-2, 0, 1)\}$ *aplicăm procedeul Gram-Schmidt, adică luăm* $\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = (-1, 1, 0)$, $\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \alpha\overline{b}_1$, *unde* $\alpha \in \mathbf{R}$ *se află din condiţia* $\left\langle \overline{b}_1, \overline{b}_2 \right\rangle = 0$. *Atunci* $\alpha = -1$ *şi astfel* $\overline{b}_2 = (-1, -1, 1)$.

Rezultă baza ortonormată a lui V_0,

$\left\{\overline{f}_1 = \frac{1}{\|\overline{a}_1\|}\overline{a}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \overline{f}_2 = \frac{1}{\|\overline{a}_2\|}\overline{a}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

Prin urmare, am determinat baza ortonormată $\mathcal{B}^* = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ *a lui* $\mathbf{R}^3$ *corespunzătoare formei canonice găsite.*

4.7 Probleme propuse spre rezolvare

1. Pe spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^n$ se consideră aplicaţia biliniară $<< \cdot, \cdot >>$ definită prin

$$<< \overline{x}, \overline{y} >> = x^1y^1 + 2x^2y^2 + 3x^3y^3 + \cdots + nx^ny^n,$$

pentru orice $\overline{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, ..., y^n)$.

a) Arătaţi că $<<\cdot,\cdot>>$ este un produs scalar pe $\mathbf{R}^n$;

b) Verificaţi că baza canonică a lui $\mathbf{R}^n$ este ortonormată în raport cu acest produs scalar;

c) Arătaţi că există k_1, $k_2 > 0$ astfel încât $k_1 \cdot |\overline{x}| \leq ||\overline{x}|| \leq k_2 \cdot |\overline{x}|$, $\forall \overline{x} \in \mathbf{R}^n$, unde $|\cdot|$ reprezintă norma asociată produsului canonic $<\cdot,\cdot>$ pe $\mathbf{R}^n$ şi $||\cdot||$ reprezintă norma asociată produsului scalar $<<\cdot,\cdot>>$;

d) Scrieţi inegalitatea lui Cauchy pentru produsul scalar $<<\cdot,\cdot>>$. Comparaţi-o cu inegalitatea lui Cauchy scrisă pentru produsul scalar canonic $<\cdot,\cdot>$.

2. Fie E un spaţiu vectorial real, n-dimensional dotat cu două produse scalare $<\cdot,\cdot>_1$şi $<\cdot,\cdot>_2$. Să se arate că oricare ar fi perechea de vectori nenuli $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$, unghiurile dintre cei doi vectori, corespunzătoare celor două produse scalare, sunt egale dacă şi numai dacă există $\lambda > 0$ astfel încât $<\overline{x},\overline{y}>_1 = \lambda <\overline{x},\overline{y}>_2$, pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$.

3. In spaţiul vectorial aritmetic $\mathbf{R}^3$ se consideră vectorii $\overline{a}_1 = (1,0,1)$, $\overline{a}_2 = (1,1,0)$, $\overline{a}_3 = (0,1,1)$, $\overline{a} = (1,2,3)$, $\overline{b} = (-1,0,4)$. Să se calculeze unghiul vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$ în spaţiul vectorial euclidian $\left(\mathbf{R}^3, <\cdot,\cdot>\right)$, unde $<\cdot,\cdot>$ este produsul scalar pe $\mathbf{R}^3$ în raport cu care baza $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\}$ este ortonormată.

4. În spaţiul euclidian canonic $\mathbf{R}^5$ se dă subspaţiul

$$E_1 = \left\{ \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \middle| \left\{ \begin{array}{l} x^1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

a) Determinaţi complementul ortogonal al lui E_1 , $E_1^\perp$;
b) Determinaţi $pr_{E_1} \bar{x}$, unde $\bar{x} = (3,1,2,2,0)$.

5. Fie spaţiul euclidian canonic $\mathbf{R}^4$ şi forma pătratică
$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, care relativ la baza canonică $\mathcal{B}$ a lui $\mathbf{R}^4$
are expresia analitică

$$f(\bar{x}) = 4x^1x^2 - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 + 4x^3x^4 \,, \bar{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{R}^4 \,.$$

Folosind metoda transformărilor ortogonale să se aducă la forma canonică forma pătratică f. Să se găsească baza relativ la care f are expresia canonică, precum şi signatura lui f.

6. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea unei forme pătratice pozitiv definite pe un spaţiu vectorial real V, atunci arătaţi că are loc inegalitatea

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j \right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j \right) \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y^i y^j \right)$$

pentru orice numere reale x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n.

7. Fie $(E, \langle , \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian real şi $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ un sistem ortonormat de vectori din E care verifică proprietatea

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{a}_k, \bar{x} \rangle^2 \, , \ \forall \bar{x} \in E$$

Arătaţi că $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ este bază pentru E.

8. Fie $\mathcal{M}_s(n; \mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A = A^t\}$ spatiul vectorial real al matricilor pătratice de ordinul n, simetrice, cu elemente reale. Dacă se consideră aplicaţia $\langle , \rangle : \mathcal{M}_s(n; \mathbf{R}) \times \mathcal{M}_s(n; \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, dată prin $\langle A, B \rangle \stackrel{def}{=} Tr(AB)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_s(n; \mathbf{R})$, atunci:
a) Să se arate că $\langle , \rangle$ este un produs scalar pe spaţiul vectorial real $\mathcal{M}_s(n; \mathbf{R})$;
b) Pentru $n = 2$, să se determine matricea produsului scalar $\langle , \rangle$
relativ la baza canonică a lui $\mathcal{M}_s(2; \mathbf{R})$,
$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$
c) Pentru $n = 2$, să se ortonormeze baza
$\mathcal{B} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

9. Fie spaţiul vectorial euclidian real (sau complex) $(E, < \cdot, \cdot >)$ de dimensiune finită n, cu baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$. Dacă se consideră o baza ortogonală $\mathcal{B}' = \{\overline{a}_1, ..., \overline{a}_n\}$, să se calculeze determinantul matricii de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ în funcţie de lungimile vectorilor bazei $\mathcal{B}'$.

10. Fie $\mathcal{F}$ spaţiul vectorial real al funcţiilor reale continue definite pe intervalul $[0, 2\pi]$. Se defineşte aplicaţia

$$(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to < f, g, >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \in \mathbf{R}.$$

a) Arătaţi că perechea $(\mathcal{F}, < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu eculidian;

b) Dacă $f_0(x) = 1, \ f_{2n-1}(x) = \cos nx, \ f_{2n}(x) = \sin nx, \ n \in \mathbf{N}^*$, atunci arătaţi că sistemul de funcţii $S = \{f_0, \ f_1, \ f_2, \ ...\}$ este liniar independent în $\mathcal{F}$;

c) Ortonormaţi sistemul S, folosind procedeul Gram-Schmidt;

d) Găsiţi proiecţia ortogonală a funcţiei $f(x) = x$ pe subspaţiul lui $\mathcal{F}$ generat de funcţiile $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_1, \ ..., \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_{2n}$.

Partea II

GEOMETRIE ANALITICĂ

Capitolul 5

Vectori liberi

5.1 Noţiunea de vector liber

Fie E_3 spaţiul punctual tridimensional al geometriei elementare şi $\mathcal{D}$ mulţimea dreptelor din E_3.

Pe multimea $\mathcal{D}$ definim relaţia binară "$\approx$" astfel: "pentru d_1, $d_2 \in \mathcal{D}$, spunem că $d_1 \approx d_2$ dacă $d_1 \parallel d_2$ sau $d_1 = d_2$".

Evident că relaţia "$\approx$" este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{D}$. Clasa de echivalenţă $\widehat{d} = \{g \in \mathcal{D} | g \approx d\}$ a dreptei $d \in \mathcal{D}$, în raport cu "$\approx$", se va numi **direcţia** dreptei d. Mai exact, dacă d_1, $d_2 \in \mathcal{D}$ şi $d_1 \approx d_2$ atunci spunem că dreptele d_1 şi d_2 **au aceeaşi direcţie**.

Elementele mulţimii E_3 (care sunt puncte) le vom nota cu A, B, C, ...

O pereche ordonată de puncte din E_3, adică elementul $(A, B) \in E_3 \times E_3$, se numeşte **segment orientat** (sau *vector legat*), de origine A şi extremitate B. Dacă $A = B$, atunci segmentul orientat (A, A) se numeşte **segmentul orientat nul**.

Dreapta determinată de punctele distincte A, B se numeşte **suportul** segmentului orientat (A, B).

Spunem că segmentele orientate nenule (A, B), (C, D) au **aceeaşi direcţie** dacă dreptele lor suport au aceeaşi direcţie. Deoarece printr-un punct $A \in E_3$ trec o infinitate de drepte, de direcţii diferite, spunem că segmentul orientat nul (A, A) are direcţia nedeterminată.

Distanţa dintre punctele A, $B \in E_3$ se numeşte **mărimea** (sau *lungimea*) segmentului orientat (A, B) şi se notează $d(A, B)$. Evident, mărimea unui segment orientat este zero dacă şi numai dacă el este segmentul nul.

Spunem că segmentele orientate nenule (A, B) şi (C, D), cu dreptele suport paralele, au **acelaşi sens** dacă punctele B şi D se află de aceeaşi parte a dreptei determinate de punctele A şi C, în planul dreptelor suport.

Fie acum segmentele orientate nenule (A, B) şi (C, D), cu aceeaşi dreaptă suport şi fie (E, F) un segment orientat nenul cu dreapta suport paralela cu dreapta suport a segmentelor (A, B) si (C, D). Dacă (A, B) are acelaşi sens cu

(E, F) şi (C, D) are acelaşi sens cu (E, F), atunci spunem că (A, B) şi (C, D) au **acelaşi sens**. Convenim să spunem că sensul unui segment orientat nul este nedeterminat. Despre două segmente orientate nenule cu aceeaşi direcţie, dar care nu au acelaşi sens spunem ca au **sensuri opuse**.

Acum suntem în măsură să definim pe $E_3 \times E_3$ **relaţia de echipolenţă** a segmentelor orientate.

Definiţia 5.1.1 *Spunem că segmentele orientate (A, B), $(C, D) \in E_3 \times E_3$ sunt **echipolente** (şi scriem $(A, B) \sim (C, D)$) dacă*

1) (A, B), (C, D) sunt nenule şi au aceeaşi direcţie, sens şi mărime, sau

2) (A, B), (C, D) sunt segmente orientate nule.

Propoziţia 5.1.1 *Relaţia de echipolenţă a segmentelor orientate din E_3 este o relaţie de echivalenţă pe $E_3 \times E_3$, adică relaţia "$\sim$" are proprietăţile:*

a) "$\sim$" este reflexivă: $\forall (A, B) \in E_3 \times E_3$, avem $(A, B) \sim (A, B)$.

b) "$\sim$" este simetrică: Dacă $(A, B) \sim (C, D)$ atunci $(C, D) \sim (A, B)$.

c) "$\sim$"este tranzitivă: Dacă $(A, B) \sim (C, D)$ şi $(C, D) \sim (E, F)$ atunci $(A, B) \sim (E, F)$.

Demonstraţie. Exerciţiu! ∎

Prin urmare, relaţia de echipolenţă "$\sim$" împarte mulţimea $E_3 \times E_3$ în clase de echivalenţă care se vor numi **vectori liberi**. Mulţimea cât $E_3 \times E_3 / \sim$ a tuturor claselor de echivalenţă se va nota cu V^3 şi se va numi **mulţimea vectorilor liberi din spaţiu**. Clasa de echivalenţă care are drept reprezentant segmentul orientat (A, B) se va nota prin $\overline{AB}$, adică

$$\overline{AB} = \{(C, D) \in E_3 \times E_3 | (C, D) \sim (A, B)\}.$$

Vectorii liberi se vor nota prin $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ..., când punem în evidenţă un reprezentant sau prin $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., când nu există pericol de confuzii. Vectorul liber $\overline{0} = \{(A, A) \in E_3 \times E_3 | A \in E_3\}$ se numeşte **vectorul liber nul** (sau v*ectorul nul*).

Definiţia 5.1.2 *Prin **mărimea, direcţia** şi **sensul** vectorului liber $\overline{a} = \overline{AB} \in V^3$ înţelegem mărimea, direcţia şi sensul segmentului orientat $(A, B) \in \overline{a}$. Vectorul nul are mărimea egală cu 0, iar direcţia şi sensul sunt nedeterminate.*

Mărimea (sau lungimea) vectorului liber $\overline{a}$ se va nota prin $\|\overline{a}\|$. Astfel, $\|\overline{0}\| = 0$.

Definiţia 5.1.3 *a) Spunem că doi vectori liberi nenuli sunt coliniari dacă au aceeaşi direcţie.*

b) Vectorul nul este coliniar cu orice vector liber.

Propoziţia 5.1.2 *a) Oricare ar fi (A, B), $(C, D) \in E_3 \times E_3$ cu $(A, B) \sim (C, D)$ rezultă că $(A, C) \sim (B, D)$.*

b) Oricare ar fi $(A, B) \in E_3 \times E_3$ şi $C \in E_3$, există un singur punct $D \in E_3$ astfel încât $(A, B) \sim (C, D)$.

Demonstraţie. Exerciţiu! ∎

5.2 Spaţiul vectorial real 3-dimensional V^3

Vom construi pe multimea V^3 a vectorilor liberi din spaţiu o structură de spaţiu vectorial real de dimensiune 3.

Fie $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$ şi A un punct arbitrar din E_3. Atunci, există două puncte unic determinate B, $C \in E_3$ astfel încât $(A,B) \in \overline{a}$, $(B,C) \in \overline{b}$. Prin definiţie, vectorul $\overline{AC} \in V^3$ se va numi **suma** vectorilor liberi $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi vom scrie $\overline{a}+\overline{b} = \overline{AC}$.

Aplicaţia $+ : V^3 \times V^3 \to V^3$ care asociază fiecărei perechi de vectori liberi $(\overline{a}, \overline{b})$ vectorul sumă $\overline{a}+\overline{b}$, definit mai sus, este o lege de compoziţie internă pe V^3 care se va numi **adunarea vectorilor liberi**.

Se poate arăta că adunarea vectorilor liberi este corect definită, adică vectorul sumă $\overline{a}+\overline{b}$ nu depinde de alegerea punctului $A \in E_3$. Într-adevăr, dacă $A' \in E_3$ este un alt punct şi $(A', B') \in \overline{a}$, $(B', C') \in \overline{b}$, atunci avem că $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ deoarece $(A,B) \sim (A',B')$ implică $(A,A') \sim (B,B')$ şi $(B,C) \sim (B',C')$ implică $(B,B') \sim (C,C')$, de unde, în baza tranzitivităţii relaţiei "$\sim$", avem $(A,A') \sim (C,C')$ ceea ce implică $(A,C) \sim (A',C')$.

Regula de adunare a vectorilor liberi prezentată aici se numeşte **regula triunghiului**.

Propoziţia 5.2.1 *Mulţimea V^3 împreună cu adunarea vectorilor liberi formează un grup comutativ.*

Demonstraţie. a) Adunarea vectorilor liberi este asociativă, adică oricare ar fi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in V^3$ avem $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$. Într-adevăr, dacă $(A,B) \in \overline{a}$, $(B,C) \in \overline{b}$, $(C,D) \in \overline{c}$ atunci $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{AC}+\overline{CD} = \overline{AD}$, $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AD}$.

b) Adunarea vectorilor liberi este comutativă, adică oricare ar fi $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$ avem $\overline{a}+\overline{b} = \overline{b}+\overline{a}$. Într-adevăr, dacă $(A,B) \in \overline{a}$, $(B,C) \in \overline{b}$, atunci $\overline{a}+\overline{b} = \overline{AC}$, iar dacă $(B,C) \in \overline{b}$, $(C,D) \in \overline{a}$, atunci $\overline{b}+\overline{a} = \overline{BD}$. Rămâne de arătat că $\overline{AC} = \overline{BD}$. Cum (A,B), $(C,D) \in \overline{a}$ rezultă $(A,C) \sim (B,D)$, adică $\overline{AC} = \overline{BD}$.

c) Vectorul nul $\overline{0}$ este element neutru pentru adunarea vectorilor liberi, deoarece oricare ar fi $\overline{a} \in V^3$, dacă $(A,B) \in \overline{a}$, $(B,B) \in \overline{0}$, avem $\overline{a}+\overline{0} = \overline{AB} = \overline{a}$. Cum adunarea vectorilor liberi este comutativă rezultă că $\overline{a}+\overline{0} = \overline{0}+\overline{a} = \overline{a}$, $\forall \overline{a} \in V^3$.

d) Pentru orice $\overline{a} \in V^3$, există $\overline{b} \in V^3$ astfel încât $\overline{a}+\overline{b} = \overline{b}+\overline{a} = \overline{0}$. Într-adevăr, dacă $\overline{a} \in V^3$ şi $(A,B) \in \overline{a}$ atunci, luând $\overline{b} = \overline{BA}$, rezultă că $\overline{a}+\overline{b} = \overline{AB}+\overline{BA} = \overline{AA} = \overline{0}$. Vectorul $\overline{b}$ se va numi **opusul** lui $\overline{a}$ şi se va nota cu $-\overline{a}$. Se observă că dacă $\overline{a} = \overline{AB}$ atunci $-\overline{a} = \overline{BA}$. ∎

Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $\overline{a} \in V^3$, arbitrar fixaţi. Definim **produsul** dintre scalarul α şi vectorul liber $\overline{a}$, ca fiind vectorul liber notat prin $\alpha\overline{a}$, astfel:

- dacă $\alpha = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$, atunci $\alpha\overline{a} = \overline{0}$

sau

- dacă $\alpha \neq 0$ şi $\overline{a} \neq \overline{0}$, atunci $\alpha\overline{a}$ este vectorul de aceeaşi direcţie cu $\overline{a}$, cu sensul lui $\overline{a}$, dacă $\alpha > 0$, sau de sens opus lui $\overline{a}$, dacă $\alpha < 0$ şi $\|\alpha\overline{a}\| = |\alpha| \; \|\overline{a}\|$.

Aplicaţia $\cdot_s : \mathbf{R}\times V^3 \to V^3$ definită prin $(\alpha,\overline{a}) \to \alpha\overline{a}$ se numeşte **înmulţirea vectorilor din V^3 cu scalari**.

Observaţia 5.2.1 *Oricare ar fi vectorul nenul $\overline{a} \in V^3$, vom nota prin vers $\overline{a}$ sau $\overline{a}^0$ vectorul $\frac{1}{\|\overline{a}\|}\overline{a}$. Evident, $\overline{a}^0$ are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\overline{a}$, iar $\left\|\overline{a}^0\right\| = 1$. Vectorul $\overline{a}^0$ se numeşte* ***versorul*** *vectorului $\overline{a}$. Este clar că $\overline{a} = \|\overline{a}\|\,\overline{a}^0$.*

Propoziţia 5.2.2 *Dacă $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$ sunt coliniari şi $\overline{a} \neq \overline{0}$, atunci există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overline{b} = \alpha\overline{a}$.*

Demonstraţie. Dacă $\overline{b} = \overline{0}$, atunci este evident că luând $\alpha = 0$ avem $\overline{b} = \alpha\overline{a}$.

Dacă $\overline{b} \neq \overline{0}$, atunci avem două situaţii:

i) dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ au acelaşi sens, atunci $\overline{a}^0 = \overline{b}^0$ şi avem $\overline{b} = \left\|\overline{b}\right\|\overline{b}^0 = \left\|\overline{b}\right\|\overline{a}^0 = \left\|\overline{b}\right\|\frac{1}{\|\overline{a}\|}\overline{a} = \alpha\overline{a}$, daca luăm $\alpha = \frac{\left\|\overline{b}\right\|}{\|\overline{a}\|}$;

ii) dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ au sensuri opuse, atunci $\overline{a}^0 = -\overline{b}^0$ şi avem $\overline{b} = \left\|\overline{b}\right\|\overline{b}^0 = -\left\|\overline{b}\right\|\overline{a}^0 = \alpha\overline{a}$, dacă luăm $\alpha = -\frac{\left\|\overline{b}\right\|}{\|\overline{a}\|}$. ■

Propoziţia 5.2.3 *Înmulţirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăţi:*

i) $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$, oricare ar fi α, $\beta \in \mathbf{R}$, $\overline{a} \in V^3$;

ii) $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$, $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$;

iii) $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$, oricare ar fi α, $\beta \in \mathbf{R}$, $\overline{a} \in V^3$;

iv) $1\overline{a} = \overline{a}$, oricare ar fi $\overline{a} \in V^3$.

Demonstraţie. i) Întrucât pentru $\alpha = \beta = 0$ sau $\overline{a} = 0$ sau $\alpha+\beta = 0$ egalitatea

$(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ se verifică imediat, putem presupune că α şi β sunt nenuli, $\overline{a} \neq 0$ şi $\alpha+\beta \neq 0$.

- Dacă $\alpha\beta > 0$ atunci vectorii $(\alpha+\beta)\overline{a}$ şi $\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ au aceeşi direcţie şi acelaşi sens. Mai mult, cum vectorii $\alpha\overline{a}$ şi $\beta\overline{a}$ au acelaşi sens avem $\|\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}\| = \|\alpha\overline{a}\| + \|\beta\overline{a}\| = |\alpha|\,\|\overline{a}\| + |\beta|\,||\overline{a}|| = (|\alpha| + |\beta|)|\,|\overline{a}|\,| = |\alpha+\beta|\,||\overline{a}|| = ||(\alpha+\beta)\overline{a}||$. Prin urmare, vectorii $(\alpha+\beta)\overline{a}$ şi $\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ sunt egali.

- Dacă $\alpha\beta < 0$ atunci vectorii $\alpha\overline{a}$ şi $\beta\overline{a}$ au sensuri opuse. Să presupunem că $|\alpha| > |\beta|$. Atunci $||\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}|| = ||\alpha\overline{a}|| - ||\beta\overline{a}|| = (|\alpha| - |\beta|)\,||\overline{a}|| = |\alpha+\beta|\,||\overline{a}|| = ||(\alpha+\beta)\overline{a}||$, adică vectorii $(\alpha+\beta)\overline{a}$ şi $\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ au aceeaşi mărime. Evident că ei au aceeaşi direcţie. Cum $|\alpha| > |\beta|$ rezultă că vectorii $(\alpha+\beta)\overline{a}$ şi $\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ au acelaşi sens cu vectorul $\alpha\overline{a}$, adică $(\alpha+\beta)\overline{a}$ şi $\alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ au acelaşi sens. Prin urmare ei sunt egali.

ii) Dacă $\alpha = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$ sau $\overline{b} = \overline{0}$ egalitatea este verificată. Rămâne de demonstrat egalitatea pentru $\alpha \neq 0$ şi $\overline{a}$, $\overline{b}$ vectori nenuli. Avem situaţiile:

- Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coliniari atunci există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ şi atunci $\alpha\overline{a} + \alpha\overline{b} = \alpha\overline{a} + \alpha\lambda\overline{a} = \alpha(1+\lambda)\overline{a}$, iar $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha(\overline{a}+\lambda\overline{a}) = \alpha(1+\lambda)\overline{a}$. Rezultă că $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$.

- Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ nu sunt coliniari atunci, considerând $\alpha > 0$ (cazul $\alpha < 0$ se tratează similar), putem lua $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = b$ şi avem $\overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$. Fie $\overline{AB'} = \alpha\overline{a}$. Este clar că B' se află pe dreapta AB. Construim prin punctul B' o dreaptă paralelă cu dreapta BC. Aceasta va intersecta dreapta AC în punctul C'. Rezultă că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea şi avem $\frac{d(A,B)}{d(A,B')} = \frac{d(A,C)}{d(A,C')} = \frac{d(B,C)}{d(B',C')}$. Cum $d(A,B') = \alpha d(A,B)$ rezultă $d(A,C') = \alpha d(A,C)$, $d(B',C') = \alpha d(B,C)$. Cum $\overline{AC'} = \alpha(\overline{a} + \overline{b})$, $\overline{B'C'} = \alpha\overline{b}$, $\overline{AB'} = \alpha\overline{a}$ şi $\overline{AC'} = \overline{AB'} + \overline{B'C'}$ rezultă $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$.

iii) Dacă $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$ atunci egalitatea este evidentă. Dacă $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ şi $\overline{a} \neq \overline{0}$ atunci $\beta\overline{a}$ are aceeaşi direcţie ca şi $\overline{a}$ şi $\alpha(\beta\overline{a})$ are aceeaşi ca şi $\beta\overline{a}$, adică aceeaşi direcţie ca şi $\overline{a}$. Vectorul $(\alpha\beta)\overline{a}$ are aceeaşi direcţie ca şi $\overline{a}$. Apoi $\|\alpha(\beta\overline{a})\| = |\alpha|||\beta\overline{a}|| = |\alpha|\,|\beta|\,||\overline{a}|| = |\alpha\beta|\,||\overline{a}|| = ||(\alpha\beta)\overline{a}||$.

De asemenea, vectorii $\alpha(\beta\overline{a})$ şi $(\alpha\beta)\overline{a}$ au acelaşi sens, pentru că dacă $\alpha\beta > 0$ atunci ambii au acelaşi sens ca şi $\overline{a}$, iar dacă $\alpha\beta < 0$ atunci ambii au sens contrar lui $\overline{a}$. În consecinţă $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$.

iv) Egalitatea este adevărată conform definiţiei produsului dintre un scalar şi un vector liber. ■

Corolarul 5.2.1 *Mulţimea vectorilor liberi din spaţiu, V^3, are o structură de spaţiu vectorial real faţă de operaţiile de adunare a vectorilor liberi şi înmulţirea vectorilor liberi cu scalari reali.*

Dacă π este un plan, în mod cu totul analog, se poate construi spaţiul vectorial real V^2 al vectorilor liberi din planul π.

Propoziţia 5.2.4 *Doi vectori liberi $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$ sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. Fie $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$ coliniari. Dacă $\overline{a} = \overline{0}$, atunci $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi. Dacă $\overline{a} \neq \overline{0}$, atunci există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overline{b} = \alpha\overline{a}$, adică $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi.

Reciproc, dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi, adică există o combinaţie liniară nulă de $\overline{a}$, $\overline{b}$, în care nu toţi sclarii sunt nuli, $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \overline{0}$, atunci avem $\overline{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\overline{b}$, în cazul $\alpha \neq 0$, de pildă.

Dacă $\overline{a} = \overline{0}$ sau $\overline{b} = \overline{0}$ atunci $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coliniari. Altfel, dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt nenuli atunci avem că $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ au aceeaşi direcţie, adică sunt coliniari. ■

Corolarul 5.2.2 *Doi vectori liberi $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^3$ sunt necoliniari dacă şi numai dacă sunt liniar independenţi.*

Definiţia 5.2.1 *Spunem că vectorul liber nenul $\overline{a}$ este **paralel cu planul** π dacă dreptele suport ale segmentelor orientate care îl reprezintă pe $\overline{a}$ sunt paralele cu π.*

Definiţia 5.2.2 *a) Spunem că vectorii liberi nenuli $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt* ***coplanari*** *dacă există un plan π cu care ei să fie paraleli.*

b) Vectorul nul $\overline{0}$ este, prin definiţie, coplanar cu orice alţi doi vectori liberi.

Propoziţia 5.2.5 *Vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in V^3$ sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. Fie $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ coplanari. Sunt posibile două situaţii:

i) $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt liniar dependenţi, de unde rezultă că $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt liniar dependenţi.

ii) $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt liniar independenţi. Fie $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$. Atunci punctul C este în planul determinat de punctele O, A, B. Fie M punctul de intersecţie al dreptei duse prin C la dreapta OB şi N intersecţia paralelei duse prin C la OA. Astfel avem $\overline{c} = \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MC} = \overline{OM} + \overline{ON} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, deoarece $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ sunt coliniari cu $\overline{OA}$, respectiv $\overline{OB}$. Deci $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt liniar dependenţi.

Reciproc, dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt liniar dependenţi, atunci există scalarii reali α, β, γ, nu toţi nuli, astfel ca $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0}$. Dacă admitem, de exemplu, că $\gamma \neq 0$, atunci $\overline{c} = \mu\overline{a} + \nu\overline{b}$, unde $\mu = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\nu = -\frac{\beta}{\gamma}$. Sunt posibile două cazuri:

i) $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coliniari şi atunci vectorul $\overline{c}$ este coliniar şi cu $\overline{a}$ şi cu $\overline{b}$, adică $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt coliniari şi astfel sunt şi coplanari.

ii) $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt necoliniari şi atunci avem $\overline{OC} = \mu\overline{OA} + \nu\overline{OB}$, unde $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$. Este clar că punctul C se află în planul (OAB) şi astfel $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ sunt coplanari. ■

Corolarul 5.2.3 *Trei vectori liberi sunt necoplanari dacă şi numai dacă sunt liniar independenţi.*

Teorema 5.2.1 *Oricare trei vectori liberi necoplanari formează o bază a lui V^3. Deci* $\dim V^3 = 3$.

Demonstraţie. Fie $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ trei vectori necoplanari din V^3, adică liniar independenţi. Rămâne de arătat că $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este un sistem de generatori al lui V^3.

Fie $\overline{d} \in V^3$, arbitrar. Avem cazurile:

a) Dacă $\overline{d} = \overline{0}$ sau $\overline{d}$ este coliniar cu unul dintre vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, atunci rezultă clar că $\overline{d}$ se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

b) Dacă $\overline{d}$ este coplanar cu doi dintre vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, de exemplu dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ sunt coplanari, atunci deducem că $\overline{d}$ este o combinaţie liniară de $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + 0\overline{c}$.

c) Dacă $\overline{d} = \overline{OD}$ nu se află în nici unul dintre cazurile a), b), atunci considerăm punctul M ca intersecţia paralelei dusă prin D la dreapta OC cu planul (OAB). Prin M ducem paralela la dreapta OA şi aceasta intersectează dreapta OB în Q. Prin M ducem paralela la dreapta OB şi aceasta intersectează dreapta OA în P. Dreptele MD şi OC determină un plan (fiind paralele) şi paralela prin D la OM intersectează OC în R, în planul (ODM). Deoarece $\overline{OR} = \overline{MD}$, $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{OQ}$ şi $\overline{OD} = \overline{OM} + \overline{MD}$ avem $\overline{OD} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}$.

Cum vectorii $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ sunt coliniari, respectiv, cu $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ rezultă că există α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overline{OP} = \alpha\overline{OA} = \alpha\overline{a}$, $\overline{OQ} = \beta\overline{OB} = \beta\overline{b}$, $\overline{OR} = \gamma\overline{OC} = \gamma\overline{c}$ şi astfel avem că $\overline{d} = \overline{OD} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

Deci vectorul $\overline{d}$ se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. ■

De asemenea, dacă punctele O, A, $B \in E_3$ sunt necoliniare, iar $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, atunci mulţimea $V^2 = \{\overline{OC} \in V^3 | C \text{ aparţine planului } (OAB)\}$ coincide cu mulţimea vectorilor liberi din planul (OAB). Evident, $\overline{a}$, $\overline{b} \in V^2$ şi cum sunt necoliniari ei sunt liniar independenţi. Un raţionament similar celui din demonstraţia de mai sus arată că $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ este şi sistem de generatori pentru V^2. Rezultă că $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ este o bază pentru V^2.

Deci, orice doi vectori liberi necoliniari din V^2 constituie o bază a lui V^2 şi atunci, $\dim V^2 = 2$.

5.3 Produse de vectori în V^3

Prin **proiecţia ortogonală** a unui punct A pe o dreapta d înţelegem intersecţia dintre d şi planul dus prin punctul A perpendicular pe dreapta d.

Definiţia 5.3.1 *Se numeşte **proiecţie ortogonală** a vectorului $\overline{a} = \overline{AB} \in V^3$ pe vectorul $\overline{u} = \overline{CD} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$, vectorul $\overline{A'B'}$, unde A', B' sunt proiecţiile ortogonale ale punctelor A, respectiv B pe dreapta CD. Notăm $\overline{A'B'} = \pi_{\overline{u}}(\overline{a})$.*

Se poate verifica uşor că definiţia nu este ambiguă în sensul că vectorul $\overline{A'B'}$ nu depinde de alegerea segmentelor orientate care reprezintă vectorii liberi $\overline{a}$ şi $\overline{u}$.

Întrucât vectorul $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$ este coliniar cu versorul $\overline{u}^0$, rezultă că există un scalar real unic determinat, notat prin $pr_{\overline{u}}(\overline{a})$ şi numit **mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale** $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$, aşa încât $\pi_{\overline{u}}(\overline{a}) = pr_{\overline{u}}(\overline{a}) \cdot \overline{u}^0$. Avem următoarea propoziţie (a cărei demonstraţie o lăsăm ca exerciţiu):

Propoziţia 5.3.1 *Oricare ar fi $\overline{u} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$ avem*
a) $\pi_{\overline{u}}(\overline{a} + \overline{b}) = \pi_{\overline{u}}(\overline{a}) + \pi_{\overline{u}}(\overline{b}), \forall \overline{a}, \overline{b} \in V^3$,
b) $\pi_{\overline{u}}(\alpha\overline{a}) = \alpha\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\overline{u} \in V^3$,
adică aplicaţia $\pi_{\overline{u}} : V^3 \to V^3$ este liniară.

Corolarul 5.3.1 *Oricare ar fi $\overline{u} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$, aplicaţia $pr_{\overline{u}} : V^3 \to \mathbf{R}$ are următoarele proprietăţi:*
a) $pr_{\overline{u}}(\overline{a} + \overline{b}) = pr_{\overline{u}}(\overline{a}) + pr_{\overline{u}}(\overline{b})$, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V^3$,
b) $pr_{\overline{u}}(\alpha\overline{a}) = \alpha pr_{\overline{u}}(\overline{a}) \forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\overline{a} \in V^3$,
adică $pr_{\overline{u}}$ este o aplicaţie liniară.

Definiţia 5.3.2 *Prin **unghi** al vectorilor liberi nenuli* $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$ *înţelegem unghiul* $\varphi \in [0, \pi]$ *format de semidreptele* $[OA$ *şi* $[OB$. *Vom nota* $\varphi = \widehat{\overline{a}, \overline{b}}$.

Se constată uşor că dacă $\overline{u} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$, atunci oricare ar fi $\overline{a} \in V^3$ avem $pr_{\overline{u}}(\overline{a}) = ||\overline{a}|| \cdot \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{u}})$.

Propoziţia 5.3.2 *Aplicaţia* $\langle , \rangle : V^3 \times V^3 \to \mathbf{R}$ *definită prin*

$$\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = \begin{cases} ||\overline{a}|| \cdot ||\overline{b}|| \cdot \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}), & \text{dacă} \quad \overline{a}, \overline{b} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}, \\ 0, \quad \text{dacă} \quad \overline{a} = \overline{0} \quad \text{sau} \quad \overline{b} = \overline{0}, \end{cases} \tag{1}$$

este un produs scalar pe V^3.

Demonstraţie. a) Evident $\left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = \left\langle \overline{b}, \overline{a} \right\rangle$, pentru toţi $\overline{a}, \overline{b} \in V^3$.

b) $\left\langle \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c} \right\rangle = \left|\left|\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}\right|\right| \cdot ||\overline{c}|| \cdot \cos(\widehat{\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c}}) = ||\overline{c}|| \cdot pr_{\overline{c}}(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) =$
$= ||\overline{c}|| \cdot (\alpha pr_{\overline{c}}\overline{a} + \beta pr_{\overline{c}}\overline{b}) = \alpha\,||\overline{c}||\, pr_{\overline{c}}\overline{a} + \beta\,||\overline{c}||\, pr_{\overline{c}}\overline{b} = \alpha||\overline{c}||||\overline{a}|| \cos(\widehat{\overline{c}, \overline{a}}) + \beta\,||\overline{c}||\,||\overline{b}|| \cos(\widehat{\overline{c}, \overline{b}}) =$
$= \alpha \left\langle \overline{a}, \overline{c} \right\rangle + \beta \left\langle \overline{b}, \overline{c} \right\rangle$, pentru orice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in V^3$, α, $\beta \in \mathbf{R}$ pentru care $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} \neq \overline{0}$ şi $\overline{c} \neq \overline{0}$.

Dacă $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \overline{0}$ sau $\overline{c} = \overline{0}$, atunci $\left\langle \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c} \right\rangle = 0 = \alpha \left\langle \overline{a}, \overline{c} \right\rangle + \beta \left\langle \overline{b}, \overline{c} \right\rangle$, după definiţie.

c) Oricare ar fi $\overline{a} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$ avem $\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle = ||\overline{a}||^2 \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{a}}) = ||\overline{a}||^2 \geq 0$ şi $||\overline{a}|| = 0$ dacă şi numai dacă $\overline{a} = \overline{0}$. ■

Aşadar, *spaţiul vectorial* V^3 *este un spaţiu vectorial euclidian* în raport cu acest produs scalar şi astfel, sunt valabile în V^3 toate rezultatele de la capitolul anterior. Se verifică uşor că mărimea unui vector liber $\overline{a}$ (ca lungime a segmentelor orientate echipolente între ele, care îl reprezintă) coincide cu norma vectorului $\overline{a}$ (calculată cu ajutorul normei euclidiene). De asemenea, unghiul a doi vectori liberi $\overline{a}, \overline{b}$ (definit mai sus) coincide cu unghiul vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$ din spatiul euclidian V^3.

În continuare, putem considera $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o bază ortonormată a spaţiului euclidian V^3.

Definiţia 5.3.3 *Aplicaţia* $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$ *definită prin*

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\overline{i} - (a^1b^3 - a^3b^1)\overline{j} + (a^1b^2 - a^2b^1)\overline{k}, \tag{2}$$

pentru orice vectori $\overline{a} = a^1\overline{i} + a^2\overline{j} + a^3\overline{k}$, $\overline{b} = b^1\overline{i} + b^2\overline{j} + b^3\overline{k}$, *se numeşte **produs vectorial** în* V^3, *iar vectorul* $\overline{a} \times \overline{b}$ *se numeşte **produsul vectorial** al vectorilor liberi* $\overline{a}$, $\overline{b}$.

Din punct de vedere practic este util să scriem expresia produsului vectorial al vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$ sub forma (este o scriere doar formală pentru că, din punct de vedere riguros, matematic, nu putem scrie acest determinant)

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix}. \tag{2'}$$

Observaţia 5.3.1 *Fie $\{\overline{i}',\overline{j}',\overline{k}'\}$ o altă bază ortonormată în V^3, pozitiv orientată, adică determinantul matricii $C=(c_i^j)_{i,j=\overline{1,3}}$ de trecere de la baza $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ la baza $\{\overline{i}',\overline{j}',\overline{k}'\}$ să fie pozitiv (de fapt, $\det C=1$ pentru că C este o matrice ortogonală). Atunci, pentru orice vectori $\overline{a}=\alpha^1\overline{i}'+\alpha^2\overline{j}'+\alpha^3\overline{k}'$, $\overline{b}=\beta^1\overline{i}'+\beta^2\overline{j}'+\beta^3\overline{k}'$, avem că (ţinând cont şi de definiţia matricii de trecere de la o bază la alta)*

$$\begin{vmatrix}\overline{i}' & \overline{j}' & \overline{k}'\\ \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3\\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3\end{vmatrix}=\det\left[\begin{pmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{pmatrix}\cdot C\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix}\cdot\det C=$$
$$\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix},$$ *unde $\overline{a}=a^1\overline{i}+a^2\overline{j}+a^3\overline{k}$, $\overline{b}=b^1\overline{i}+b^2\overline{j}+b^3\overline{k}$.*

Prin urmare expresia de calcul a produsului vectorial a doi vectori liberi este invariantă la o schimbare de baze ortonormate la fel orientate.

Din formula (1) rezultă cu uşurinţă că $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$, $\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}$, $\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}$.

Propoziţia 5.3.3 *a) Produsul vectorial este o aplicaţie biliniară pe V^3, adică pentru orice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}\in V^3$ şi α, $\beta\in\mathbf{R}$ avem $(\alpha\overline{a}+\beta\overline{b})\times\overline{c}=\alpha(\overline{a}\times\overline{c})+\beta(\overline{b}\times\overline{c})$ şi $\overline{c}\times(\alpha\overline{a}+\beta\overline{b})=\alpha(\overline{c}\times\overline{a})+\beta(\overline{c}\times\overline{b})$.*

b) Produsul vectorial este antisimetric, adică $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$, oricare ar fi $\overline{a}$, $\overline{b}\in V^3$.

c) $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$ dacă şi numai dacă vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi (adică coliniari).

d) Dacă baza ortonormată $\{\overline{i}',\overline{j}',\overline{k}'\}$ este negativ orientată, atunci $\overline{a}\times\overline{b}=$
$$-\begin{vmatrix}\overline{i}' & \overline{j}' & \overline{k}'\\ \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3\\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3\end{vmatrix},\ \forall\overline{a}=\alpha^1\overline{i}'+\alpha^2\overline{j}'+\alpha^3\overline{k}',\ \overline{b}=\beta^1\overline{i}'+\beta^2\overline{j}'+\beta^3\overline{k}'.$$

e) Oricare ar fi $\overline{a}$, $\overline{b}\in V^3$, vectorul $\overline{a}\times\overline{b}$ este ortogonal atât pe vectorul $\overline{a}$ cât şi pe vectorul $\overline{b}$.

f) Mărimea produsului vectorial $\overline{a}\times\overline{b}$ al vectorilor liberi necoliniari $\overline{a}$, $\overline{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe doi reprezentanţi, cu originea comună, ai celor doi vectori. Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coliniari, atunci $||\overline{a}\times\overline{b}||=0$.

g) Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}\in V^3$ sunt necoliniari, atunci sensul lui $\overline{a}\times\overline{b}$ este aşa încât baza $\{\overline{a},\overline{b},\overline{a}\times\overline{b}\}$ să aibă aceeaşi orientare cu baza $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$. Practic, sensul lui

$\overline{a}\times\overline{b}$ este dat de regula burghiului drept (sau regula mâinii drepte), adică este dat de sensul de înaintare al burghiului drept atunci când aşezând burghiul cu vârful în originea comună a doi reprezentanţi ai vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$, îl rotim de la $\overline{a}$ spre $\overline{b}$ pe drumul cel mai scurt.

Demonstraţie. a) Fie $\overline{a}=a^1\overline{i}+a^2\overline{j}+a^3\overline{k}$, $\overline{b}=b^1\overline{i}+b^2\overline{j}+b^3\overline{k}$, $\overline{c}=c^1\overline{i}+c^2\overline{j}+c^3\overline{k}\in V^3$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. Atunci $(\alpha\overline{a}+\beta\overline{b})\times\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \alpha a^1+\beta b^1 & \alpha a^2+\beta b^2 & \alpha a^3+\beta b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \alpha a^1 & \alpha a^2 & \alpha a^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \beta b^1 & \beta b^2 & \beta b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=$

$=\alpha(\overline{a}\times\overline{c})+\beta(\overline{b}\times\overline{c})$. Analog se demonstrează a doua egalitate.

b) Verificarea este foarte uşor de făcut, ţinând cont de proprietăţile determinanţilor.

c) Presupunem că $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$. Dacă $\overline{a}=\overline{0}$ atunci, evident, $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi. Dacă $\overline{a}\neq\overline{0}$ atunci cel puţin o coordonată lui $\overline{a}$ este nenulă şi fie aceasta a^1. Din $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$ deducem că $a^2b^3-a^3b^2=0$, $a^1b^3-a^3b^1=0$ si $a^1b^2-a^2b^1=0$. Dacă privim aceste trei relaţii ca pe un sistem omogen de trei ecuaţii cu trei necunoscute $(b^1,\ b^2,\ b^3)$ şi observăm că determinantul matricii acestui sistem este nul, atunci avem că acest sistem liniar omogen are şi soluţii nebanale. Alegând pe b^1 ca necunoscută secundară obţinem $b^1=\alpha$, $b^2=\frac{a^2\alpha}{a^1}$, $b^3=\frac{a^3\alpha}{a^1}$, cu $\alpha\in\mathbf{R}$. Dacă luăm $\alpha=\lambda a^1$, $\lambda\in\mathbf{R}$, avem $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, adică $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi.

Reciproc, dacă avem că $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt liniar dependenţi, adică există $\lambda\in\mathbf{R}$ astfel încât $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, atunci $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$, în conformitate cu relaţia (2') şi proprietăţile determinanţilor.

d) A se vedea observaţia de mai sus în care $\det C=-1$.

e) $\langle\overline{a}\times\overline{b},\overline{a}\rangle=(a^2b^3-a^3b^2)a^1-(a^1b^3-a^3b^1)a^2+(a^1b^2-a^2b^1)a^3=\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix}$
$=0$ înseamnă $\overline{a}\times\overline{b}\perp\overline{a}$.Analog $\langle\overline{a}\times\overline{b},\overline{b}\rangle=0$.

f) Se cunoaşte că oricare ar fi α^i, $\beta^i\in\mathbf{R}$, $i=\overline{1,n}$, are loc *identitatea lui Lagrange*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta^i)^2\right)=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\alpha^i\beta^j-\alpha^j\beta^i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\beta^i\right)^2.$$

Dacă $\overline{a}=a^1\overline{i}+a^2\overline{j}+a^3\overline{k}$, $\overline{b}=b^1\overline{i}+b^2\overline{j}+b^3\overline{k}$ atunci, ţinând seama de identitatea lui Lagrange pentru $n=3$ şi de expresia analitică a produsului vectorial, avem $||\overline{a}\times\overline{b}||^2=||\overline{a}||^2\cdot||\overline{b}||^2-(\langle\overline{a},\overline{b}\rangle)^2=||\overline{a}||^2\cdot||\overline{b}||^2\cdot\left(1-\cos^2(\widehat{\overline{a},\overline{b}})\right)=$
$||\overline{a}||^2\cdot||\overline{b}||^2\cdot\sin^2(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.

Rezultă $||\overline{a}\times\overline{b}|| = ||\overline{a}||\cdot||\overline{b}||\cdot\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$ care este chiar aria paralelogramului construit pe doi reprezentanţi ai lui $\overline{a}$, $\overline{b}$, cu originea comună. Evident, dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coliniari atunci $||\overline{a}\times\overline{b}|| = 0$.

g) Alegem baza ortonormată $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ astfel: $\overline{i}'$ are direcţia şi sensul lui $\overline{a}$, $\overline{j}'$ îl luăm în planul determinat de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ astfel încât $pr_{\overline{j}'}\overline{b} > 0$, iar $\overline{k}'$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, astfel încât baza $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ să aibă aceeaşi orientare cu baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Astfel, $\overline{a} = \alpha\overline{i}'$, $\overline{b} = \beta\overline{i}' + \gamma\overline{j}'$, cu $\beta \in \mathbf{R}$, α, $\gamma > 0$. Rezultă

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i}' & \overline{j}' & \overline{k}' \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \alpha\gamma\overline{k}'$$

şi atunci $\overline{a}\times\overline{b}$ şi $\overline{k}'$ au acelaşi sens. Mai mult, matricea de trecere de la baza $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ la baza $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{a}\times\overline{b}\}$ este

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma \end{pmatrix}$$

şi atunci avem $\det C = \alpha^2\gamma^2 > 0$. Prin urmare bazele $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ şi $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{a}\times\overline{b}\}$ sunt la fel orientate. Cum $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ sunt la fel orientate rezultă că bazele $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{a}\times\overline{b}\}$ şi $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ au aceeaşi orientare. ■

Observaţia 5.3.2 *Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, atunci aria triunghiului ABC este $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|\right|$, deoarece este jumătate din aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{AB}$ si $\overline{AC}$.*

Exemplul 5.3.1 *În V^3 se dă baza ortonormată $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi A, B, $C \in E_3$ aşa încât $\overline{AB} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{AC} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$. Se cere lungimea înălţimii din C a triunghiului ABC.*

Rezolvare:

Dacă notăm cu h_C lungimea înălţimii din C a triunghiului ABC atunci $h_C = \frac{2\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{||\overline{AB}||}$. Dar $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|\right| = \frac{1}{2}\sqrt{38}$, deoarece $\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k}$. Cum $\left|\left|\overline{AB}\right|\right| = \sqrt{14}$, rezultă $h_C = \sqrt{\frac{19}{7}}$.

Definiţia 5.3.4 *Aplicaţia $[\ ,\ ,\ ] : V^3\times V^3\times V^3 \to \mathbf{R}$, definită prin*

*$[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = \left\langle \overline{a}, \overline{b}\times\overline{c}\right\rangle$, oricare ar fi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$, se numeşte **produs mixt** în V^3, iar scalarul $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]$ se numeşte **produsul mixt** al vectorilor liberi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.*

Dacă $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este o bază ortonormată a lui V^3, iar $\overline{a} = a^1\overline{i} + a^2\overline{j} + a^3\overline{k}$, $\overline{b} = b^1\overline{i} + b^2\overline{j} + b^3\overline{k}$, $\overline{c} = c^1\overline{i} + c^2\overline{j} + c^3\overline{k}$, obţinem uşor că

$$[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Propoziţia 5.3.4 *a) Produsul mixt este o aplicaţie liniară în fiecare argument.*

b) Oricare ar fi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$, avem $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}] = [\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}]$.

c) $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$, avem $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = -[\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}]$, $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = -[\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}]$, $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = -[\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}]$.

d) Produsul mixt al vectorilor necoplanari $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$ este egal, în valoare absolută, cu volumul paralelipipedului construit pe reprezentaţii, cu originea comună, ai celor trei vectori liberi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

e) $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = 0$ dacă şi numai dacă vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt liniar dependenţi (adică coplanari).

Demonstraţie. a) , b), c) rezultă imediat din formula (3) şi proprietăţile

determinanţilor.

d) Fie $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$. Atunci $|[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]| = |\langle \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} \rangle| = ||\overline{a}|| \cdot \left|\left|\overline{b} \times \overline{c}\right|\right| \cdot \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}}) = \left|\left|\overline{b} \times \overline{c}\right|\right| \cdot \left|pr_{\overline{b} \times \overline{c}}\overline{a}\right|$ care este chiar volumul paralelipipedului construit pe $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.

e) $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = 0 \Longleftrightarrow$volumul paralelipipedului construit pe $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ este nul, adică vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt coplanari. ■

Observaţia 5.3.3 *Oricare ar fi punctele A, B, C, D, necoplanare, volumul tetraedrului $ABCD$ este dat de egalitatea*

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}]|.$$

Exerciţiul 5.3.1 *Dacă $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$ sunt arbirar fixaţi, atunci arătaţi că*

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle \overline{b} - \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \overline{c}.$$

*Vectorul $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ se numeşte **dublul produs vectorial** al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.*

Exerciţiul 5.3.2 *Arătaţi că pentru orice $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in V^3$ are loc identitatea*

$$\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{d} \rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{d} \rangle \end{vmatrix} \quad \textit{(identitatea lui Lagrange)}.$$

5.4 Repere carteziene ortonormate în E_3

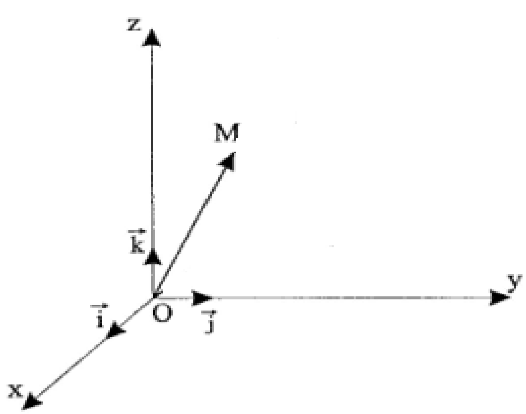
Fie O un punct fixat în E_3. Aplicaţia $h : E_3 \to V^3$ definită prin $h(M) = \overline{r}$, unde $\overline{r} = \overline{OM}$, pentru orice punct $M \in E_3$, este bijectivă (a se vedea că pentru orice punct O şi orice vector liber $\overline{r}$, există un singur punct M astfel ca $\overline{r} = \overline{OM}$). Astfel, putem da definiţia:

Definiţia 5.4.1 *Vectorul $\overline{r} = \overline{OM}$ se numeşte **vectorul de poziţie** al punctului M faţă de punctul O (sau **raza vectoare** a lui M faţă de O).*

Definiţia 5.4.2 *Se numeşte **reper cartezian ortonormat** în E_3 perechea $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, în care $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este o bază ortonormată în V^3, numită **baza** reperului, iar O este un punct fixat în spaţiul E_3, numit **originea** reperului.*

Pentru orice punct $M \in E_3$ există scalarii reali x, y, z, unici, astfel încât $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Mai mult, având în vedere cele de mai sus avem că aplicaţia $g : E_3 \to \mathbf{R}^3$, definită prin $g(M) = (x, y, z)$, oricare ar fi $M \in E_3$ (unde x, y, z sunt coordonatele vectorului de poziţie $\overline{OM}$ al lui M în raport cu baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$) este bijectivă. Astfel, are sens definiţia:

Definiţia 5.4.3 *Coordonatele x, y, z ale vectorului $\overline{r} = \overline{OM}$ în raport cu baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ se numesc **coordonatele carteziene euclidiene** ale punctului $M \in E_3$ în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.*



Vom scrie $M(x, y, z)$ sau $M(\overline{r})$ sau $M_{\mathcal{R}}(x, y, z)$, $M_{\mathcal{R}}(\overline{r})$. Matriceal, vom scrie $\widetilde{M_{\mathcal{R}}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Fie d o dreaptă în E_3 şi O, $A \in d$ două puncte fixate. Dacă notăm $\overline{a} = \overline{OA}$, atunci vom spune că perechea $(d, \overline{a})$ este o dreaptă orientată. Sensul de deplasare pe dreaptă dat de sensul lui $\overline{a}$ se numeşte **sens pozitiv**, iar sensul de deplasare pe d dat de sensul lui $-\overline{a}$ se numeşte **sens negativ**.

Reperului cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ îi ataşăm **axele de coordonate** Ox, Oy, Oz (originea fiecăreia fiind punctul O, sensul pozitiv al lor fiind acelaşi cu al versorilor $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$). Cele trei axe se numesc, respectiv, **axa absciselor**, **axa ordonatelor**, **axa cotelor**. Planele $xOy = (Ox, Oy)$, $yOz = (Oy, Oz)$, $zOx = (Oz, Ox)$ se numesc **planele de coordonate**.

Se obişnuieşte ca reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ să fie precizat şi prin notaţia $Oxyz$, adică s-a dat o terna ordonată de axe ortogonale două câte două, care trec prin acelaşi punct O, versorii $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ subînţelegându-se.

Coordonatele carteziene euclidiene (pe scurt, coordonatele) x, y, z ale punctului M faţă de reperul $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ se numesc, respectiv, **abscisa**, **ordonata** şi **cota** punctului M.

Propoziţia 5.4.1 *Oricare ar fi punctele $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2) \in E_3$ au loc următoarele egalităţi:*

a) $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}$;

b) $d(A, B) = \left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

c) Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Demonstraţie. a) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k} - (x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}) = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}$.

b) Se ţine seama de a) şi de faptul ca baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este ortonormată.

c) Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci $\overline{AM} = \overline{MB}$ şi astfel, conform a), avem $(x_M - x_1)\overline{i} + (y_M - y_1)\overline{j} + (z_M - z_1)\overline{k} = (x_2 - x_M)\overline{i} + (y_2 - y_M)\overline{j} + (z_2 - z_M)\overline{k}$, adică $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_M = \frac{z_1+z_2}{2}$. ■

Exemplul 5.4.1 *Dacă $A(1, -1, 3)$ şi $B(0, 1, 5)$, atunci $\overline{AB} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $d(A, B) = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, iar mijlocul lui $[AB]$ este $M(\frac{1}{2}, 0, 4)$.*

Definiţia 5.4.4 *Numim **reper cartezian ortonormat** în planul E_2 perechea $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}\}$, formată din $O \in E_2$, un punct fixat şi o bază ortonormată $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ a lui V^2.*

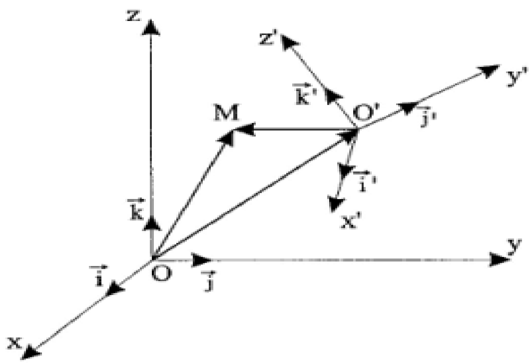
Restul noţiunilor se introduc într-un mod similar şi chiar mai simplu decât în cazul E_3.

În continuare, fie $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ un reper cartezian ortonormat în spaţiul E_3. De multe ori este necesară înlocuirea reperului $\mathcal{R}$ cu un altul, tot cartezian ortonormat. Ne propunem să stabilim legătura dintre coordonatele unui punct raportat la reperul dat şi coordonatele aceluiaşi punct raportat la un alt reper, cunoscând poziţia noului reper faţă de reperul $\mathcal{R}$. Precizăm că toate rezultatele obţinute se transcriu într-un mod similar, mai simplu, pentru cazul planului E_2.

Fie $\mathcal{R}' = \{O'; \overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ un alt reper cartezian ortonormat în E_3 astfel încât $\overline{a} = \overline{OO'} = a^1\overline{i} + a^2\overline{j} + a^3\overline{k}$, $\overline{i}' = \alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{21}\overline{j} + \alpha_{31}\overline{k}$, $\overline{j}' = \alpha_{12}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j} + \alpha_{32}\overline{k}$, $\overline{k}' = \alpha_{13}\overline{i} + \alpha_{23}\overline{j} + \alpha_{33}\overline{k}$.

Matricea $C = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ de trecere de la baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ la baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ este ortogonală şi deci $C^{-1} = C^t$.

Oricare ar fi punctul M care în raport cu reperul $\mathcal{R}$ are coordonatele x, y, z, iar în raport cu reperul $\mathcal{R}'$ are coordonatele x', y', z', avem $\overline{OM} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ şi $\overline{O'M} = x'\overline{i}'+y'\overline{j}'+z'\overline{k}'$. Întrucât $\overline{OM} = \overline{OO'}+\overline{O'M}$, adică $x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k} = a^1\overline{i}+a^2\overline{j}+a^3\overline{k}+x'(\alpha_{11}\overline{i}+\alpha_{21}\overline{j}+\alpha_{31}\overline{k})+y'(\alpha_{12}\overline{i}+\alpha_{22}\overline{j}+\alpha_{32}\overline{k})+z'(\alpha_{13}\overline{i}+\alpha_{23}\overline{j}+\alpha_{33}\overline{k})$.



Din unicitatea scrierii unui vector în raport cu o bază obţinem

$$\begin{cases} x = a^1 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\ y = a^2 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\ z = a^3 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{cases}, \tag{4}$$

egalităţi care se pot scrie, echivalent, sub forma matriceală

$$\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = \widetilde{a}_{\mathcal{B}} + C\widetilde{x}_{\mathcal{B}'}, \tag{4'}$$

unde $\widetilde{x}_{\mathcal{B}} = (x, y, z)^t$, $\widetilde{a}_{\mathcal{B}} = \left(a^1, a^2, a^3\right)^t$, $\widetilde{x}_{\mathcal{B}'} = (x', y', z')^t$.
Egalitatea (4') se poate scrie

$$\widetilde{x}_{\mathcal{B}'} = -C^t\widetilde{a}_{\mathcal{B}} + C^t\widetilde{x}_{\mathcal{B}}. \tag{4''}$$

Avem următoarele cazuri particulare:

1) Dacă $\overline{i}' = \overline{i}$, $\overline{j}' = \overline{j}$, $\overline{k}' = \overline{k}$, atunci spunem că reperul $\mathcal{R}'$ se obţine din reperul $\mathcal{R}$ printr-o **translaţie**. Ţinând seama că $C = I_3$ relaţiile (4) devin

$$\begin{cases} x = a^1 + x' \\ y = a^2 + y' \\ z = a^3 + z' \end{cases}.$$

2) Dacă $O' = O$, adică $\overline{a} = \overline{0}$, atunci relaţiile (4) devin

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{cases}.$$

Dacă baza $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ este pozitiv orientată (adică $\det C = 1$), atunci spunem că reperul $\mathcal{R}'$ se obţine din reperul $\mathcal{R}$ printr-o **rotaţie**. Dacă baza $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ este negativ orientată (adică $\det C = -1$), atunci spunem că reperul $\mathcal{R}'$ se obţine din reperul $\mathcal{R}$ printr-o **rotaţie urmată de o simetrie faţă de un plan**.

3) Dacă $O = O'$, $\overline{k} = \overline{k}'$ şi $\det C = 1$ (adică, dacă $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, $\alpha_{33} = 1$ şi $\det C = 1$), atunci relaţiile (4) devin

$$\begin{cases} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' \\ z &= z' \end{cases}.$$

Spunem că reperul $\mathcal{R}'$ se obţine din reperul $\mathcal{R}$ printr-o **rotaţie în jurul axei** Oz.

Fie θ unghiul dintre axele Ox şi Ox' (adică unghiul versorilor $\overline{i}$ şi $\overline{i}'$). Atunci, din $\overline{i}' = \alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{21}\overline{j}$ (înmulţind scalar, succesiv, cu $\overline{i}$ si $\overline{j}$) obţinem $\alpha_{11} = \cos\theta$, $\alpha_{21} = \sin\theta$, iar din $\overline{j}' = \alpha_{12}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j}$, obţinem $\alpha_{12} = -\sin\theta$, $\alpha_{22} = \cos\theta$. Astfel, relaţiile (4) se scriu

$$\begin{cases} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ z &= z' \end{cases}.$$

Exemplul 5.4.2 *Să se scrie formulele de schimbare de coordonate când se trece de la reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ la reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \{O; \overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$, unde $\overline{i}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{k}$, $\overline{j}'$ este un versor în planul xOy, ortogonal pe $\overline{i}'$, iar $\overline{k}'$ este ales astfel încât baza $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ sa fie ortonormată având aceeaşi orientare cu baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.*

Rezolvare:

Versorul $\overline{j}'$ fiind în planul xOy se scrie $\overline{j}' = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j}$, unde scalarii reali α, β se determină din condiţiile $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ şi $\left\langle \overline{i}', \overline{j}' \right\rangle = 0$. Rezultă $\overline{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ sau $\overline{j}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$.

Cazul I) Dacă luăm $\overline{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ şi alegem $\overline{k}' = \overline{i}' \times \overline{j}'$, atunci $\overline{k}' = \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{k}$ şi baza ortonormată $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ este pozitiv orientată. Formulele de schimbare a coordonatelor (4) se scriu

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}z' \end{cases}.$$

Cazul II) Dacă luăm $\overline{j}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}$ şi alegem $\overline{k}' = \overline{i}' \times \overline{j}'$, atunci $\overline{k}' = -\frac{1}{\sqrt{6}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{k}$ şi baza ortonormată $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ este pozitiv orientată.

Formulele de schimbare a coordonatelor (4) se scriu

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \end{cases} .$$

În ambele cazuri reperul $\mathcal{R}'$ se obţine din reperul $\mathcal{R}$ printr-o rotaţie ($O' = O$ şi $\det C = 1$).

5.5 Probleme propuse spre rezolvare

1. În spaţiul punctual tridimensional E_3, în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dau punctele $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,1,1)$.

   a) Arătaţi că $\mathcal{R}' = \{A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$ este un reper cartezian în E_3. Este $\mathcal{R}'$ reper ortonormat?

   b) Să se determine coordonatele punctului $M(1,2,3)$ în raport cu noul reper $\mathcal{R}'$.

2. În spaţiul punctual tridimensional E_3, în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dau punctele $A(1,-1,1)$, $B(1,0,1)$, $C(-1,2,1)$, $D(0,1,2)$.

   a) Arătaţi că A, B, C, D sunt necoplanare;

   b) Calculaţi volumul tetraedrului $ABCD$;

   c) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul determinat de punctele B, C, D.

3. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} - \alpha\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

   a) Să se găsească valoarea lui α astfel încât vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ să fie coplanari;
   b) Pentru $\alpha = 2$, să se afle înălţimea paralelipipedului construit pe reprezentanţii vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, înălţime corespunzătoare bazei formate de reprezentaţii vectorilor $\bar{a}, \bar{b}$.

4. În spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi vectorul $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin $f(\bar{x}) = \bar{a} \times \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in V^3$. Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară;

   b) Scrieţi matricea lui f relativ la baza $\mathcal{B}$;

   c) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

   d) Este adevărat că $Ker\ f \oplus Im\ f = V^3$? Justificare;

   e) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

5. În spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi vectorii $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin $f(\overline{x}) = (\overline{a} \times \overline{x}) \times \overline{b}$, $\forall \overline{x} \in V^3$. Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară;

   b) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

6. În spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi vectorii $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin

$$f(\overline{x}) = < \overline{a}, \overline{x} > \overline{b} + < \overline{b}, \overline{x} > \overline{a}, \forall \overline{x} \in V^3.$$

   Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară;

   b) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

7. În spaţiul vectorilor liberi V^3 se consideră baza ortonormată $\mathcal{B} = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ şi vectorii $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Fie $f : V^3 \to V^3$ definită prin

$$f(\overline{x}) = \overline{a} \times \overline{x} + \overline{x} \times \overline{b}, \forall \overline{x} \in V^3.$$

   Se cere:

   a) Arătaţi că f este o aplicaţie liniară;

   b) Găsiţi câte o bază şi dimensiunea pentru $Ker\ f$ şi $Im\ f$;

   c) Este f un endomorfism diagonalizabil? Justificare.

8. Fie punctul $M(1, 4, 5)$ dat relativ la reperul cartezian ortonormat $Oxyz$.

   a) Să se afle coordonatele lui M relativ la reperul cartezian ortonormat $O'x'y'z'$ obţinut din reperul $Oxyz$ printr-o translaţie de vector $\overline{OO'} = 3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$;

   b) Să se afle coordonatele lui M relativ la reperul cartezian ortonormat $Ox'y'z'$ obţinut din reperul $Oxyz$ printr-o rotaţie de unghi $\frac{\pi}{4}$ în jurul axei Oz.

9. În planul E_2 se dă punctul $A(-\sqrt{3}, 1)$, relativ la reperul cartezian ortonormat Oxy. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul cartezian ortonormat Oxy la reperul cartezian ortonormat $Ox'y'$ aşa încât punctul A să se afle pe axa Ox'. Determinaţi şi coordonatele lui A faţă de noul reper.

10. Fie $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ trei vectori liberi din spaţiu. Numărul real

$$G(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} < \overline{a}, \overline{a} > & < \overline{a}, \overline{b} > & < \overline{a}, \overline{c} > \\ < \overline{b}, \overline{a} > & < \overline{b}, \overline{b} > & < \overline{b}, \overline{c} > \\ < \overline{c}, \overline{a} > & < \overline{c}, \overline{b} > & < \overline{c}, \overline{c} > \end{vmatrix}$$

se numeşte **determinantul Gram** al vectorilor $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

a) Arătaţi că $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]^2 = G(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, pentru orice $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$;

b) Arătaţi că $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $G(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$.

Capitolul 6

Dreapta şi planul în spaţiu

Pe parcursul întregului capitol presupunem fixat, arbitrar, un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în E_3, în raport cu care vor fi date punctele, dreptele şi planele din spaţiul E_3.

6.1 Dreapta în spaţiu

6.1.1 Reprezentări analitice ale dreptei

În spaţiu, ţinând cont de axiomele geometriei, o dreaptă este unic determinată în trei moduri: printr-un punct şi o dreaptă, prin două puncte distincte şi ca intersecţie a două plane. Din motive evidente, vom prezenta acum doar primele două modaliăţi, urmând ca în secţiunea următoare să o prezentăm şi pe a treia.

Fie $\overline{a} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$ şi $M_0 \in E_3$. Atunci, există o singură dreaptă d care conţine punctul M_0 şi are direcţia vectorului $\overline{a}$. Evident, un punct $M \in E_3$ aparţine dreptei d dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ şi $\overline{a}$ sunt coliniari. Cu alte cuvinte, $M \in d$ dacă şi numai dacă există $t \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overline{M_0M} = t\overline{a}$. Dacă vectorul de poziţie al punctului M_0 este $\overline{r}_0$, atunci punctul $M(\overline{r}) \in d$ dacă şi numai dacă există $t \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overline{r} - \overline{r}_0 = t\overline{a}$. Astfel, când t parcurge $\mathbf{R}$, punctul M, de rază vectoare $\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}$, descrie dreapta d. De aceea, ecuaţia

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}, \quad t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

se numeşte **ecuaţia vectorială parametrică** a dreptei care trece prin punctul $M_0(\overline{r}_0)$ şi are direcţia vectorului $\overline{a}$.

Vectorul $\overline{a}$ se numeşte **vector director** al dreptei d. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$, adică $\overline{r}_0 = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$, iar $\overline{a} = a^1\overline{i} + a^2\overline{j} + a^3\overline{k}$, atunci ecuaţia (1) este echivalentă cu ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x_0 + ta^1 \\ y = y_0 + ta^2 \\ z = z_0 + ta^3 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

numite **ecuaţiile scalare parametrice** ale dreptei d.

Coordonatele a^1, a^2, a^3 ale vectorului director $\overline{a}$ se numesc **parametrii directori** ai dreptei d.

Ecuaţiile (2) se pot scrie sub forma

$$\frac{x-x_0}{a^1}=\frac{y-y_0}{a^2}=\frac{z-z_0}{a^3} \tag{3}$$

şi aceste ecuaţii se numesc **ecuaţiile canonice carteziene** ale dreptei d care trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi are vectorul director $\overline{a}=a^1\overline{i}+a^2\overline{j}+a^3\overline{k}$ (cel puţin una dintre coordonatele a^1, a^2, a^3 este nenulă).

Observaţia 6.1.1 *Dacă în ecuaţiile (3) un numitor este nul, atunci şi numărătorul se va egala cu zero. De exemplu, dacă $a^2=0$ atunci ecuaţiile(3) devin*

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a^1}=\frac{z-z_0}{a^3} \\ y-y_0=0 \end{cases} . \tag{3'}$$

Exemplul 6.1.1 *Să se scrie ecuaţia vectorială parametrică, ecuaţiile scalare parametrice şi ecuaţiile canonice carteziene ale dreptei d care trece prin punctul $M_0(1,-1,4)$ şi are vectorul director $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$.*

Rezolvare:

Ecuaţia vectorială parametrică a dreptei d este $\overline{r}=\overline{i}-\overline{j}+4\overline{k}+t(3\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})$, $t\in\mathbf{R}$, ecuaţiile scalare parametrice sunt $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-1-2t \\ z=4+t \end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$, iar ecuaţiile canonice carteziene sunt $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{1}$.

Acum, dacă avem două puncte distincte $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ atunci există o singură dreaptă care trece prin cele două puncte. Ca vector director al dreptei AB putem lua vectorul $\overline{AB}=(x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}+(z_2-z_1)\overline{k}$ şi atunci putem scrie ecuaţiile dreptei AB ca fiind ecuaţiile dreptei care trece prin punctul A şi are vectorul director $\overline{AB}$, adică

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{4}$$

sau, sub formă vectorială, $\overline{r}=\overline{r}_1+t(\overline{r}_2-\overline{r}_1)$, $t\in\mathbf{R}$, unde $\overline{r}_1=\overline{OA}$, $\overline{r}_2=\overline{OB}$.

Exemplul 6.1.2 *Ecuaţiile canonice carteziene ale dreptei ce trece prin punctele $A(1,-2,3)$, $B(3,-1,5)$ sunt $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{-1+2}=\frac{z-3}{5-3}$, adică $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{2}$.*

Fie $\overline{a}^0=\frac{1}{||\overline{a}||}\overline{a}$ versorul asociat vectorului director $\overline{a}$ al dreptei d. Dacă α, β, γ sunt unghiurile versorului $\overline{a}^0$ cu versorii $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, atunci $\overline{a}^0=\cos\alpha\overline{i}+\cos\beta\overline{j}+\cos\gamma\overline{k}$. Cum $\left|\left|\overline{a}^0\right|\right|=1$ atunci $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Scalarii $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se numesc **cosinusurile directoare** ale dreptei d.

6.1.2 Distanţa de la un punct la o dreaptă. Unghiul a două drepte

Fie d dreapta de ecuaţie vectorială $\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}$, $t \in R$ şi $M \in E_3$ un punct arbitrar fixat. Dacă notăm cu M_0 punctul de pe dreapta d care are vectorul de poziţie $\overline{r}_0$, atunci distanţa de la M la dreapta d (notată prin $d(M,d)$) este egală cu înălţimea paralelogramului format de vectorii $\overline{M_0A}$ si $\overline{M_0M}$, unde $A \in d$ astfel ca $\overline{M_0A} = \overline{a}$. Cum aria acestui paralelogram este egală cu $\left|\left|\overline{a} \times \overline{M_0M}\right|\right|$ sau cu $||\overline{a}|| \cdot d(M,d)$, rezultă că

$$d(M,d) = \frac{\left|\left|\overline{a} \times \overline{M_0M}\right|\right|}{||\overline{a}||}. \tag{5}$$

Exemplul 6.1.3 *Să se calculeze distanţa de la punctul $M(1,2,-1)$ la dreapta $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}$.*

Rezolvare:

Fie $M_0(1,0,-3)$ un punct al dreptei d. Atunci $\overline{M_0M} = 2\overline{j} + 2\overline{k}$. Ţinând seama că $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ obţinem $\overline{a} \times \overline{M_0M} = 4\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$. Deci $d(M,d) = \frac{\left|\left|\overline{a}\times\overline{M_0M}\right|\right|}{||\overline{a}||} = \frac{\sqrt{3\cdot16}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$.

Definiţia 6.1.1 *Se numeşte **unghi** al dreptelor orientate d_1, d_2 de vectori directori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2 \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$, unghiul vectorilor directori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$.*

Fie $\theta \in [0,\pi]$ unghiul format de vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$. Atunci, unghiul dreptelor d_1, d_2 este dat de formula

$$\cos\theta = \frac{\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle}{\|\overline{a}_1\| \cdot \|\overline{a}_2\|}. \tag{6}$$

Exemplul 6.1.4 *Să se calculeze unghiul dreptelor $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ şi $d : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.*

Rezolvare:

Vectorii directori ai celor două drepte fiind, respectiv, $\overline{a}_1 = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{a}_2 = -\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, avem că $\cos\theta = \frac{-2-2+3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{2\sqrt{21}}$, adică $\theta = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{21}}$.

6.1.3 Poziţia relativă a două drepte

Două drepte d_1, d_2 în spaţiu pot fi coplanare (adică există un plan care le conţine) sau necoplanare (nu sunt conţinute într-un plan). Dacă dreptele d_1, d_2 sunt coplanare, atunci ele pot fi paralele ($d_1 \| d_2$) sau confundate ($d_1 = d_2$), ceea ce înseamnă că vectorii lor directori sunt coliniari, sau pot fi concurente ($d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$), ceea ce înseamnă că vectorii lor directori nu sunt coliniari. Un criteriu necesar şi suficient ca două drepte să fie coplanare este următorul:

Propoziţia 6.1.1 *Dreptele* $d_1 : \overline{r} = \overline{r}_1 + t\overline{a}_1$*,* $t \in \mathbf{R}$*,* $d_2 : \overline{r} = \overline{r}_2 + t\overline{a}_2$*,* $t \in \mathbf{R}$ *sunt coplanare dacă şi numai dacă* $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{r}_2 - \overline{r}_1] = 0$*.*

Demonstraţie. Dacă dreptele d_1, d_2 sunt coplanare, atunci avem două situaţii:

1) Dacă d_1, d_2 sunt paralele (sau confundate), atunci vectorii directori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ sunt coliniari şi deci $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{r}_2 - \overline{r}_1] = 0$.

2) Dacă d_1, d_2 sunt concurente, atunci fie $M_1 \in d_1$ şi $M_2 \in d_2$ puncte ai căror vectori de poziţie sunt $\overline{r}_1$, respectiv $\overline{r}_2$. Dreptele fiind concurente, vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \overline{M_1M_2}$ sunt coplanari (fiind în planul determinat de dreptele d_1, d_2) şi deci, din nou avem $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{r}_2 - \overline{r}_1] = 0$.

Reciproc, presupunem că $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{r}_2 - \overline{r}_1] = 0$, adică vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{r}_2 - \overline{r}_1$ sunt coplanari. Sunt posibile două situaţii:

1) Dacă $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ sunt coliniari, atunci rezultă că dreptele sunt paralele sau confundate, adică coplanare.

2) Dacă $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ sunt necoliniari, atunci există scalarii reali α, β, γ, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2 + \gamma(\overline{r}_2 - \overline{r}_1) = \overline{0}$, pentru că $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{r}_2 - \overline{r}_1$ sunt coplanari. Este clar că $\gamma \neq 0$ (altfel $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ ar fi coliniari) şi atunci avem $t_1\overline{a}_1 + \overline{r}_1 = t_2\overline{a}_2 + \overline{r}_2$, unde $t_1 = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $t_2 = \frac{\beta}{\gamma}$. Prin urmare, există un punct M_0 de vector de poziţie $\overline{r}_0 = t_1\overline{a}_1 + \overline{r}_1 = t_2\overline{a}_2 + \overline{r}_2$ care este situat atât pe d_1 cât şi pe d_2, adică dreptele d_1, d_2 sunt concurente şi, deci, coplanare. ■

Exemplul 6.1.5 *Să se studieze poziţia relativă a dreptelor* $d_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ *şi* $d_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

Rezolvare:

Vectorii directori ai celor două drepte sunt $\overline{a}_1 = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ *şi* $\overline{a}_2 = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$*, iar* $M_1(2, 1, 0) \in d_1$ *şi* $M_2(0, -1, 1) \in d_2$*. Atunci* $\overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \overline{M_1M_2} = -2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ *şi astfel* $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{r}_2 - \overline{r}_1] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$*. Prin urmare, dreptele* d_1*,* d_2 *sunt necoplanare.*

6.2 Planul în spaţiu

6.2.1 Reprezentări analitice ale planului

O dreaptă d perpendiculară pe un plan π se numeşte **normală** la planul π, iar vectorul său director $\overline{n}$ se numeşte **vector normal** al planului π.

Ţinând cont şi de axiomele geometriei în spaţiu, un plan este unic determinat în trei moduri: printr-un punct şi un vector normal, printr-un punct şi doi vectori necoliniari şi prin trei puncte necoliniare.

Fie punctul $M_0(\overline{r}_0)$, unde $\overline{r}_0 = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$ şi vectorul nenul $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$. Este clar că există un singur plan π care trece prin M_0 şi are vectorul normal $\overline{n}$. Atunci un punct oarecare $M(\overline{r})$, unde $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, aparţine planului π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0$ şi $\overline{n}$ sunt ortogonali, adică

$$\langle \overline{r} - \overline{r}_0, \overline{n} \rangle = 0. \tag{1}$$

Se spune că (1) este **ecuaţia vectorială** a planului care trece prin punctul $M_0(\overline{r}_0)$ şi are vectorul normal $\overline{n}$.

Dacă utilizăm coordonatele carteziene, ecuaţia (1) este echivalentă cu

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

adică ecuaţia planului π este o ecuaţie de gradul întâi în x, y, z.

Are loc şi afirmaţia reciprocă:

Propoziţia 6.2.1 *Orice ecuaţie de grad întâi în x, y, z, $Ax+By+Cz+D = 0$, cu A, B, C, $D \in \mathbf{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, reprezintă un plan.*

Demonstraţie. Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ o soluţie a ecuaţiei $Ax+By+Cz+D = 0$, adică $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Scăzând $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ din $Ax + By + Cz + D = 0$ obţinem $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, adică ecuaţia (2). ■

Corolarul 6.2.1 *Un plan este caracterizat analitic printr-o ecuaţie de forma*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

*cu A, B, C, $D \in \mathbf{R}$, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, ecuaţie numită **ecuaţia carteziană generală** a planului de vector normal $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$.*

Observaţia 6.2.1 *Ecuaţia unui plan paralel cu planul $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$ este $Ax + By + Cz + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.*

Exemplul 6.2.1 *Ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(-1, 3, 5)$ şi de vector normal $\overline{n} = 3\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ este $3(x + 1) + (y - 3) - 2(z - 5) = 0$, adică $3x + y - 2z + 10 = 0$.*

Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii necoliniari $\overline{a}$, $\overline{b}$. Fie A, $B \in E_3$ aşa încât $\overline{a} = \overline{M_0A}$, $\overline{b} = \overline{M_0B}$. Întrucât, vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt necoliniari rezultă că dreptele concurente M_0A şi M_0B determină un plan unic π. Evident, un punct M aparţine planului π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{MM_0}$, $\overline{M_0A}$, $\overline{M_0B}$ sunt coplanari, adică $[\overline{M_0M}, \overline{a}, \overline{b}] = 0$. Dacă $\overline{r} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, atunci punctul $M(\overline{r})$, $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, aparţine planului π dacă şi numai dacă $[\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{a}, \overline{b}] = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

unde $\overline{a} = a^1\overline{i} + a^2\overline{j} + a^3\overline{k}$, $\overline{b} = b^1\overline{i} + b^2\overline{j} + b^3\overline{k}$. Vectorii necoliniari $\overline{a}$, $\overline{b}$ se numesc **vectori directori** ai planului π.

Exemplul 6.2.2 *Ecuaţia planului care trece prin punctul $M(2,1,4)$ şi are vectorii directori $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}-4\overline{k}$ este* $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0$, *adică $x+2y+z-8=0$.*

Observaţia 6.2.2 *Remarcând că $\overline{a}\times\overline{b}$ este un vector normal la planul π care trece prin M_0 şi are vectorii directori $\overline{a}$, $\overline{b}$, ecuaţia (1) se poate scrie sub forma $[\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{a},\overline{b}]=0$, adică vectorii $\overline{r}-\overline{r}_0$, $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coplanari. Prin urmare (4) este echivalentă cu*

$$\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{a}+s\overline{b},\quad s,t\in\mathbf{R} \tag{5}$$

*numită **ecuaţia vectorială parametrică** a planului π care trece prin punctul $M_0(\overline{r}_0)$ şi are vectorii directori $\overline{a}$, $\overline{b}$. Ecuaţia (5) este echivalentă cu*

$$\begin{cases} x=x_0+ta^1+sb^1 \\ y=y_0+ta^2+sb^2 \\ z=z_0+ta^3+sb^3 \end{cases},\quad t,s\in\mathbf{R} \tag{5'}$$

*şi acestea se numesc **ecuaţiile scalare parametrice** ale planului π.*

Fie $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ trei puncte necoliniare. Se ştie că ele determină un plan unic π. Punctul $M(x,y,z)$ aparţine planului π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_2}$, $\overline{MM_3}$ sunt coplanari, adică

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

Ecuaţia planului care trece prin punctele $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, a, b, $c\in\mathbf{R}$, este

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0,$$

adică

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0. \tag{7}$$

În acest caz, se spune ca planul este dat prin "**tăieturile**" sale pe axele reperului.

6.2.2 Distanţa de la un punct la un plan. Unghiul a două plane

Fie planul π de ecuaţie carteziană generală $Ax+By+Cz+D=0$ şi punctul $M(x_0,y_0,z_0)$. Distanţa de la punctul M la planul π, notată $d(M,\pi)$, este egală cu $\left\|\overline{MM'}\right\|$, unde $M'(x',y',z')$ este proiecţia ortogonală a punctului M pe planul

π. Fie $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ un vector normal al planului π. Cum vectorii $\overline{n}$, $\overline{MM'}$ sunt coliniari, rezultă că $\left|\langle \overline{MM'}, \overline{n}\rangle\right| = \left\|\overline{MM'}\right\| \cdot \|\overline{n}\| \left|\cos\varphi\right| = \left\|\overline{MM'}\right\| \cdot \|\overline{n}\|$, deoarece măsura unghiului φ dintre $\overline{MM'}$ şi $\overline{n}$ este 0^0 sau 180^0. Atunci, ţinând cont că $\overline{MM'} = (x'-x_0)\overline{i} + (y'-y_0)\overline{j} + (z'-z_0)\overline{k}$, rezultă că $d(M,\pi) = \frac{\left|A(x'-x_0)+B(y'-y_0)+C(z'-z_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, pentru că $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ ($M' \in \pi$).

Prin urmare, **distanţa** de la punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ la planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ este

$$d(M,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{8}$$

Exemplul 6.2.3 *Distanţa de la punctul* $M(3, -1, 5)$ *la planul* $\pi : 2x + y + z + 4 = 0$ *este* $d(M,\pi) = \frac{|2\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 5+4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$.

Definiţia 6.2.1 *Fie planele* π_1, π_2 *de vectori normali* $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$. *Se numeşte* ***unghi*** *al planelor* π_1, π_2 *unghiul vectorilor normali* $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$.

Mai precis, unghiul θ al planelor $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ este dat de formula:

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{9}$$

Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ atunci spunem că planele sunt **ortogonale**. Din (9) rezultă condiţia de ortogonalitate a planelor π_1, π_2:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{9'}$$

Dacă d este o dreaptă de vector director $\overline{a}$ şi π un plan de vector normal $\overline{n}$, atunci unghiul θ format de dreapta d cu planul π este, prin definiţie, unghiul format de dreapta d cu proiecţia ei ortogonală pe planul π, adică $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\langle \overline{a}, \overline{n}\rangle}{\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{n}\|}$, deoarece $\frac{\pi}{2} - \theta$ este unghiul format de vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{n}$.

6.2.3 Poziţia relativă a două plane

Se ştie că două plane în E_3 pot fi confundate, paralele sau secante.

Fie planele $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Atunci:

1) Planele π_1, π_2 sunt confundate ($\pi_1 = \pi_2$) dacă şi numai dacă sistemul liniar

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

este compatibil dublu nedeterminat, adică, conform teoremei Kronecker-Capelli, dacă şi numai dacă

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1,$$

ceea ce este echivalent cu egalităţile:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{11}$$

2) Planele π_1, π_2 sunt paralele ($\pi_1 \| \pi_2$) dacă şi numai dacă sistemul liniar (10) este incompatibil, adică conform teoremei Kronecker-Capelli, dacă şi numai dacă

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \text{ şi } rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2,$$

ceea ce este echivalent cu :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \tag{11'}$$

3) Planele π_1, π_2 sunt secante ($\pi_1 \cap \pi_2 = d$, o dreaptă) dacă şi numai dacă sistemul liniar (10) este compatibil simplu nedeterminat, adică, conform teoremei Kronecker-Capelli, dacă şi numai dacă

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

În acest caz intersecţia planelor π_1, π_2 este o dreaptă d ale cărei ecuaţii sunt chiar ecuaţiile planelor, adică

$$d = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \tag{12}$$

Vectorul director al acestei drepte este $\overline{a} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$, unde $\overline{n}_1 = A_1\overline{i} + B_1\overline{j} + C_1\overline{k}$, $\overline{n}_2 = A_2\overline{i} + B_2\overline{j} + C_2\overline{k}$ sunt vectorii normali la π_1, respectiv π_2. Mai precis,

$$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\overline{k}. \tag{13}$$

6.2.4 Fascicule de plane

Definiţia 6.2.2 *Se numeşte **fascicul de plane** mulţimea tuturor planelor care trec printr-o dreaptă dată numită **axa** fasciculului.*

Propoziţia 6.2.2 *Dacă dreapta d este dată ca intersecţia planelor $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, atunci fasciculul de plane cu axa d este caracterizat analitic prin ecuaţia*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (14)$$

unde λ, $\mu \in \mathbf{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Demonstraţie. Oricare ar fi λ, $\mu \in \mathbf{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, ecuaţia (14) reprezintă ecuaţia unui plan.

a) Orice plan din familia de plane dată de (14) conţine dreapta d, deoarece pentru orice punct $M \in d$ coordonatele sale verifică ecuaţiile celor două plane şi în consecinţă verifică ecuaţia (14). Deci, orice plan din familia de plane dată de ecuatia (14) aparţine fasciculului de axă d.

b) Reciproc, să arătăm că orice plan π al fasciculului de axă d face parte din familia de plane dată de (14), adică există λ, $\mu \in \mathbf{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, aşa încât ecuaţia carteziană generală a planului π să fie

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Într-adevăr, planul π conţinând dreapta d va fi determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin d$ şi dreapta d. Cercetăm însă existenţa scalarilor λ, $\mu \in \mathbf{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, aşa încât ecuaţia planului π să fie (14) şi atunci, în mod necesar, trebuie ca

$$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0. \qquad (*)$$

Cum punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin d$, rezultă că sunt posibile numai următoarele cazuri:

1) Dacă $M_0 \in \pi_1$ (şi atunci $M_0 \notin \pi_2$), atunci planul π coincide cu planul π_1. Astfel ecuaţia lui π se obţine din (14) pentru $\lambda = 1$, $\mu = 0$, adică este de forma (14).

2) Dacă $M_0 \in \pi_2$ (şi atunci $M_0 \notin \pi_1$), atunci planul π coincide cu planul π_2. Astfel ecuaţia lui π se obţine din (14) pentru $\lambda = 0$, $\mu = 1$, adică este de forma (14).

3) Dacă $M_0 \notin \pi_1$ si $M_0 \notin \pi_2$, adică dacă $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 \neq 0$ şi $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 \neq 0$, atunci, conform (*), deducem că există $\lambda = -\mu\frac{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}$, pentru $\mu \in \mathbf{R}^*$.

Deci şi în acest caz există λ, $\mu \in \mathbf{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ aşa încât ecuaţia lui π să fie de forma (14). ■

Observaţia 6.2.3 *Orice plan din fasciculul de plane de axă d are o ecuţtie de tipul ecuaţiei (14) pentru anumiţi λ şi μ. Din motive practice este foarte utilizată ecuaţia*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \alpha(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \qquad (14')$$

care reprezintă tot fasciculul de plane de axă d, dar din care lipseşte planul π_2.

Exerciţiul 6.2.1 *În E_3, faţă de reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dau punctul $A(1, -1, 2)$, planul $\pi : x + y - z + 3 = 0$ şi dreapta*
$d : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. *Se cer:*
a) Ecuaţia planului care conţine dreapta d şi trece prin punctul A;
b) Ecuaţia planului care conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul π;
c) Ecuaţia planului care conţine dreapta d şi este paralel cu dreapta $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.
Rezolvare:
a) Folosim ecuaţia fasciculului de plane cu axa d sub forma

$$\pi_\alpha : 2x + y + z - 1 + \alpha(x - y + 2z + 3) = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Reţinem de aici planul care trece prin A, adică $2-1+2-1+\alpha(1+1+4+3) = 0$, de unde $\alpha = -\frac{2}{9}$. Rezultă că ecuaţia planului care trece prin dreapta d şi prin punctul A este $2x+y+z-1-\frac{2}{9}(x-y+2z+3) = 0$, adică $16x+11y+5z-15 = 0$.

b) Vectorul normal al planului π_α de mai sus este $\overline{n}_\alpha = (2+\alpha)\bar{i} + (1-\alpha)\bar{j} + (1 + 2\alpha)\overline{k}$, iar vectorul normal al planului π este $\overline{n} = \bar{i} + \bar{j} - \overline{k}$. Cum planul cerut trebuie să fie perpendicular pe π, trebuie să avem că $\langle \overline{n}_\alpha, \overline{n} \rangle = 0$, adică $2 + \alpha + 1 - \alpha - 1 - 2\alpha = 0$. Rezultă $\alpha = 1$ şi astfel ecuaţia planului căutat este $2x + y + z - 1 + x - y + 2z + 3 = 0$, adică $3x + 3z + 2 = 0$.

c) Fie $\overline{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \overline{k}$ vectorul director al dreptei d_1. Planul căutat trebuie să fie paralel cu dreapta d_1, adică vectorul său normal şi vectorul director al lui d_1 sunt ortogonali. Din $\langle \overline{n}_\alpha, \overline{a} \rangle = 0$ rezultă $\alpha = 4$ şi atunci planul care trece prin d şi este paralel cu d_1 are ecuaţia $2x + y + z - 1 + 4(x - y + 2z + 3) = 0$, adică $6x - 3y + 9z + 11 = 0$.

6.2.5 Perpendiculara comună a două drepte necoplanare. Distanţa dintre două drepte necoplanare

Fie $d_1 : \overline{r} = \overline{r}_1 + t\overline{a}_1$, $t \in \mathbf{R}$ şi $d_2 : \overline{r} = \overline{r}_2 + t\overline{a}_2$, $t \in \mathbf{R}$, două drepte necoplanare.

Definiţia 6.2.3 *Dreapta d care este perpendiculară pe fiecare din dreptele d_1, d_2 şi le intersectează pe amândouă se numeşte* ***perpendiculara comună*** *a celor două drepte.*

Este evident că putem lua $\overline{a} = \overline{a}_1 \times \overline{a}_2$ drept vector director al perpendicularei comune d a dreptelor d_1, d_2. De asemenea, este clar că dreapta d se găseşte în planul π_1 determinat de punctul $M_1(\overline{r}_1) \in d_1$ şi de vectorii directori $\overline{a}_1$, $\overline{a}$ şi în planul π_2 determinat de punctul $M_2(\overline{r}_2) \in d_2$ şi de vectorii directori $\overline{a}_2$, $\overline{a}$.

Atunci, perpendiculara comună d a dreptelor d_1, d_2 este dreapta de intersecţie a planelor π_1, π_2. Practic, $\pi_1 = (d, d_1)$ şi $\pi_2 = (d, d_2)$.

Prin urmare, dacă $\overline{a}_1 = a_1^1\bar{i} + a_1^2\bar{j} + a_1^3\overline{k}$, $\overline{a}_2 = a_2^1\bar{i} + a_2^2\bar{j} + a_2^3\overline{k}$, $\overline{a} = a^1\bar{i} + a^2\bar{j} + a^3\overline{k}$, $\overline{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{r}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\overline{k}$, atunci ecuaţiile perpendicularei comune d sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Fie P_1, P_2 punctele de intersecţie a dreptelor d_1, d_2 cu perpendiculara comună d.

Definiţia 6.2.4 *Numărul pozitiv* $\left\|\overline{P_1P_2}\right\|$ *se numeşte* ***distanţa*** *dintre dreptele* d_1*,* d_2 *şi o vom nota* $d(d_1, d_2)$*.*

În continuare, ne propunem să determinăm o formulă pentru calculul lui $d(d_1, d_2)$. Întrucât $M_i \in d_i$, $d_i \perp d$, rezultă că P_i este proiecţia ortogonală a lui M_i pe d, $i = 1, 2$. Astfel, $d(d_1, d_2) = \left\|\overline{P_1P_2}\right\| = \left|pr_{\overline{a}}\overline{M_1M_2}\right| = \frac{1}{\|\overline{a}\|}\left|\|\overline{a}\| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{M_1M_2}\right| =$
$= \frac{1}{\|\overline{a}\|}\left|\left\langle \overline{a}, pr_{\overline{a}}\overline{M_1M_2}\right\rangle\right| = \frac{1}{\|\overline{a}_1 \times \overline{a}_2\|}\left|\left\langle \overline{a}_1 \times \overline{a}_2, \overline{M_1M_2}\right\rangle\right|$. Deci

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{M_1M_2}]\right|}{\|\overline{a}_1 \times \overline{a}_2\|}. \tag{16}$$

Exerciţiul 6.2.2 *Se dau dreptele* $d_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ *şi* $d_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$*. Verificând mai întâi că* d_1*,* d_2 *sunt drepte necoplanare, să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune a lor şi să se calculeze* $d(d_1, d_2)$*.*

Rezolvare:

Pentru d_1 *avem* $\overline{a}_1 = -\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ *vector director şi* $M_1(1, 0, 1) \in d_1$*, iar pentru* d_2 *avem* $\overline{a}_2 = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ *vector director şi* $M_2(-2, 1, -2) \in d_1$*. Vectorul director al perpendicularei comune este* $\overline{a} = \overline{a}_1 \times \overline{a}_2 = -5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$*. Atunci ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor* d_1*,* d_2 *sunt*

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases},$$

iar distanţa dintre dreptele d_1*,* d_2 *este* $d(d_1, d_2) = \frac{\left|[\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{M_1M_2}]\right|}{\|\overline{a}_1 \times \overline{a}_2\|} = \frac{23}{\sqrt{35}}$.

Exerciţiul 6.2.3 *Fie punctul* $A(1, 0, 1)$ *şi dreapta* $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$*.*

a) Calculaţi distanţa de la punctul A la dreapta d.

b) Găsiţi coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului A pe dreapta d.

c) Găsiţi coordonatele simetricului punctului A faţă de dreapta d.

Rezolvare:

a) Se observă că $A_0(1,-1,0) \in d$ *şi* $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ *este un vector director pentru d. Atunci* $\overline{A_0A} = \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{A_0A} \times \overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $||\overline{A_0A} \times \overline{a}|| = \sqrt{11}$, $||\overline{a}|| = \sqrt{6}$ *şi* $\rho(A,d) = \frac{||\overline{A_0A}\times\overline{a}||}{||\overline{a}||} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$.

b) Se consideră planul π *care trece prin punctul A şi este perpendicular pe dreapta d. Atunci* $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ *este un vector normal la* π *şi* $\pi : (x-1)\cdot 1 + (y-0)\cdot 2 + (z-1)\cdot(-1) = 0$, *adică* $\pi : x + 2y - z = 0$.

Dacă se notează cu A' *proiecţia ortogonală a lui A pe d, atunci* $\{A'\} = d \cap \pi$ *şi rezolvând sistemul* $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ *se obţine* $A'\left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

c) Dacă A_1 *este simetricul lui A faţă de d, atunci* A' *este mijlocul segmentului* $[AA_1]$ *şi se obţin relaţiile* $\begin{cases} x_{A'} = \frac{x_A + x_{A_1}}{2} \\ y_{A'} = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \\ z_{A'} = \frac{z_A + z_{A_1}}{2} \end{cases}$, *adică* $A_1\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Exerciţiul 6.2.4 *Fie punctul* $A(-1,0,1)$ *şi planul* $\pi : x + y - z + 2 = 0$.

a) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul π.

b) Găsiţi coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului A pe planul π.

c) Găsiţi coordonatele simetricului punctului A faţă de planul π.

Rezolvare:

a) $\rho(A,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot1-1\cdot0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) Se consideră o dreaptă d care trece prin A şi este perpendiculară pe planul π. *Atunci d are ecuaţiile canonice carteziene* $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-1}$, *deoarece* $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ *(vector normal la* π*) este un vector director al dreptei d.*

Dacă se notează cu A' *proiecţia ortogonală a lui A pe* π, *atunci* $\{A'\} = d \cap \pi$ *şi rezolvând sistemul* $\begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1} \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ *se obţine* $A'\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

c) Dacă A_1 *este simetricul lui A faţă de* π, *atunci* A' *este mijlocul segmentului* $[AA_1]$ *şi se obţin relaţiile* $\begin{cases} x_{A'} = \frac{x_A + x_{A_1}}{2} \\ y_{A'} = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \\ z_{A'} = \frac{z_A + z_{A_1}}{2} \end{cases}$, *adică* $A_1\left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

6.3 Probleme propuse spre rezolvare

1. Se consideră punctele $A(1,3,0), B(3,-2,1), C(\alpha,1,-3), D(7,-2,3)$.
   a) Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele A, B, C, D să fie coplanare;
   b) Pentru α găsit la punctul a), să se scrie ecuaţia carteziană a planului (ABC).

2. Fie punctul $A(1,0,-1)$ şi dreptele $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$,
   $d_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

a) Studiaţi poziţia relativă a dreptelor d_1 şi d_2;

b) Dacă d_1, d_2 sunt necoplanare, atunci scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune şi calculaţi distanţa dintre d_1 şi d_2. Altfel, scrieţi ecuaţia planului determinat de cele două drepte;

c) Scrieţi ecuaţiile dreptei care trece prin A şi intersectează dreptele d_1 şi d_2.

3. Să se scrie ecuaţiile dreptei care intersectează dreptele
$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{z-4}{-1} \\ y + 1 = 0 \end{cases}$
şi este paralelă cu dreapta $d_3 : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

4. Să se scrie ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele
$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$ şi $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{\sqrt{2}}$.

5. Se consideră planul $\pi : x - y + 2z + 2 = 0$, punctul $A(0, 1, 3)$ şi dreapta $d : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$. Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin A şi conţine dreapta d;

b) Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul π;

c) Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta d şi paralel cu dreapta $g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

6. Să se scrie ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei
$d : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$ pe planul $\pi : 3x + 2y - z - 1 = 0$ şi ecuaţiile simetricei dreptei d faţă de planul π.

Calculaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreapta d şi planul π.

7. Fie punctul $M(1, 1, 1)$, dreapta $d : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ şi

planul $\pi : x + 2y + 3z - 1 = 0$.

a) Scrieţi ecuaţia carteziană generală a unui plan π_1 care trece prin M şi este paralel cu planul π;

b) Scrieţi ecuaţiile canonice carteziene ale unei drepte d_1 care trece prin M şi este paralelă cu dreapta d;

c) Studiaţi poziţia relativă a dreptei d faţă de planul π.

8. Fie dreptele $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$, $d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{\alpha}$.
a) Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $d_1 \cap d_2 = \emptyset$;
b) Să se scrie ecuaţia planului determinat de d_1 şi d_2;
c) Calculaţi $d(M_0, \pi)$, unde π este planul de la punctul b), iar $M_0(5, -4, 1)$.

9. Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele $d_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ şi $d_2 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$ şi să se scrie ecuaţia planului determinat de ele.

10. Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin simetricul punctului $A(1, 0, -1)$ faţă de planul $\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0$ şi este paralelă cu planele $\pi_2 : x + y - z + 3 = 0$ şi $\pi_3 : 2y - z + 4 = 0$.

Capitolul 7

Conice şi cuadrice

Fixăm un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în spaţiul E_3 (sau $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ în planul E_2).

7.1 Cuadrice (conice): definiţie, ecuaţia carteziană generală, ecuaţia vectorială

Definiţia 7.1.1 *Se numeşte* ***cuadrică*** *(sau suprafaţă algebrică de ordinul al doilea) mulţimea* Γ *a punctelor* $M(x, y, z) \in E_3$ *ale căror coordonate verifică o ecuaţie de forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (1)$$

unde $a_{ij}, b_i, c \in \mathbf{R}$ *aşa încât rangul matricei simetrice* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ *este cel puţin* 1.

Ecuaţia (1) se numeşte **ecuaţia carteziană generală** a unei cuadrice.

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al cuadricei Γ şi $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ vectorul său de poziţie. Dacă notăm $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ şi considerăm operatorul simetric $u : V^3 \to V^3$, care în raport cu baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ are matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci ecuaţia carteziană generală (1) a cuadricei Γ se scrie sub forma

$$\langle \bar{r}, u(\bar{r}) \rangle + 2\langle \bar{b}, \bar{r} \rangle + c = 0 \quad (2)$$

şi se numeşte **ecuaţia vectorială** a cuadricei.

Scalarul $\delta = \det A$ se numeşte **discriminantul mic** al cuadricei Γ, iar $\Delta = \det \overline{A}$ se numeşte **discriminantul mare**, unde $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}$.

Definiţia 7.1.2 *Dacă în planul E_2 considerăm reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{\imath}, \bar{\jmath}\right\}$, atunci prin* ***conică*** *(sau curbă algebrică de ordinul al doilea) înţelegem mulţimea γ a punctelor $M(x,y) \in E_2$ ale căror coordonate verifică o ecuaţie de forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{1'}$$

numită ***ecuaţia carteziană generală*** *a conicei γ, unde $a_{ij}, b_i, c \in \mathbf{R}$ aşa încât rangul matricei simetrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2}}$ este cel puţin 1.*

În mod analog putem scrie **ecuaţia vectorială** a conicei γ

$$\langle \bar{r}, u(\bar{r})\rangle + 2\left\langle \bar{b}, \bar{r}\right\rangle + c = 0. \tag{2'}$$

Analog, avem discriminatul mic $\delta = \det A$ şi discriminantul mare $\Delta = \det \overline{A}$ pentru conica γ.

Definiţia 7.1.3 *Dacă Δ este nenul atunci spunem că cuadrica (conica) este* ***nedegenerată****. În caz contrar, spunem că cuadrica (conica) este* ***degenerată****.*

Ţinând cont de proprietăţile operatorilor simetrici, deducem că ordinul ecuaţiei carteziene (1) sau (1') este invariant la schimbări de repere carteziene ortonormate. De asemenea, δ şi Δ sunt invarianţi la schimbări de repere carteziene ortonormate.

În continuare, pentru simplitatea scrierii, produsul scalar al doi vectori liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, $\left\langle \bar{a}, \bar{b}\right\rangle$, se va nota cu $\bar{a} \cdot \bar{b}$. Astfel, ecuaţia vectorială (2) (sau (2')) se scrie

$$\bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0. \tag{2''}$$

7.2 Intersecţia unei cuadrice (conice) cu o dreaptă

Fie cuadrica $\Gamma : \bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0$ şi dreapta $d : \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$, $t \in \mathbf{R}$. Pentru determinarea punctelor $M(\bar{r})$ din intersecţia $\Gamma \cap d$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0 \\ \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, t \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{3}$$

care este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} (\bar{r}_0 + t\bar{a}) \cdot u(\bar{r}_0 + t\bar{a}) + 2\bar{b} \cdot (\bar{r}_0 + t\bar{a}) + c = 0 \\ \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, t \in \mathbf{R} \end{cases} . \tag{3'}$$

După câteva calcule simple (ţinând cont şi că u este operator simetric), se obţine ecuaţia de gradul doi în t:

$$\bar{a} \cdot u(\bar{a})t^2 + 2(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a}t + \bar{r}_0 \cdot u(\bar{r}_0) + 2\bar{b} \cdot \bar{r}_0 + c = 0. \tag{4}$$

Remarcând că rădăcinile reale ale acestei ecuaţii introduse în a doua ecuaţie a sistemului (3) dau chiar vectorii de poziţie ai punctelor de intersecţie dintre cuadrica Γ şi dreapta d, avem următoarea discuţie:

I) Dacă vectorul director al dreptei d are proprietatea că $\overline{a}\cdot u(\overline{a})\neq 0$, atunci spunem că dreapta d are o **direcţie neasimptotică**. Sunt posibile cazurile:

1) dacă ecuaţia (4) are două rădăcini reale distincte t_1, t_2, atunci avem două puncte de intersecţie, $\Gamma\cap d=\{M_1(\overline{r}_0+t_1\overline{a}), M_2(\overline{r}_0+t_2\overline{a})\}$. Spunem că dreapta d este **secantă** cuadricei Γ.

2) dacă ecuaţia (4) are două rădăcini reale egale $t_1=t_2=t_0$, atunci avem două puncte confundate de intersecţie, $\Gamma\cap d=\{M_0(\overline{r}_0+t_0\overline{a})\}$. Spunem că dreapta d este **tangentă** cuadricei Γ.

3) dacă ecuaţia (4) are două rădăcini complexe, atunci dreapta d nu intersectează cuadrica Γ. Spunem că dreapta d este **nesecantă** (sau **exterioară**) cuadricei Γ.

II) Dacă vectorul director al dreptei d are proprietatea că $\overline{a}\cdot u(\overline{a})=0$, atunci spunem că dreapta d are o **direcţie asimptotică**. Sunt posibile cazurile:

1) dacă $(u(\overline{r}_0)+\overline{b})\cdot\overline{a}\neq 0$, atunci ecuaţia (4) devine o ecuaţie de gradul întâi cu o singură rădăcină reală t_1. Dreapta d intersectează cuadrica Γ într-un singur punct $M_1(\overline{r}_0+t_1\overline{a})$.

2) dacă $(u(\overline{r}_0)+\overline{b})\cdot\overline{a}=0$ şi $\overline{r}_0\cdot u(\overline{r}_0)+2\overline{b}\cdot\overline{r}_0+c\neq 0$, atunci dreapta d nu intersectează cuadrica Γ.

3) dacă $(u(\overline{r}_0)+\overline{b})\cdot\overline{a}=0$ şi $\overline{r}_0\cdot u(\overline{r}_0)+2\overline{b}\cdot\overline{r}_0+c=0$, atunci orice număr real t este rădăcină a ecuaţiei (4) şi astfel dreapta d este conţinută în cuadrica Γ. În acest caz spunem că dreapta d este **o generatoare rectilinie** a cuadricei Γ. Prin urmare, dreapta d este o generatoare rectilinie pentru cuadrica Γ dacă şi numai dacă avem îndeplinite condiţiile:

$$\begin{cases}\overline{a}\cdot u(\overline{a})=0\\ (u(\overline{r}_0)+\overline{b})\cdot\overline{a}=0\\ \overline{r}_0\cdot u(\overline{r}_0)+2\overline{b}\cdot\overline{r}_0+c=0\end{cases}.$$

Este evident că discuţia pentru determinarea intersecţiei unei conice cu o dreaptă este similară.

Exerciţiul 7.2.1 *a) Arătaţi că dreapta* $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ *este o generatoare rectilinie a cuadricei* $\Gamma: xy-3xz+4yz-3=0$.

b) Determinaţi punctele de intersecţie dintre cuadrica $\Gamma: x^2-xy+z-1=0$ *şi dreapta* $d: x=y=z$.

c) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care se pot duce prin punctul $M(-1,-1,1)$ *pe cuadrica*

$\Gamma: x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$.

Rezolvare:

a) Vom arăta că fiecare punct al dreptei d aparţine cuadricei Γ. *Într-adevăr, coordonatele unui punct arbitrar al dreptei d fiind* $(2t+1,t+1,t+2)$, $t\in\mathbf{R}$, *prin înlocuirea lor în ecuaţia cuadricei* Γ *obţinem* $(2t+1)(t+1)-3(2t+1)(t+2)+4(t+1)(t+2)-3=0$, *oricare ar fi* $t\in\mathbf{R}$ *şi atunci* $d\subset\Gamma$.

b) Sistemul care dă punctele de intersecţie este $\begin{cases} x^2 - xy + z - 1 = 0 \\ x = y = z \end{cases}$ *şi are soluţia unică* $(1,1,1)$. *Deci* $d \cap \Gamma = \{M(1,1,1)\}$.

c) Fie $\overline{a} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k} \in V^3 \setminus \{\overline{0}\}$ *vectorul director al unei generatoare rectilinie a lui* Γ, *care se poate duce prin* M. *Ţinând seama că* $\overline{b} = 2\overline{i} + \frac{3}{2}\overline{j} - \frac{5}{2}\overline{k}$, $\overline{r}_0 = -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, *iar* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ *este matricea endomorfismului u în raport cu baza* $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ *avem* $\overline{a} \cdot u(\overline{a}) = \widetilde{a}^t A \widetilde{a} = l^2 + m^2 + n^2 + 2lm - 2ln - mn$ *şi* $(u(\overline{r}_0) + \overline{b}) \cdot \overline{a} = -l - m$. *Atunci trebuie ca* $l^2 + m^2 + n^2 + 2lm - 2ln - mn = 0$ *şi* $l + m = 0$ *de unde rezultă* $\overline{a} = -\overline{i} + \overline{j}$ *sau* $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

În concluzie, prin M *trec două generatoare rectilinii ale cuadricei* Γ*:*

$d_1 : \begin{cases} \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ *şi* $d_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

7.3 Centru pentru o cuadrică (conică)

Definiţia 7.3.1 *Se numeşte **centru (de simetrie)** al unei cuadrice (conice) un punct C faţă de care cuadrica (conica) este simetrică. Adică, oricare ar fi un punct M de pe cuadrică (conică) simetricul său faţă de C se află tot pe cuadrică (conică).*

Problema centrelor de simetrie este rezolvată complet de teorema:

Teorema 7.3.1 *Punctul* $C(\overline{r}_0)$ *este centru pentru cuadrica* Γ *(conica* γ*) dacă şi numai dacă* $u(\overline{r}_0) + \overline{b} = \overline{0}$. *Mai precis, punctul* $C(x_0, y_0, z_0)$ *este centru pentru cuadrica* Γ *dacă şi numai dacă* (x_0, y_0, z_0) *este soluţie a sistemului*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 &= 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 &= 0 \end{cases}, \tag{5}$$

sistem care este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{cases}, \tag{5'}$$

unde $F(x,y,z) \stackrel{not}{=} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c$.

Demonstraţie. I) Dacă $C(\overline{r}_0)$ este centru pentru cuadrica Γ, atunci orice dreaptă $d : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}$, $t \in \mathbf{R}$, care trece prin C, intersectează cuadrica în două puncte $M_1(\overline{r}_0 + t_1\overline{a})$, $M_2(\overline{r}_0 + t_2\overline{a})$ pentru care $\overline{M_1C} = \overline{CM_2}$, adică $\overline{r}_0 - (\overline{r}_0 + t_1\overline{a}) = \overline{r}_0 + t_2\overline{a} - \overline{r}_0$, ceea ce înseamnă $(t_1 + t_2)\overline{a} = \overline{0}$. Cum $\overline{a} \neq \overline{0}$, rezultă că $t_1 + t_2 = 0$. Însă $t_1 + t_2$ este suma rădăcinilor ecuaţiei (4) ceea ce impune în mod necesar că $\left(u(\overline{r}_0)+\overline{b}\right)\cdot\overline{a}=\overline{0}$, conform relaţiilor lui Viète. Ţinând seama că vectorul $\overline{a}$ este nenul şi arbitrar, rezultă că $u(\overline{r}_0)+\overline{b}=\overline{0}$.

II) Dacă $C(\overline{r}_0)$ este un punct pentru care $u(\overline{r}_0)+\overline{b}=\overline{0}$, atunci, prin trecerea de la reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}=\{O;\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ la reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}'=\{C;\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$, ecuaţia vectorială a cuadricei Γ se scrie

$$\overline{r}'\cdot u(\overline{r}')+2\left(u(\overline{r}_0)+\overline{b}\right)\cdot\overline{r}'+\overline{r}_0\cdot u(\overline{r}_0)+2\overline{b}\cdot\overline{r}_0+c=0,$$

unde $\overline{r}'$ este vectorul de poziţie, faţă de reperul $\mathcal{R}'$, al unui punct arbitrar al cuadricei Γ (vezi $\overline{r}=\overline{r}_0+\overline{r}'$).

Ţinând seama de ipoteza $u(\overline{r}_0)+\overline{b}=\overline{0}$, avem ca ecuaţia lui Γ, faţă de reperul $\mathcal{R}'$, este

$$\overline{r}'\cdot u(\overline{r}')+\overline{r}_0\cdot u(\overline{r}_0)+2\overline{b}\cdot\overline{r}_0+c=0.$$

Acum, este evident că dacă punctul $P_1(\overline{r}'_1)$ este un punct arbitrar al cuadricei Γ, atunci şi simetricul sau faţă de C, $P_2(-\overline{r}'_1)$ se află pe Γ. Deci, C este centru de simetrie pentru cuadrica Γ. ∎

Deoarece determinantul matricii sistemului (5) este chiar δ, deducem că:

i) cuadrica Γ are centru unic de simetrie $\Leftrightarrow$ $rang A=3$, adică $\delta\neq 0$.

ii) cuadrica Γ are o dreaptă de centre de simetrie $\Leftrightarrow$ $rang A=2$ şi sistemul (5) este compatibil.

iii) cuadrica Γ are un plan de centre de simetrie $\Leftrightarrow$ $rang A=1$ şi sistemul (5) este compatibil.

iv) cuadrica Γ este fără centru de simetrie $\Leftrightarrow$ sistemul (5) este incompatibil.

Deci, putem spune că dacă $\delta\neq 0$, atunci cuadrica Γ are **centru unic**, iar dacă $\delta=0$, atunci cuadrica Γ este **fără centru unic**.

Observaţia 7.3.1 *Pentru conice situaţia este similară (chiar mai simplă) deoarece sistemul care rezolvă problema centrelor este*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x+a_{12}y+b_1 &=& 0\\ a_{12}x+a_{22}y+b_2 &=& 0\end{array}\right., \tag{6}$$

sistem care este echivalent cu sistemul

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} &=& 0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} &=& 0\end{array}\right., \tag{6'}$$

unde $f(x,y)\overset{not}{=}a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2b_1x+2b_2y+c.$

Exerciţiul 7.3.1 *Studiaţi problema centrelor de simetrie pentru cuadricele*

a) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0,$

b) $2x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+2x+y-z-1=0$

şi conicele

c) $3x^2+2y^2+2xy-2x+4y+2=0,$

d) $x^2-2y^2+2xy+6x+2y=0.$

Care dintre acestea sunt nedegenerate?

Rezolvare:

a) Cum $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, *avem că această cuadrica are centru unic de simetrie* C, *ale cărui coordonate reprezintă soluţia sistemului liniar compatibil determinat* $\begin{cases} x+y+3z-1 &= 0 \\ x+5y+z+3 &= 0 \\ 3x+y+z+1 &= 0 \end{cases}$ *.Obţinem* $C(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

b) Discriminantul mic $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *şi sistemul* $\begin{cases} 2x-y+z+1 &= 0 \\ -x+y+\frac{1}{2} &= 0 \\ x+z-\frac{1}{2} &= 0 \end{cases}$ *este incompatibil. Prin urmare, această cuadrică nu are centre de simetrie.*

c) Conica are centru unic C *(* $\delta = 5$*) de coordonate* $x_C = \frac{4}{5}$, $y_C = -\frac{7}{5}$.

d) $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ *implică faptul că aceasta conică are centru unic de* $C(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$.

Se calculează discriminantul mare Δ *pentru fiecare cuadrică (conică).*

7.4 Planul tangent la o cuadrică. Tangenta la o conică

Fie $M_0(\overline{r}_0)$ un punct al cuadricei $\Gamma : \overline{r} \cdot u(\overline{r}) + 2\overline{b} \cdot \overline{r} + c = 0$.

Propoziţia 7.4.1 *Dreapta* $d : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}$, $t \in \mathbf{R}$, *este tangentă cuadricei* Γ *dacă şi numai dacă*

$$(u(\overline{r}_0) + \overline{b}) \cdot \overline{a} = 0. \tag{7}$$

Demonstraţie. Deoarece $M_0(\overline{r}_0) \in \Gamma$ ecuaţia (4) devine $\overline{a} \cdot u(\overline{a})t^2 + 2(u(\overline{r}_0) + \overline{b}) \cdot \overline{a}t = 0$ şi prin urmare, această ecuaţie având deja rădăcina $t_1 = 0$, avem că d este tangentă la Γ dacă şi numai dacă $t_1 = t_2 = 0$, adică $(u(\overline{r}_0) + \overline{b}) \cdot \overline{a}$. ■

Teorema 7.4.1 *Locul geometric al dreptelor tangente la cuadrica* Γ *în punctul* $M_0 \in \Gamma$ *este un plan cu ecuaţia vectorială*

$$\overline{r}_0 \cdot u(\overline{r}) + \overline{b} \cdot (\overline{r} + \overline{r}_0) + c = 0. \tag{8}$$

Demonstraţie. O dreapta $d : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}$, $t \in \mathbf{R}$, este tangentă la Γ în $M_0(\overline{r}_0)$ dacă şi numai dacă are loc relaţia (7). Atunci, avem $(u(\overline{r}_0) + \overline{b}) \cdot (t\overline{a}) = 0$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Cum $t\overline{a} = \overline{r} - \overline{r}_0$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, rezultă că $(u(\overline{r}_0) + \overline{b}) \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$, pentru orice punct $M(\overline{r})$ al dreptei d. Dacă adunăm această ultimă egalitate, membru cu membru, cu egalitatea $\overline{r}_0 \cdot u(\overline{r}_0) + 2\overline{b} \cdot \overline{r}_0 + c = 0$, obţinem exact egalitatea (8). Deci, orice punct $M(\overline{r})$ de pe orice dreaptă tangentă Γ în $M_0(\overline{r}_0)$ verifică (8), adică locul geometric al dreptelor tangente la cuadrica Γ în punctul $M_0 \in \Gamma$ este un plan cu ecuaţia vectorială (8). ■

Definiţia 7.4.1 *Planul furnizat de teorema precedentă se numeşte **planul tangent** la cuadrica Γ în punctul M_0.*

Observaţia 7.4.1 *Se obişnuieşte să se spună că ecuaţia vectorială (8) a planului tangent la cuadrica Γ în punctul M_0 se obţine din ecuaţia vectorială a cuadricei Γ prin dedublare. În coordonate carteziene, ecuaţia (8) este echivalentă cu ecuaţia:*

$$a_{11}xx_0 + a_{22}yy_0 + a_{33}zz_0 + a_{12}(x_0y + xy_0) + a_{23}(y_0z + yz_0) + a_{13}(x_0z + xz_0)+ \\ +b_1(x + x_0) + b_2(y + y_0) + b_3(z + z_0) + c = 0. \tag{8'}$$

Pentru conice, ecuaţia carteziană a tangentei la conica γ în punctul $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ este

$$a_{11}xx_0 + a_{22}yy_0 + a_{12}(x_0y + xy_0) + b_1(x + x_0) + b_2(y + y_0) + c = 0. \tag{8''}$$

Exemplul 7.4.1 *Ecuaţia planului tangent la cuadrica $\Gamma : x^2 + z^2 - 2xy + yz - 3x - 2z = 0$ în originea reperului O este $3x + 2z = 0$, deoarece, în general ecuaţia planului tangent la Γ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ este $xx_0 + zz_0 - (xy_0 + x_0y) + \frac{1}{2}(yz_0 + y_0z) - \frac{3}{2}(x + x_0) - (z + z_0) = 0$.*

Exemplul 7.4.2 *Fie cuadrica $\Gamma : 4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la Γ care sunt paralele cu planul $\pi : x + 2y + 2 = 0$.*

Rezolvare:

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe cuadrica Γ. Ecuaţia planului tangent la Γ în M_0 este $4xx_0 + 6yy_0 + 4zz_0 + 2(x_0z + xz_0) - 4(y + y_0) - 2(z + z_0) + 3 = 0$, adică $(4x_0 + 2z_0)x + (6y_0 - 4)y + (4z_0 + 2x_0 - 2)z + (-4y_0 - 2z_0 + 3) = 0$.

Determinăm x_0, y_0, z_0 aşa încât acest plan sa fie paralel cu planul π. Trebuie ca $\frac{4x_0+2z_0}{1} = \frac{6y_0-4}{2}$ şi $4z_0 + 2x_0 - 2 = 0$, de unde obţinem că $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{1}{2}$ sau $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{5}{6}$, folosind şi faptul că $M_0 \in \Gamma$.

Atunci, având în vedere ca un plan paralel cu planul $\pi : x + 2y + 2 = 0$ are o ecuaţie de forma $x + 2y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, rezultă că pentru $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{1}{2}$ avem $\lambda = -2$ şi pentru $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{5}{6}$ avem $\lambda = 0$. Deci există două plane tangente la Γ care sunt paralele cu π, anume $\pi_1 : x + 2y - 2 = 0$ şi $\pi : x + 2y = 0$.

Exerciţiul 7.4.1 *a) Scrieţi ecuaţia planului tangent la cuadrica $\Gamma : x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ în punctul O.*

b) Determinaţi ecuaţia dreptelor tangente la conica $\gamma : x^2 - 2y^2 + 2xy + 6x + 2y = 0$, care sunt paralele cu dreapta $d : x + y + 1 = 0$.

7.5 Reducerea ecuaţiei carteziene generale a unei cuadrice (conice) la forma canonică

Ne propunem să determinăm un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R}' = \left\{O'; \overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\right\}$ în spaţiul E_3 în raport cu care ecuaţia carteziană a cuadricei Γ să aibă o formă cât mai simplă, numită **ecuaţie canonică** (sau *ecuaţie redusă*) a cuadricei Γ.

Teorema 7.5.1 *Dacă cuadrica* Γ *are ecuaţia*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0 \quad (9)$$

în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}=\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$*, atunci există un reper cartezian ortonormat* $\mathcal{R}'=\{O';\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}\}$ *faţă de care ecuaţia sa are una şi numai una din următoarele forme simple:*

I) $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+D=0;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\in\mathbf{R}^*,\ D\in\mathbf{R},$

II) $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2hz'=0;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ h\in\mathbf{R}^*,$

III) $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+D=0;\ \lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbf{R}^*,\ D\in\mathbf{R},$

IV) $\lambda_1(x')^2+2hy'=0;\ \lambda_1,\ h\in\mathbf{R}^*,$

V) $\lambda_1(x')^2+D=0;\ \lambda_1\in\mathbf{R}^*,\ D\in\mathbf{R}.$

Demonstraţie. Din teoria spaţiilor vectoriale euclidiene, se ştie că există o bază ortonormată $\{\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}\}$ în V^3, formată din vectori proprii ai operatorului simetric u (cu matricea $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ relativ la baza ortonormată $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$), faţă de care forma pătratică $\varphi: V^3\to V^3$,

$$\varphi(\bar{r})=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz$$

are forma canonică

$$\varphi(\bar{r})=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2,\quad \bar{r}=X\overline{i'}+Y\overline{j'}+Z\overline{k'},$$

unde λ_1, λ_2, λ_3 sunt valorile proprii ale endomorfismului u.

Astfel, faţă de reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}^*=\{O;\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}\}$ cuadrica Γ are ecuaţia

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+2B_1X+2B_2Y+2B_3Z+C=0 \quad (10)$$

Acum avem discuţia:

I) Dacă λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbf{R}^*$, atunci ecuaţia (10) se poate scrie sub forma

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+D=0,$$

unde $x'=X+\frac{B_1}{\lambda_1}$, $y'=Y+\frac{B_2}{\lambda_2}$, $z'=Z+\frac{B_3}{\lambda_3}$ şi $D=C-\left(\frac{B_1}{\lambda_1}\right)^2-\left(\frac{B_2}{\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{B_3}{\lambda_3}\right)^2$. Într-adevăr, nu mai rămâne decât să trecem la reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}'=\{O';\overline{i'},\overline{j'},\overline{k'}\}$, obţinut din reperul $\mathcal{R}^*$ prin translaţia de vector $\overline{OO'}=-\frac{B_1}{\lambda_1}\overline{i'}-\frac{B_2}{\lambda_2}\overline{j'}-\frac{B_3}{\lambda 3}\overline{k'}$ şi relativ la acest din urmă reper ecuaţia lui Γ este de forma dorită.

II) Dacă λ_1, $\lambda_2\in\mathbf{R}^*$, $\lambda_3=0$, $B_3\neq 0$, atunci ecuaţia (10) se poate scrie, după o translaţie, sub forma

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2hz'=0.$$

III) Dacă λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}^*$, $\lambda_3 = 0$, $B_3 = 0$, atunci ecuaţia (10) se poate scrie sub forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + D = 0.$$

IV) Dacă $\lambda_1 \in \mathbf{R}^*$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $B_2^2 + B_3^2 \neq 0$, atunci ecuaţia (10) se poate scrie sub forma

$$\lambda_1(x')^2 + 2hy' = 0.$$

V) Dacă $\lambda_1 \in \mathbf{R}^*$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $B_2 = B_3 = 0$, atunci ecuaţia (10) se poate scrie sub forma

$$\lambda_1(x')^2 + D = 0.$$

■

Din ecuaţiile I)-V), după o discuţie în funcţie de semnele coeficienţilor λ_1, λ_2, λ_3, h, D, obţinem cele **17 ecuaţii canonice** (*reduse*) posibile la care putem ajunge pornind de la ecuaţia carteziană generală a unei cuadrice Γ:

1°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (a, b, c > 0)$ **elipsoidul real**

2°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} + 1 = 0 \quad (a, b, c > 0)$ **elipsoidul imaginar**

3°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (a, b, c > 0)$ **hiperboloidul cu o pânză**

4°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} + 1 = 0 \quad (a, b, c > 0)$ **hiperboloidul cu două pânze**

5°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 0 \quad (a, b, c > 0)$ **conul pătratic real**

6°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 0 \quad (a, b, c > 0)$ **conul pătratic imaginar**

7°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 2z' \quad (a, b > 0)$ **paraboloidul eliptic**

8°) $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 2z' \quad (a, b > 0)$ **paraboloidul hiperbolic**

9°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ **cilindrul eliptic real**

10°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ **cilindrul eliptic imaginar**

11°) $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ **cilindrul hiperbolic**

12°) $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0)$ **pereche de plane reale concurente**

13°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0)$ **pereche de plane imaginare concurente**

14°) $\frac{(x')^2}{a^2} = 2y' \quad (a > 0)$ **cilindrul parabolic**

15°) $\frac{(x')^2}{a^2} - 1 = 0 \quad (a > 0)$ **pereche de plane reale paralele**

16°) $\frac{(x')^2}{a^2} + 1 = 0 \quad (a > 0)$ **pereche de plane reale imaginare**

17°) $\frac{(x')^2}{a^2} = 0 \quad (a > 0)$ **pereche de plane confundate**

Observaţia 7.5.1 *Cuadricele* 1°), 2°), 3°), 4°), 7°), 8°) *sunt nedegenerate* ($\Delta \neq 0$)*, restul fiind degenerate* ($\Delta = 0$)*. Cuadricele* 1°), 2°), 3°), 4°), 5°), 6°) *au centru unic de simetrie, cuadricele* 9°), 10°), 11°), 12°), 13°) *au o dreaptă de centre de simetrie, cuadricele* 14°), 15°), 16°), 17°) *au un plan de centre de simetrie, iar paraboloizii* 7°), 8°) *nu au nici un centru de simetrie.*

În mod similar se poate demonstra teorema (pentru conice).

Teorema 7.5.2 *Dacă conica γ are ecuaţia*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \qquad (9')$$

în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}\right\}$ din plan, atunci există un reper cartezian ortonormat, în plan, $\mathcal{R}' = \left\{O'; \overline{i'}, \overline{j'}\right\}$ faţă de care ecuaţia sa are una şi numai una din următoarele forme simple:
I) $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + D = 0$; $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{R}^*,\ D \in \mathbf{R}$,
II) $\lambda_1(x')^2 + 2hy' = 0$; $\lambda_1,\ h \in \mathbf{R}^*$,
III) $\lambda_1(x')^2 + D = 0$; $\lambda_1 \in \mathbf{R}^*,\ D \in \mathbf{R}$.

Analog, obţinem cele **9 ecuaţii canonice** (*reduse*) posibile la care putem ajunge pornind de la ecuaţia carteziană generală a unei conice γ:
1°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ **elipsa reală**
2°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ **elipsa imaginară**
3°) $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a, b > 0)$ **hiperbola**

4°) $(y')^2 = 2px' \quad (p > 0)$ **parabola**
5°) $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0)$ **pereche de drepte reale concurente**
6°) $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0 \quad (a, b > 0)$ **pereche de drepte imaginare concurente**
7°) $\frac{(x')^2}{a^2} - 1 = 0 \quad (a > 0)$ **pereche de drepte reale paralele**
8°) $\frac{(x')^2}{a^2} + 1 = 0 \quad (a > 0)$ **pereche de drepte imaginare paralele**
9°) $(x')^2 = 0$ **pereche de drepte confundate**

Observaţia 7.5.2 *Conicele* 1°), 2°), 3°), 4°) *sunt nedegenerate* ($\Delta \neq 0$)*, restul fiind degenerate* ($\Delta = 0$)*. Conicele* 1°), 2°), 3°), 5°), 6°) *au centru unic de simetrie, conicele* 7°), 8°), 9°) *au o dreaptă de centre de simetrie, iar parabola* 4°) *nu are nici un centru de simetrie.*

Exerciţiul 7.5.1 *a) Determinaţi ecuaţia canonică şi reperul canonic pentru conica* $\gamma : 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$. *Recunoaşteţi conica.*

Rezolvare:

Mai întâi găsim valorile şi vectorii proprii ai matricei A asociată conicei γ. Polinomul caracteristic $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 25$ *are rădăcinile* $\lambda_1 = -2$ *şi* $\lambda_2 = 8$ *(valorile proprii).*
Pentru $\lambda_1 = -2$*, sistemul care dă vectorii proprii asociaţi lui* λ_1 *este*

$$(A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases}.$$

Atunci $x = y = \alpha$ *(*$\alpha \in \mathbf{R}$*) şi un vector propriu asociat lui* $\lambda_1 = -2$ *este* $\bar{u}_1 = \bar{i} + \bar{j}$ *. Cum* $\|\bar{u}_1\| = \sqrt{2}$ *obţinem versorul* $\bar{i}^{'} = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|} \cdot \|\bar{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ *.*
Pentru $\lambda_1 = 8$ *, sistemul care dă vectorii proprii asociaţi lui* λ_2 *este*

$$(A - \lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 5y &= 0 \\ -5x - 5y &= 0 \end{cases} .$$

Atunci $x = -\alpha$ *,* $y = \alpha$ *(*$\alpha \in \mathbf{R}$*) şi un vector propriu asociat lui* $\lambda_2 = 8$ *este* $\bar{u}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$ *. Cum* $\|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}$ *obţinem versorul* $\bar{j}' = \frac{1}{\|\bar{u}_2\|} \cdot \|\bar{u}_2\| = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ *.*
Acum, se face schimbarea de repere carteziene ortonormate

$$\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \longrightarrow \mathcal{R}^{'} = \{O; \bar{i}^{'}, \bar{j}^{'}\}$$

dată prin relaţiile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^{'} - \frac{1}{\sqrt{2}}y^{'} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^{'} + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{'} \end{cases}$$

$\left(M_{\mathcal{R}}(x, y) \longrightarrow M_{\mathcal{R}'}(x^{'}, y^{'}),\ \textit{rotaţie}\right)$

Relativ la noul reper $\mathcal{R}'$*, ecuaţia lui* γ *este:*
$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y^{'})^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{'} - \frac{1}{\sqrt{2}}y^{'}\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{'} + \frac{1}{\sqrt{2}}y^{'}\right) + 4 = 0,$ *adică*
$\gamma\ :\ -2(x^{'})^2 + 8(y^{'})^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}x^{'} + 4 = 0$ *sau* $\gamma\ :\ \frac{(x^{'} - \sqrt{2})^2}{2^2} - \frac{(y^{'})^2}{1^2} - 1 = 0$ *.*

În final, se mai face schimbarea de repere ortonormate (translaţie):

$$\mathcal{R}^{'} = \{O; \bar{i}^{'}, \bar{j}^{'}\} \longrightarrow \mathcal{R}^{''} = \{O^{''}; \bar{i}^{'}, \bar{j}^{'}\}$$

dată prin $\begin{cases} x^{'} - \sqrt{2} &= x^{''} \\ y^{'} &= y^{''} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} x^{''} \\ y^{''} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$
Atunci, ecuaţia lui γ *relativ la reperul* $\mathcal{R}''$ *este*

$$\frac{(x^{''})^2}{2^2} - \frac{(y^{''})^2}{1^2} - 1 = 0$$

şi ea este ecuaţia canonică a unei hiperbole. Reperul canonic este chiar reperul relativ la care conica are ecuaţia canonică, adică $\mathcal{R}'' = \{O''; \bar{i}', \bar{j}'\}$*.*
Cum $O''_{\mathcal{R}'}(\sqrt{2}, 0)$ *, avem* $\bar{OO''} = \sqrt{2}\bar{i}^{'} = \bar{i} + \bar{j}$ *şi astfel* $O''_{\mathcal{R}}(1, 1)$*.*
Schimbarea de repere $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}''$ *este dată prin*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{''} \\ y^{''} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Determinaţi ecuaţia canonică şi reperul canonic pentru cuadrica $\Gamma : 2x^2 + 16y^2 + 2z^2 - 8xy + 8yz - 2x - y + 2z + 3 = 0$. *Recunoaşteţi cuadrica.*

Rezolvare:

Mai întâi se găsesc valorile proprii ale matricii A, rezolvând ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$ *, adică*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 16-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = 0$ *,* $\lambda_2 = 2$ *,* $\lambda_3 = 18$ *.*
În continuare, pentru fiecare valoare proprie, se determină vectorii proprii corespunzători.
Pentru $\lambda_1 = 0$ *, se rezolvă sistemul liniar omogen*

$$(A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y &= 0 \\ -4x + 16y + 4z &= 0 \\ 4y + 2z &= 0 \end{cases}.$$

Rezultă $x = 2\alpha$ *,* $y = \alpha$ *,* $z = -2\alpha$ *(*$\alpha \in \mathbf{R}$*).*
Atunci un vector propriu corespunzător lui λ_1 *este de forma* $\bar{v}_1 = \alpha(2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k})$ *,* $\alpha \in \mathbf{R}^*$ *, iar pentru* $\alpha = 1$ *se obţine* $\bar{u}_1 = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ *cu lungimea* $\|\bar{u}_1\| = \sqrt{4+1+4} = 3$ *.*
Reţinem versorul $\bar{i}^{'} = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|} \cdot \bar{u}_1 = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$ *.*
Pentru $\lambda_2 = 2$ *, se rezolvă sistemul liniar omogen*

$$(A - \lambda_2 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} -4y &= 0 \\ -4x + 14y + 4z &= 0 \\ 4y &= 0 \end{cases}.$$

Rezultă $x = \alpha$ *,* $y = 0$ *,* $z = \alpha$ *(*$\alpha \in \mathbf{R}$*).*
Atunci un vector propriu corespunzător lui λ_2 *este de forma* $\bar{v}_2 = \alpha(\bar{i} + \bar{k})$ *,* $\alpha \in \mathbf{R}^*$ *, iar pentru* $\alpha = 1$ *se obţine* $\bar{u}_2 = \bar{i} + \bar{k}$ *cu lungimea* $\|\bar{u}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$*.*
Reţinem versorul $\bar{j}^{'} = \frac{1}{\|\bar{u}_2\|} \cdot \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$ *.*
Pentru $\lambda_3 = 18$ *, se rezolvă sistemul liniar omogen*

$$(A - \lambda_3 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} -16x-4y &= 0 \\ -4x-2y+4z &= 0 \\ 4y-16z &= 0 \end{cases}.$$

Rezultă $x=\alpha$, $y=-4\alpha$, $z=-\alpha$ *(*$\alpha\in\mathbf{R}$*).*
Atunci un vector propriu corespunzător lui λ_1 *este de forma* $\bar v_3=\alpha(\bar\imath-4\bar\jmath-\bar k)$, $\alpha\in\mathbf{R}^*$, *iar pentru* $\alpha=1$ *se obţine* $\bar u_3=\bar\imath-4\bar\jmath-\bar k$ *cu lungimea* $\|\bar u_3\|=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt2$.
Reţinem versorul $\bar k'=\frac{1}{\|\bar u_3\|}\cdot\bar u_3=\frac{1}{3\sqrt2}\bar\imath-\frac{4}{3\sqrt2}\bar\jmath-\frac{1}{3\sqrt2}\bar k$.
Conform teoriei operatorilor liniari simetrici, baza $\{\bar\imath',\bar\jmath',\bar k'\}$ *este ortonormată şi pozitiv orientată (vezi faptul că determinantul matricii de trecere de la baza* $\{\bar\imath,\bar\jmath,\bar k\}$ *la baza* $\{\bar\imath',\bar\jmath',\bar k'\}$ *are valoarea* 1*).*
Prin urmare, se face schimbarea de repere carteziene ortonormate

$$\mathcal{R}=\{O;\bar\imath,\bar\jmath,\bar k\}\longrightarrow\mathcal{R}'=\{O'=O;\bar\imath',\bar\jmath',\bar k'\},$$

dată prin $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac23&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{3\sqrt2}\\ \frac13&0&-\frac{4}{3\sqrt2}\\ -\frac23&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *(rotaţie)*
şi astfel, se obţine ecuaţia lui Γ *relativ la noul reper cartezian ortonormat* $\mathcal{R}'$:
$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2-2\left(\frac23x'+\frac{1}{\sqrt2}y'+\frac{1}{3\sqrt2}z'\right)-$
$-\left(\frac13x'-\frac{4}{3\sqrt2}z'\right)+2\left(-\frac23x'+\frac{1}{\sqrt2}y'-\frac{1}{3\sqrt2}z'\right)+3=0$, *adică*
$\frac{(y')^2}{9}+\frac{(z')^2}{1}-\frac16(x'-1)=0$ *sau*

$$x'-1=\frac{(y')^2}{\frac96}+\frac{(z')^2}{\frac16}.$$

În final, se face schimbarea de repere carteziene ortonormate

$$\mathcal{R}'=\{O'=O;\bar\imath',\bar\jmath',\bar k'\}\longrightarrow\mathcal{R}''=\{O'';\bar\imath',\bar\jmath',\bar k'\},$$

dată prin $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=I_3\cdot\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *(translaţie)*
Ecuaţia cuadricei Γ *relativ la reperul* $\mathcal{R}''$:

$$x''=\frac{(y'')^2}{\left(\sqrt{\frac32}\right)^2}+\frac{(z'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt6}\right)^2}$$

reprezintă forma redusă (canonică) a ecuaţiei cuadricei Γ *sau ecuaţia canonică a lui* Γ. *Din forma ecuaţiei canonice se observă că* Γ *este un paraboloid eliptic. Reperul natural al lui* Γ *este reperul* $\mathcal{R}''$, *în raport cu care cuadrica are ecuaţia canonică de mai sus. Originea reperului natural,* O'', *are, relativ la reperul* $\mathcal{R}'$,

coordonatele $1,0,0$, *adică* $\overline{OO''} = \overline{i}^{'} = \frac{2}{3}\overline{i} + \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}$.
Deci schimbarea de repere $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}''$ *este dată de*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{''} \\ y^{''} \\ z^{''} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(o roto-translaţie)

7.6 Studiul cuadricelor pe ecuaţia canonică. Sfera

În această secţiune vom prezenta şi studia cuadricele raportate la acel reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \left\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right\}$ faţă de care acestea au ecuaţia canonică (numit şi **reper canonic** sau *reper natural*). A se vedea şi cele două anexe cu conicele şi cuadricele pe ecuaţia canonică.

I. CUADRICE CU CENTRU UNIC

1) **Elipsoidul** (real) este cuadrica de ecuaţie $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, cu a, b, $c > 0$.

Numerele pozitive a, b, $c > 0$ se numesc *semiaxele* elipsoidului. Dacă $a = b = c$, atunci E defineşte o sferă cu centrul în originea reperului.

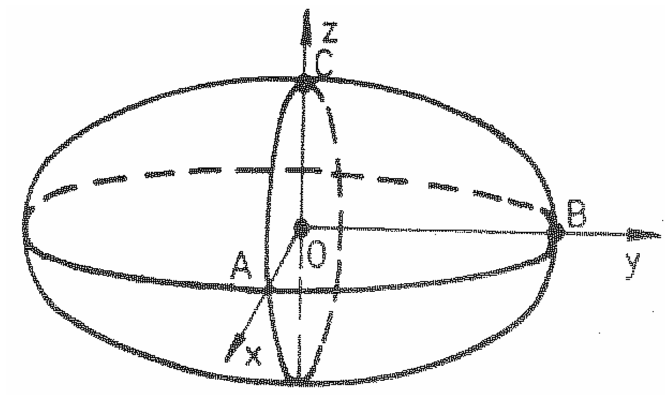
Se observă că dacă $M(x_0, y_0, z_0) \in E$, atunci şi punctele $M_1(-x_0, y_0, z_0)$, $M_2(x_0, -y_0, z_0)$, $M_3(x_0, y_0, -z_0)$ aparţin elipsoidului E. Aceasta arată că elipsoidul E este simetric faţă de planele de coordonate xOy, yOz, zOx (numite şi *plane de simetrie* ale elipsoidului). Axele de coordonate, ca intersecţii ale planelor de simetrie ale elipsoidului sunt axe de simetrie ale elipsoidului E. Punctul de intersecţie al celor trei plane de simetrie este originea reperului. Acest punct este centrul (de simetrie) al elipsoidului.

Elipsoidul este intersectat de axele Ox, Oy, Oz în punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, respectiv $C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$, puncte numite *vârfurile* elipsoidului E.

Pentru a ne da seama de forma elipsoidului îl vom intersecta cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu acestea. Intersecţiile elipsoidului cu planele xOy, xOz, yOz sunt elipsele $e_1 : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$, $e_2 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$, respectiv $e_3 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{z^2} - 1 = 0 \end{cases}$.

Făcând intersecţiile cu planul $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, obţinem $e_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2} \end{cases}$ care reprezintă o elipsă reală (situată în planul $z = \alpha$) dacă $|\alpha| < c$, o elipsă imaginară dacă $|\alpha| > c$. Dacă $\alpha = c$ atunci intersecţia se reduce la punctul $C(0, 0, c)$, iar dacă $\alpha = -c$ atunci intersecţia se reduce la punctul $C(0, 0, -c)$.

Reprezentarea grafică a elipsoidului E este dată în figura 1:



(Fig.1)

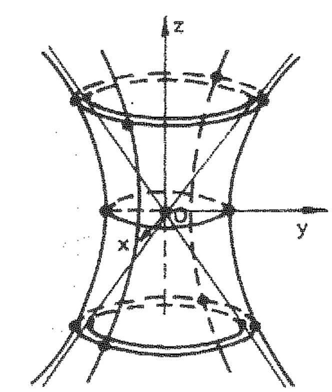
2) **Hiperboloidul cu o pânză** este cuadrica de ecuaţie

$H_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, cu a, b, $c > 0$.

Se arată, ca şi în cazul elipsoidului, că planele de coordonate, axele de coordonate şi originea reperului sunt plane de simetrie, axe de simetrie şi respectiv centru pentru hiperboloidul cu pânză. Axele Ox, Oy intersectează cuadrica H_1 în punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, respectiv $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ numite *vârfurile* cuadricei, iar axa Oz nu intersectează suprafaţa.

Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu planele de coordonate vor ajuta la reprezentarea sa grafică. Astfel, intersecţiile cu planele yOz, xOz sunt hiperbolele $h_1 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$, $h_2 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$, iar intersecţiile cu planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, au ecuaţiile $e_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{z^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{c^2} \end{cases}$, care sunt elipse (reale).

Reprezentarea grafică a hiperboloidului cu o pânză H_1 este dată în figura 2:



(Fig. 2)

3) **Hiperboloidul cu două pânze** este cuadrica de ecuaţie

$H_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, cu a, b, $c > 0$.

Se observă uşor că planele de coordonate, axele de coordonate şi originea reperului sunt plane de simetrie, axe de simterie şi respectiv centru pentru hiperboloidul cu două pânze.

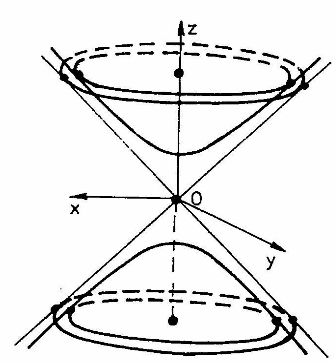
Axele Ox, Oy nu intresectează cuadrica, iar axa Oz o intersectează în punctele $C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$. Secţiunile hiperboloidului cu două pânze cu planele xOz, yOz sunt date de sistemele $h_1 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases}$, respectiv $h_2 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases}$ şi sunt hiperbole.

Secţionând cuadrica cu planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, obţinem:

- elipse reale sau imaginare dacă $|\alpha| > c$ sau $|\alpha| < c$, $e_\alpha : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} - 1 \end{cases}$

- punctul $C(0, 0, c)$, pentru $\alpha = c$ sau punctul $C'(0, 0, -c)$, pentru $\alpha = -c$.

Reprezentarea grafică a hiperboloidului cu două pânze H_2 este dată în figura 3:



(Fig. 3)

4) **Conul pătratic** (real) este cuadrica de ecuaţie $C_p : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, cu a, b, $c > 0$.

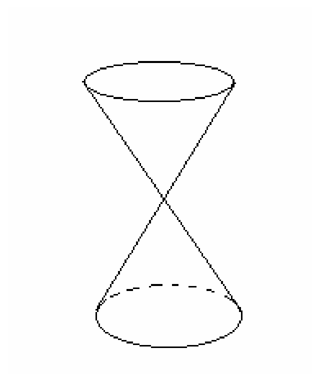
Se constată că planele de coordoante, axele de coordonate şi originea reperului sunt, respectiv, plane de simetrie, axe de simetrie şi centru pentru conul pătratic. Centrul conului se mai numeşte şi *vârf*.

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C_p$, atunci punctul $M(tx_0, ty_0, tz_0)$ aparţine conului pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Astfel, orice punct al dreptei OM_0 aparţine conului, adică dreapta OM_0 este o generatoare rectilinie a conului.

Secţiunile în con cu plane care conţin axa Oz sunt drepte concurente în vârful conului. De exemplu, secţiunea cu planul xOz este formată din dreptele $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases}$, adică $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$.

Secţiunile cu planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, sunt elipsele reale $e_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} \end{cases}$ (intersecţia cu planul $z = 0$ este vârful conului).

Reprezentarea grafică a conului patratic C_p este dată în figura 4:



(Fig. 4)

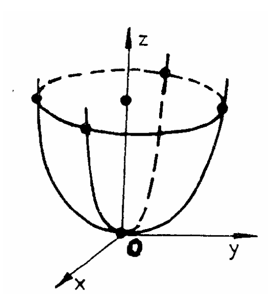
II. CUADRICE FARĂ CENTRU

1) **Paraboloidul eliptic** este cuadrica de ecuaţie $PE : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$, cu a, $b > 0$.

Se observă că dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in PE$, atunci şi punctele $M_1(-x_0, y_0, z_0)$, $M_2(x_0, -y_0, z_0)$ aparţin paraboloidului hiperbolic. Deci, planele yOz, xOz sunt plane de simetrie pentru paraboloidul eliptic. Rezultă că axa Ox este axă de simetrie a suprafeţei. Pentru a ne da seama de forma paraboloidului eliptic vom face secţiuni cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu planul xOy.

Planul xOy este tangent la PE în originea reperului, iar planele xOz, yOz intersectează cuadrica după parabolele $p_1 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}$, respectiv $p_2 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$.

Planele $z = \alpha$, $\alpha > 0$, intersectează PE dupa elipsele reale $e_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha \end{cases}$, iar planele $z = \alpha$, $\alpha < 0$, nu îl intersectează. Axele de coordonate intersectează suprafaţa într-un singur punct, originea reperului, punct numit *vârf*. Reprezentarea grafică a paraboloidului eliptic este dată în figura 5:

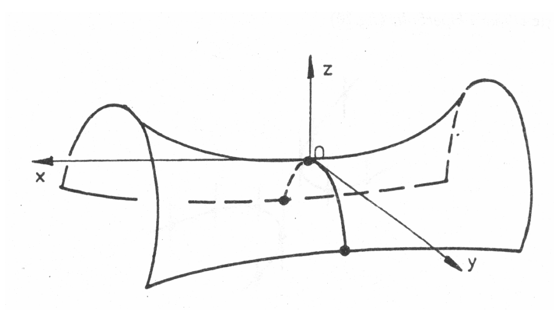


(Fig. 5)

2) **Paraboloidul hiperbolic** este cuadrica de ecuaţie $PH : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, cu $a, b > 0$.

Se verifică uşor (ca şi în cazul paraboloidului eliptic) că această cuadrică este simetrică faţă de planele xOz, yOz şi faţă de axa Oz. Axele de coordonate intersectează PH în originea reperului (punct numit *vârf*), iar intersecţiile cu planele xOz, yOz sunt parabolele $p_1 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}$, respectiv $p_2 : \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$. Planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, intersectează PH după hiperbolele $h_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha \end{cases}$, iar intersecţiile cu planele $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, intersectează PH după parbolele $p_\alpha : \begin{cases} x = \alpha \\ \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 2z \end{cases}$.

Reprezentarea grafică a paraboloidului hiperbolic este dată în figura 6:

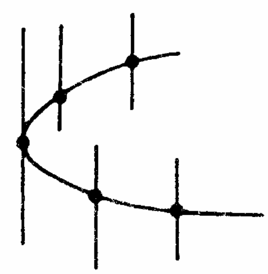


(Fig. 6)

3) **Cilindrul parabolic** este cuadrica de ecuaţie $CP : \frac{x^2}{a^2} = 2z$, cu $a > 0$.

Se observă că dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in CP$, atunci şi $M_0(-x_0, y_0, z_0) \in CP$. Deci, planul yOz este plan de simetrie pentru CP. De asemenea, se observă că axa Oy este situată pe această cuadrică. Secţiunile cu planele $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, sunt parabolele $p_\alpha : \begin{cases} y = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}$, iar intersecţiile cu planele $z = \alpha$, $\alpha > 0$, sunt dreptele paralele de ecuaţii $d : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x}{a} = \sqrt{2\alpha} \end{cases}$, $d' : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x}{a} = -\sqrt{2\alpha} \end{cases}$.

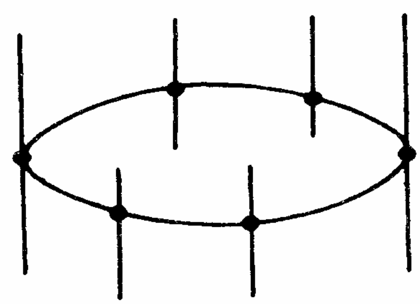
Reprezentarea grafică a cilindrului parabolic este dată în figura 7:



(Fig. 7)

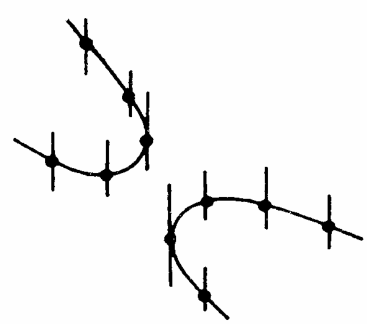
III. CUADRICE CU O DREAPTĂ DE CENTRE

1) **Cilindrul eliptic** este cuadrica de ecuaţie $CE : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu a, $b > 0$ şi este reprezentată în figura 8:



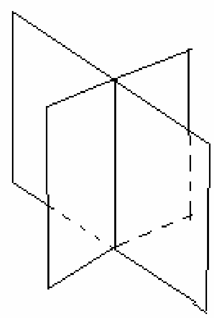
(Fig. 8)

2) **Cilindrul hiperbolic** este cuadrica de ecuaţie $CH : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, cu a, $b > 0$ şi este reprezentată în figura 9:



(Fig. 9)

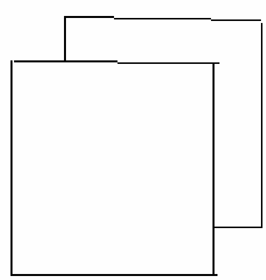
3) **Pereche de plane secante** este o cuadrică de ecuaţie $PPS : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, cu a, $b > 0$ şi este reprezentată în figura 10:



(Fig. 10)

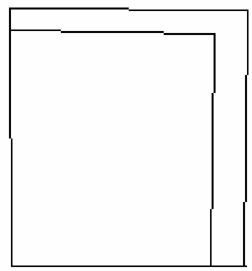
IV. CUADRICE CU UN PLAN DE CENTRE

1) **Pereche de plane paralele** este o cuadrică de ecuaţie $PPP : \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$, cu $a > 0$.



(Fig. 11)

2) **Pereche de plane confundate** este o cuadrică de ecuaţie $PPC : x^2 = 0$.



(Fig. 12)

Observaţia 7.6.1 *Dintre cuadricele nedegenerate doar hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic au generatoare rectilinii. Mai precis, prin fiecare punct al* H_1P *(sau* PH*) trec două generatoare rectilinii (a se vedea şi exerciţiile propuse spre rezolvare). Evident, cuadricele degenerate admit generatoare rectilinii.*

Desigur, un studiu cu totul similar şi mult mai simplu se poate face şi pentru conice, dar acesta s-a făcut deja în liceu.

În final să ne concentrăm asupra sferei (un caz particular de elipsoid), o suprafaţă de o importanţă deosebită între cuadrice. Fie $r > 0$ şi punctul fixat $C(\overline{r}_0)$.

Definiţia 7.6.1 *Se numeşte* ***sferă de centru*** C ***şi rază*** r *mulţimea punctelor* M *din* E_3 *situate la distanţa* r *de punctul* C*. Vom nota acestă sfera prin* $S(C, r)$*.*

Dacă $C(x_0, y_0, z_0)$, atunci punctul $M(x, y, z) \in S(C, r)$ dacă şi numai dacă $\left\|\overline{CM}\right\| = r$, adică

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \qquad (11)$$

care este numită **ecuaţia normală** a sferei $S(C, r)$.

Ecuaţia (11) se poate scrie sub forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0, \qquad (12)$$

adică este o ecuaţie algebrică de ordinul doi în x, y, z (ceea ce dovedeşte că sfera este o cuadrică, mai precis un elipsoid cu semiaxele egale).

Invers, având în vedere (11), orice ecuaţie de tipul

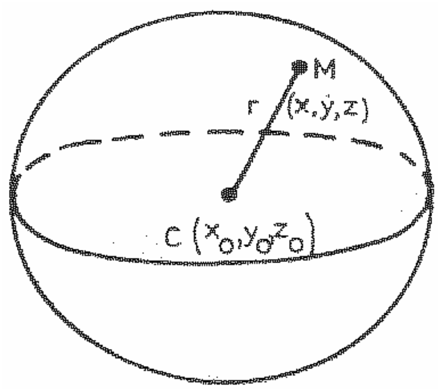
$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \qquad (13)$$

reprezintă

i) o sferă de centru $C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2} - \frac{p}{2})$ şi rază $r = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, dacă $\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$,

ii) un punct $C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2} - \frac{p}{2})$, dacă $\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$,

iii) o sferă imaginară (mulţimea vidă, de fapt), dacă $\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2-q < 0$.



(Fig. 13)

Pentru aplicaţii este util de ştiut că intersecţia dintre o sferă $S(C, r)$ şi un plan π este un cerc real, un punct (adică planul π este tangent sferei), respectiv un cerc imaginar ($\varnothing$) dacă $d(C, \pi)$ este mai mică, egală, respectiv mai mare decât raza r a sferei.

Propoziţia 7.6.1 *Fie γ cercul de intersecţie dintre sfera $S(C, r)$ şi planul π. Atunci, tangenta la cercul γ într-un punct $M_0 \in \gamma$ este dreapta de intersecţie dintre planul π şi planul tangent la sferă în punctul M_0.*

Demonstraţie. *Fie π_t planul tangent la sfera $S(C, r)$ în punctul M_0 şi $\overline{a}$ un vector director al dreptei $d = \pi \cap \pi_t$. Deoarece $d \in \pi_t$, avem $CM_0 \perp d$. Atunci $\overline{CM}_0 \cdot \overline{a} = 0$. Pe de altă parte, din $d \in \pi$, avem că $\overline{CC'} \cdot \overline{a} = 0$, unde C' este centrul cercului γ. Ţinând seama că $\overline{C'M}_0 = \overline{CM}_0 - \overline{CC'}$ rezultă că $\overline{C'M}_0 \cdot \overline{a} = 0$, adică $C'M_0 \perp d$. Prin urmare, d este tangentă la cercul γ în M_0.*

■

Exerciţiul 7.6.1 *Fie cuadrica $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y + 1 = 0$ şi planul $\pi : x + y + z - 1 = 0$.*

a) Arătaţi că Γ este o sferă şi determinaţi coordonatele centrului şi raza acesteia;

b) Arătaţi că $\Gamma \cap \pi$ este un cerc real γ şi determinaţi coordonatele centrului şi raza acestuia;

c) Scrieţi ecuaţiile tangentei la γ într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma = \Gamma \cap \pi$.

Rezolvare:

a) Ecuaţia lui Γ se scrie
$(x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 4y + 4) + z^2 - 36 - 4 + 1 = 0$ *sau*
$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = (\sqrt{39})^2$ *şi atunci Γ este o sferă de rază $R = \sqrt{39}$ şi*

de centru $C\,(6,2,0)$.

b) Distanţa de la centrul C *al sferei* Γ *la planul* π *este*

$$\rho(C,\pi)=\frac{|6\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{3}}{2}<R=\sqrt{39}\,.$$

Deci intersecţia dintre planul π *şi sfera* Γ *este un cerc real* γ *de centru* C' *şi rază* r. *Mai mult,* $r=\sqrt{R^2-(\rho(C,\pi))^2}=\frac{2\sqrt{51}}{3}$.
Pentru a găsi coordonatele centrului cercului γ, C', *mai întâi vom scrie ecuaţia unei drepte ce trece prin* C *şi este perpendiculară pe planul* π, *adică* $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{1}$.
Cum C' *este chiar proiecţia lui* C *pe planul* π, *rezolvând sistemul*
$\begin{cases} x-6=y-2=z \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ *se obţine* $C'(11/3,-1/3,-7/3)$.

c) Tangenta la cercul γ *în punctul* $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\gamma$ *se află la intersecţia planului* π *cu planul tangent la sfera* Γ *în* M_0. *Deci are ecuaţiile*
$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ (x_0-6)x+(y_0-2)y+z_0z+(-6x_0-2y_0+1)=0 \end{cases}.$

7.7 Suprafeţe riglate. Suprafeţe de rotaţie

Definiţia 7.7.1 *O suprafaţă* Σ *care poate fi generată prin mişcarea unei drepte* g *care se sprijină pe o curbă dată* $\gamma\subset E_3$ *se numeşte* ***suprafaţă riglată***. *În acest caz dreapta* g *se numeşte* ***generatoarea suprafeţei***.

În sectiunile anterioare am studiat deja astfel de suprafeţe (parabolidul hiperbolic, hiperbolidul cu o pânză, conul pătratic, cilindrii). Acum vom studia, mai întâi suprafeţele riglate numite suprafeţe cilindrice şi suprafeţe conice (care includ cuadricele de tip cilindru sau con), iar apoi suprafeţele de rotaţie (unde regăsim elipsoizi, hiperbolizi şi parabolizi de rotaţie).

Fixăm o curbă în E_3, $\gamma:\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ şi un vector nenul $\overline{v}=l\overline{i}+m\overline{j}+n\overline{k}$.

Definiţia 7.7.2 *Suprafaţa generată prin mişcarea generatoarei* g *care păstrează direcţia lui* $\overline{v}$ *şi se sprijină pe curba* γ *se numeşte* ***suprafaţă cilindrică***. *Curba* γ *se zice* ***curba directoare*** *a suprafeţei.*

Teorema 7.7.1 *O suprafaţă cilindrică* Σ *care are generatoarea* g *paralelă cu dreapta* $d:\begin{cases} P(x,y,z)=0 \\ Q(x,y,z)=0 \end{cases}$ *şi curba directoare* $\gamma:\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ *are ecuaţia carteziană*

$$\varphi(P,Q)=0, \tag{14}$$

unde φ *este o funcţie bine precizată în* x, y, z *(*$\varphi:D\subset\mathbf{R}^3\mapsto\mathbf{R}$, $(x,y,z)\mapsto\varphi(P(x,y,z),Q(x,y,z))$*), iar* P, Q *sunt funcţii polinomiale de gradul întâi în* x, y, z.

Demonstraţie. Generatoarele paralele cu d au ecuaţiile $g : \begin{cases} P(x,y,z) = \lambda \\ Q(x,y,z) = \mu \end{cases}$, cu λ, $\mu \in \mathbf{R}$. Condiţia ca g să se sprijine pe curba γ se obţine eliminând pe x, y, z între ecuaţiile sistemului format cu ecuaţiile generatoarei g şi ale curbei γ (sistem ce trebuie să fie compatibil). În urma eliminarii obţinem ecuaţia $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ sau $\varphi(P,Q) = 0$. ■

Exemplul 7.7.1 *Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice de generatoare g paralelă cu axa Oz şi de curbă directoare* $\gamma : \begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$.

Rezolvare:

În acest caz $f(x,y,z) = x^2 + yz$, $g(x,y,z) = 2x - z - 1$, *iar* $g : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$, *iar prin eliminarea lui x, y, z între aceste ecuaţii se obţine suprafaţa cilindrică* $\Sigma : x^2 + 2xy - y = 0$, *deoarece* $\varphi(\lambda,\mu) = \lambda^2 + \mu(2\lambda - 1) = 0$.

Exerciţiul 7.7.1 *Aceeaşi cerinţă pentru suprafaţa cilindrică de generatoare g paralelă cu axa Ox şi de curbă directoare* $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Fixăm o curbă în E_3, $\gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ şi un punct $V(a,b,c)$.

Definiţia 7.7.3 *Suprafaţa generată prin mişcarea generatoarei g care trece prin punctul fix V, numit **vârf** şi se sprijină pe curba dată γ se numeşte **suprafaţă conică**.Curba γ se zice **curbă directoare** a suprafeţei.*

Teorema 7.7.2 *O suprafaţă conică Σ pentru care vârful V are coordonatele date de sistemul:* $\begin{cases} P(x,y,z) = 0 \\ Q(x,y,z) = 0 \\ R(x,y,z) = 0 \end{cases}$ *şi curba directoare* $\gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ *are ecuaţia carteziană*

$$\varphi(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}) = 0, \tag{15}$$

unde φ este o funcţie bine precizată în x, y, z ($\varphi : D \subset \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$, $(x,y,z) \mapsto \varphi(\frac{P(x,y,z)}{R(x,y,z)}, \frac{Q(x,y,z)}{R(x,y,z)})$), *iar P, Q, R sunt funcţii polinomiale de gradul întâi în x, y, z.*

Demonstraţie. Mulţimea dreptelor g care trec prin V şi care nu aparţin planului $R(x,y,z) = 0$ este la intersecţia a două plane din fasciculele de plane determinate de dreapta de intersecţie a planelor $P(x,y,z) = 0$ cu $R(x,y,z) = 0$ şi, respectiv $Q(x,y,z) = 0$ cu $R(x,y,z) = 0$, adică $g : \begin{cases} P(x,y,z) - \lambda R(x,y,z) = 0 \\ Q(x,y,z) - \mu R(x,y,z) = 0 \end{cases}$, cu λ, $\mu \in \mathbf{R}$. Condiţia ca g să se sprijine pe curba γ se obţine eliminând pe x, y, z între ecuaţiile sistemului format cu ecuaţiile lui g şi ale curbei γ (sistem ce trebuie să fie compatibil). În urma eliminării obţinem ecuaţia $\varphi(\lambda,\mu) = 0$ sau $\varphi(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}) = 0$. ■

Exemplul 7.7.2 *Să se determine ecuaţia suprafeţei conice de vârf* $O(0,0,0)$ *şi de curbă directoare cercul* $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ z=a, \quad a>0. \end{cases}$

Rezolvare:

În acest caz $f(x,y,z)=x^2+y^2-R^2$, $g(x,y,z)=z-a$. *Vârful* V *este dat de sistemul* $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ *, adică generatoarele* g *care nu aparţin planului* xOy $(z=0)$ *au ecuaţiile* $g : \begin{cases} x-\lambda z=0 \\ y-\mu z=0 \end{cases}$ *, iar prin eliminarea lui* x, y, z *între aceste ecuaţii şi ecuaţiile lui* γ *se obţine suprafaţa conică* $\Sigma : x^2+y^2=\frac{R^2}{a^2}z^2$*, deoarece mai întâi* $\varphi(\lambda,\mu)=\lambda^2+\mu^2-\frac{R^2}{a^2}=0$ *sau* $\varphi(\frac{P}{R},\frac{Q}{R})=0$.

Exerciţiul 7.7.2 *Aceeaşi cerinţă pentru suprafaţa conica de vârf* $V(1,0,-1)$ *şi curba directoare* $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ 2z-1=0 \end{cases}$.

Definiţia 7.7.4 *O suprafaţă care poate fi generată prin rotirea unei curbe* γ*, zisă* ***curbă directoare****, în jurul unei drepte fixe* d*, numită* ***axă de rotaţie****, se numeşte* ***suprafaţă de rotaţie****.*

Teorema 7.7.3 *O suprafaţă de rotaţie* Σ *care are axa de rotaţie* $d : \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ *şi curba directoare* $\gamma : \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ *are ecuaţia carteziană*

$$F((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2, lx+my+nz)=0, \tag{16}$$

unde F *este o funcţie ce se determină.*

Demonstraţie. Din definiţie rezultă că orice punct $M(x,y,z)$ de pe curba γ se mişcă într-un plan π perpendicular pe axa d de ecuaţie, $\pi : lx+my+nz=\mu$, $\mu \in \mathbf{R}$ şi va descrie un cerc G (zis **cerc generator**) care apare ca intersecţia dintre planele π şi sferele $S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2$, $\lambda>0$, cu centrul în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)\in d$, adică $G : \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2, \\ lx+my+nz=\mu. \end{cases}$

Cum cercul G se sprijină pe curba γ trebuie ca sistemul format cu ecuaţiile lui G şi γ să fie compatibil. Eliminând pe x, y, z între ecuaţiile acestui sistem rezultă condiţia de compatibilitate $F(\lambda^2,\mu)=0$, adică $F((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2, lx+my+nz)=0$. ■

Exemplul 7.7.3 *Să se determine ecuaţia carteziană a* ***torului****, care este suprafaţa descrisă de un cerc care se roteşte în jurul unei axe aflate în planul cercului.*

Rezolvare:

Fie $\gamma : \begin{cases} (x-a)^2+y^2+z^2=R^2 \\ y=0 \end{cases}$ *,* $a>R$*, cercul cu centrul pe axa* Ox *situat în planul* xOz *şi axa de rotaţie o luăm ca fiind axa* Oz*. Atunci cercul* *generator este* $G : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \end{cases}$ *şi astfel rezultă condiţia de compatibilitate a sistemului format din ecuaţiile lui* G *şi* γ*,* $\left(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} - a\right)^2 + \mu^2 = R^2$*. Prin eliminarea lui* λ *şi* μ *obţinem ecuaţia torului* $\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = R^2$*, adică* $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$*.*

Observaţia 7.7.1 *Să observăm ca torul este o suprafaţă de rotaţie care nu este o cuadrică!*

Exerciţiul 7.7.3 *Aceeaşi cerinţă pentru suprafaţa de rotaţie obtinută prin rotirea parabolei* $\gamma : \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$ *în jurul axei* Ox*.*

7.8 Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie cuadrica $\Gamma : xy - 3xz + 4yz - 3 = 0$.

   a) Studiaţi natura acestei cuadrice;

   b) Studiaţi problema centrelor pentru Γ;

   c) Determinaţi generatoarele rectilinii ale lui Γ care trec prin punctul $M_0(1, 1, 2)$.

2. Fie cuadrica $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 4y - 4z = 0$ şi planul $\pi : x + 2y - 2z = 0$.

   a) Să se arate că Γ este o sferă. Determinaţi centrul acestei sfere şi raza sa;

   b) Să se arate că $\Gamma \cap \pi$ este un cerc real γ. Determinaţi centrul acestui cerc şi raza sa;

   c) Calculaţi distanţa de la punctul $A(1, 2, -1)$ la dreapta tangentă la cercul $\gamma = \Gamma \cap \pi$ în punctul O.

3. Fie conica $\gamma : 4x^2 + 12xy + \alpha y^2 + 6x + 9y + 2 = 0$.

   a) Calculaţi δ, Δ. Discuţie după $\alpha \in \mathbf{R}$;

   b) Să se determine α astfel încât conica γ să reprezinte două drepte.

4. Se dă conica $\boldsymbol{\Gamma}$ de ecuaţie:

   $$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 3 = 0.$$

   a) Să se calculeze δ, Δ;

   b) Să se scrie ecuaţia tangentei la conică în punctul de coordonate $(1, 1)$;

   c) Să se determine ecuaţia canonică a conicei γ şi reperul natural ataşat. Recunoasteţi conica.

5. Fie cuadrica $\Gamma : x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0$.

   a) Să se calculeze δ, Δ;

   b) Să se determine coordonatele centrului C al cuadricei Γ;

   c) Să se aducă la forma canonică ecuaţia cuadricei şi să se recunoască cuadrica. Precizaţi reperul natural ataşat lui Γ.

6. Fie hiperboloidul cu o pânză:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2-1=0$$

   şi punctul $M_0\,(3,2,-1)$.

   a) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0;

   b) Să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

7. Fie paraboloidul hiperbolic de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$$

   şi punctul $M_0\,(0,2,-1)$.

   a) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0;

   b) Să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

8. Fie cuadrica $\Gamma : x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$.

   a) Este Γ o cuadrică nedegenerată?

   b) Rezolvaţi problema centrelor de simetrie pentru Γ;

   c) Determinaţi ecuaţia canonică şi reperul natural pentru Γ. Recunoasteţi cuadrica Γ.

9. a) Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la elipsoidul $E : x^2+y^2+2z^2-1=0$ care sunt paralele cu planul $\pi : x-y+z-1=0$;

   b) Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la cuadrica $\Gamma : 2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0$ care conţin dreapta $d : \begin{cases} 4x-5y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$.

10. Fie hiperbola (în spaţiu) $h : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$.

    a) Să se scrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinută prin rotirea hiperbolei h în jurul axei Ox;

    b) Să se scrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinută prin rotirea hiperbolei h în jurul axei Oy.

11. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice având curba directoare $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ şi generatoarele paralele cu dreapta $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$.

12. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(-1, 0, 1)$ şi având curba directoare $\gamma : \begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases}$, cu $p > 0$ fixat arbitrar.

Partea III

GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Capitolul 8

Curbe în plan şi în spaţiu

Fixăm un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ în E_3 (sau $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}\right\}$ în E_2).

Din momentul în care am fixat un reper cartezian ortonormat în spaţiul E_3, orice punct $M \in E_3$ se identifică cu tripletul $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, format cu coordonatele punctului faţă de reperul considerat. De asemenea, orice punct $M \in E_3$ se identifica cu vectorul sau de poziţie $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \in V^3$. Prin urmare, putem identifica E_3 cu $\mathbf{R}^3$, din punct de vedere topologic (chiar metric, deoarece spaţiile au aceeaşi distanţă) sau putem identifica V^3 cu $\mathbf{R}^3$, din punct de vedere algebric şi topologic (sunt spaţii vectoriale izomorfe şi izometrice).

De fapt, în continuare vom considera că $\mathbf{R}^3$ este modelul aritmetic al spaţiului punctual euclidian E_3, raportat la un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ şi că $\mathbf{R}^3$ este modelul aritmetic al spatiului vectorial al vectorilor liberi V^3 asociat lui E_3. O situaţie similară avem pentru $\mathbf{R}^2$ şi planul euclidian.

8.1 Drumuri parametrizate. Parametrizare naturală. Drumuri echivalente

Definiţia 8.1.1 *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval deschis (sau, uneori, închis, semiînchis sau o reuniune de intervale). Se numeşte* ***drum parametrizat de clasă*** *C^k $(k \geq 1)$ în spaţiu (sau în plan) o aplicaţie $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$(sau $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$, în cazul plan), $t \in I \xrightarrow{\alpha} \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (sau $t \in I \xrightarrow{\alpha} \alpha(t) = (x(t), y(t))$, în cazul plan), de clasă C^k $(k \geq 1)$ pe I, adică fiecare dintre funcţiile scalare $t \in I \xrightarrow{x} x(t)$, $t \in I \xrightarrow{y} y(t)$, $t \in I \xrightarrow{z} z(t)$ sunt derivabile de k ori I şi derivata de ordinul k este continuă pe I (analog, pentru cazul plan).*

Vom nota un drum parametrizat prin $(I, \alpha = \alpha(t))$.

Mulţimea de puncte $\alpha(I) = \{\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))\, | t \in I\} \subset \mathbf{R}^3$ se numeşte **suportul** (sau *imaginea*) drumului parametrizat α.

Spunem că un punct $M_0 \in E_3$, de coordonate (x_0, y_0, z_0) relativ la reperul $\mathcal{R}$, **se află pe suportul** drumului parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$ dacă există $t_0 \in I$ aşa încât $\alpha(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Vom scrie $M_0 \in \alpha(I)$ sau $M_0 = \alpha(t_0)$.

Ecuaţiile

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. , \quad t \in I, \tag{1}$$

se numesc **ecuaţiile parametrice** ale drumului α, iar $t \in I$ se zice **parametru** (sau **coordonată curbilinie**).

Dacă considerăm aplicaţia vectorială $\overline{\alpha} : t \in I \to \overline{\alpha}(t) = \overline{OM} = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k} \in V^3$, atunci ecuaţia

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(t), \quad t \in I, \tag{2}$$

se numeşte **ecuaţia vectorială** a drumului α.

Definiţia 8.1.2 *Un drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$ se numeşte **nesingular** (sau ordinar, sau regulat) dacă*

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0, \quad \forall t \in I,$$

adică $\overline{\alpha}'(t) = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k} \neq \overline{0}$, pentru orice $t \in I$.

Un punct $M = \alpha(t_0)$, $t_0 \in I$, al drumului pentru care $\overline{\alpha}'(t_0) = \overline{0}$ se numeşte **punct singular**. Altfel, dacă $\overline{\alpha}'(t_0) \neq \overline{0}$, spunem că M este un **punct ordinar** (sau *regulat*).

Vectorul $\overline{\alpha}'(t_0) \overset{not}{=} \frac{d\overline{\alpha}}{dt}(t_0)$ se numeşte **vectorul viteză** (sau **vector tangent**) la drumul parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$, în punctul $M = \alpha(t_0)$.

Definiţia 8.1.3 *Fie drumul parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$. Un punct $M \in \alpha(I)$ se numeşte **punct simplu** dacă există o singură valoare $t_0 \in I$ astfel ca $M = \alpha(t_0)$. În caz contrar, dacă există două, trei sau, în general, mai multe valori distincte, atunci punctul M se numeşte **punct dublu**, **triplu**, respectiv **multiplu**.*

Definiţia 8.1.4 *Dacă $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ (sau $\mathbf{R}^2$) este un drum parametrizat de clasă C^k astfel ca $\alpha(a) = \alpha(b)$, atunci spunem că drumul α este **închis**.*

Exemplul 8.1.1 *1) Fie $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ un vector liber nenul şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ un punct fixat. Aplicaţia vectorială $\overline{\alpha} : t \in \mathbf{R} \to \overline{\alpha}(t) = \overline{OM} = (x_0 + tl)\overline{i} + (y_0 + tm)\overline{j} + (z_0 + tn)\overline{k} \in V^3$ defineşte un drum parametrizat $(\mathbf{R}, \alpha = \alpha(t))$ de clasă C^∞, care are drept suport chiar dreapta d determinată de punctul M_0 şi vectorul director $\overline{v}$. Cum $\overline{\alpha}'(t) = \overline{v} \neq \overline{0}$, rezultă că drumul α este nesingular. Se observă că şi drumul parametrizat $(\mathbf{R}, \alpha_1 = \alpha_1(t))$ de clasă C^∞, definit prin $\overline{\alpha}_1(t) = (x_0 + t^3 l)\overline{i} + (y_0 + t^3 m)\overline{j} + (z_0 + t^3 n)\overline{k}$, are ca suport tot dreapta d determinată de punctul M_0 şi vectorul director $\overline{v}$ (justificarea-temă!), dar $\overline{\alpha}_1'(t) = 3t^2\overline{v}$ şi astfel $\overline{\alpha}_1$ este un drum cu un punct singular $P = \alpha_1(0)$. Deci $\overline{\alpha}_1$ este un drum diferit de drumul $\overline{\alpha}$, deşi au acelaşi suport.*

2) Drumul $\alpha_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha_1(t) = (R\cos t, R\sin t)$ este un drum închis, nesingular în plan, de clasă C^∞ cu suportul chiar cercul cu centrul în originea reperului şi raza R, iar drumul $\alpha_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha_2(t) = (R\cos 2t, R\sin 2t)$ este tot un drum închis, nesingular, de clasă C^∞ cu acelaşi suport.

Este clar că există drumuri parametrizate diferite (de aceeaşi clasă sau nu) care au acelaşi suport sau nu. Din acest motiv ne interesează cum putem compara şi relaţiona două drumuri parametrizate de aceeaşi clasă care să aibă acelaşi suport.

Definiţia 8.1.5 *Două drumuri parametrizate de clasa C^k, $\alpha_1 : I \to \mathbf{R}^3$ şi $\alpha_2 : J \to \mathbf{R}^3$, se numesc **echivalente (şi cu aceeaşi orientare)** dacă există o funcţie $\varphi : I \to J$ de clasă C^k, bijectivă (şi strict crescatoare) astfel ca $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$.*

*Funcţia φ se zice **schimbare de parametru**. Evident că şi inversa $\varphi^{-1} : J \to I$ este de clasă C^k, strict crescatoare şi $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi^{-1}$.*

La exemplul 2) de mai sus schimbarea de parametru (de clasă C^∞) este $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$, $\varphi(t) = 2t$. În general, avem:

Propoziţia 8.1.1 *Două drumuri parametrizate $(I, \alpha_1 = \alpha_1(t))$, $(J, \alpha_2 = \alpha_2(\tau))$ de aceeaşi clasă care sunt echivalente (nu neapărat şi cu aceeaşi orientare) au acelaşi suport.*

Demonstraţie. $\alpha_1(I) = (\alpha_2 \circ \varphi)(I) = \alpha_2(\varphi(I)) = \alpha_2(J)$. ■

Reciproca nu este întotdeauna adevarată! A se vedea exemplul 1) de mai sus.

Exerciţiul 8.1.1 *Arataţi că dacă $(I, \alpha_1 = \alpha_1(t))$ şi $(J, \alpha_2 = \alpha_2(\tau))$ sunt două drumuri parametrizate echivalente (nu neapărat şi cu aceeaşi orientare), iar unul dintre drumuri este nesingular, atunci şi celălalt drum este nesingular. (Indicaţie: A se folosi relaţia $\overline{\alpha}_1'(t) = \varphi'(t)\overline{\alpha}_2'(\varphi(t))$, de la derivarea funcţiilor compuse).*

Definiţia 8.1.6 *Un drum parametrizat $(I, \beta = \beta(s))$ se zice **drum cu parametrizare naturală** dacă $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = 1$, $\forall s \in I$, adică vectorul viteză are lungimea 1 în orice punct al drumului. În acest caz, s se numeşte **parametru natural**.*

Având în vedere noţiuni clasice de analiză matematică, putem da definiţia:

Definiţia 8.1.7 *Fie $(I, \alpha = \alpha(t))$ un drum parametrizat de clasă C^k $(k \geq 1)$. Pentru orice t_1, $t_2 \in I$ numărul real pozitiv*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \|\overline{\alpha}'(t)\| \, dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \right| \tag{3}$$

*se numeşte **lungimea drumului** α între punctele $M_1 = \alpha(t_1)$ şi $M_2 = \alpha(t_2)$, notată prin $L_{\overline{t_1 t_2}}$ sau $L_{\widehat{M_1 M_2}}$.*

Dacă $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ şi integrala $\int_a^b \|\overline{\alpha}'(s)\|\,dt$ există şi este finită, atunci drumul se zice **drum rectificabil**. Din analiza matematică se cunoaşte că dacă α este de clasă C^k, $k \geq 1$, pe $[a,b]$, atunci drumul α este rectificabil.

Propoziţia 8.1.2 *Dacă $(I, \beta = \beta(s))$ este un drum cu parametrizare naturală şi dacă $0 \in I$, iar $s > 0$, atunci valoarea lui s coincide cu lungimea drumului de la $M_0 = \beta(0)$ la $M = \beta(s)$.*

Demonstraţie. $L_{\widehat{M_0 M}} = \left|\int_0^s \left\|\overline{\beta}'(s)\right\| ds\right| = \left|\int_0^s 1 ds\right| = |s-0| = s.$ ■

Datorită acestui rezultat parametrul natural s se mai numeşte **abscisă curbilinie** a punctului $M = \beta(s)$ pe drumul β faţă de "*originea*" $M_0 = \beta(0)$.

Propoziţia 8.1.3 *Două drumuri echivalente $(I, \alpha_1 = \alpha_1(t))$, $(J, \alpha_2 = \alpha_2(\tau))$ au aceeaşi lungime între punctele care se corespund.*

Demonstraţie. Dacă φ este schimbarea de parametru şi $\tau_1 = \varphi(t_1)$, $\tau_2 = \varphi(t_2)$, atunci $L_{\overline{t_1 t_2}} = \left|\int_{t_1}^{t_2} \|\overline{\alpha}_1'(t)\|\,dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \|\overline{\alpha}_2'(\varphi(t))\| \cdot |\varphi'(t)| dt\right| = \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\overline{\alpha}_2'(\tau)\|\,d\tau\right| = L_{\overline{\tau_1 \tau_2}}$. ■

Propoziţia 8.1.4 *Orice drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$ de clasă cel puţin C^1 este echivalent şi are aceeaşi orientare cu un drum cu parametrizare naturală.*

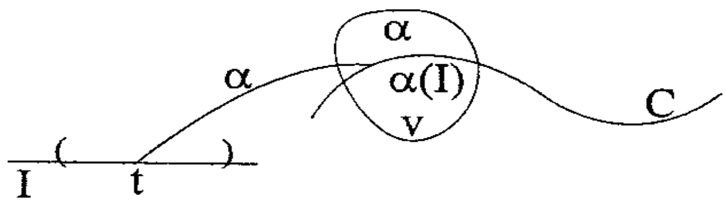
Demonstraţie. Fixăm $t_0 \in I$ şi definim funcţia $\varphi : I \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\overline{\alpha}'(\tau)\|\,d\tau$. Evident că φ este o funcţie derivabilă şi strict crescatoare ($\varphi'(t) = \|\overline{\alpha}'(t)\| > 0$, $\forall t \in I$), iar cum $J = \varphi(I)$ este un interval şi există $\varphi^{-1} : J \to I$, putem defini $\beta : J \to E_3$, prin $\beta = \alpha \circ \varphi^{-1}$. Este uşor de văzut că $(J, \beta = \beta(s))$ este un drum parametrizat de clasa drumului α, iar funcţia φ este o schimbare de parametru, $s = \varphi(t)$ (sau $\varphi^{-1}(s) = t$). Mai mult, $\overline{\beta}'(s) = \overline{\alpha}'(\varphi^{-1}(s)) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(s) = \overline{\alpha}'(\varphi^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \overline{\alpha}'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \overline{\alpha}'(t) \cdot \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t)\|}$ şi astfel avem ca $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = 1$, pentru orice $s \in J$. În final, cum $\alpha = \beta \circ \varphi$ avem că drumul α este echivalent şi are aceeaşi orientare cu drumul cu parametrizare naturală β. ■

Exemplul 8.1.2 *1) Fie $\alpha_1 : [0,\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha_1(t) = (R\cos t, R\sin t)$ şi $\alpha_2 : [-R,R] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha_2(x) = \left(-x, \sqrt{R^2 - x^2}\right)$. Cum $\varphi : [0,\pi] \to [-R,R]$, $\varphi(t) = -R\cos t$ este derivabilă, strict crescătoare, bijectivă, adică este o schimbare de parametru, iar $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$ rezultă că drumurile α_1 şi α_2 sunt echivalente şi cu aceeaşi orientare. Suportul lor comun este chiar semicercul superior al cercului de centru O şi raza R.*

2) Drumurile $\alpha_1 : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha_1(t) = (R\cos t, R\sin t)$ şi $\alpha_2 : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha_2(u) = (R\cos 3u, R\sin 3u)$ au aceeaşi imagine (suport), $\left\{(x,y)|x^2+y^2 = R^2\right\}$ - cercul de centru O şi raza R, dar nu sunt echivalente chiar dacă avem $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$, unde $\varphi : [0,2\pi] \to [0,2\pi]$, $u = \varphi(t) = \frac{t}{3}$, deoarece φ nu este surjectivă şi deci nu este o schimbare de parametru.

8.2 Definiţia curbei. Moduri de reprezentare

Definiţia 8.2.1 *O submulţime $C \subset E_3$ (sau $C \subset E_2$) se numeşte* ***curbă în spaţiu (în plan)*** *dacă pentru orice punct $a \in C$ există un drum parametrizat de clasă C^1, nesingular, $(I, \alpha = \alpha(t))$, unde $I \subset \mathbf{R}$ interval deschis, şi o vecinătate V a lui a astfel ca $\alpha(I) = V \cap C$, iar aplicaţia $\alpha : I \to \alpha(I)$ să fie bijectivă cu inversa continuă (adică sa fie un homeomorfism).*



Observaţia 8.2.1 *Definiţia dată aici permite sesizarea imediată a faptului că o curbă este o varietate diferenţiabilă de dimensiune 1. Cu alte cuvinte, o curbă C coincide local cu suportul unui drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$ nesingular, drum care se numeşte* ***parametrizare locală*** *a curbei C în vecinătatea lui $a \in C$.*

Definiţia 8.2.2 *Curba C se numeşte* ***curbă simplă*** *dacă există un drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$ de clasă C^1 aşa încât $\alpha(I) = C$.*

Pentru o mai profundă întelegere a noţiunii de curbă prezentăm teorema următoare:

Teorema 8.2.1 *a) Fie $C \subset E_3$ o curbă. Daca $a \in C$ şi $V \subset E_3$ este o mulţime deschisă care conţine punctul a, atunci orice două parametrizări locale ale lui C, $(I, \alpha = \alpha(t))$, $(J, \beta = \beta(\tau))$, cu $V \cap C = \alpha(I) = \beta(J)$ sunt echivalente.*

b) Dacă $(I, \alpha = \alpha(t))$ este un drum parametrizat nesingular, atunci pentru orice $t_0 \in I$ există o vecinătate $J \subset I$ a lui t_0 aşa încât $C = \alpha(J)$ să fie o curbă simplă.

Demonstraţie. a) Definim $\varphi : I \to J$ prin $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha$. Dacă dovedim că φ este o schimbare de parametru, atunci rezultă că cele două drumuri sunt echivalente (pentru că $\alpha = \beta \circ \varphi$).

Mai întâi să observăm că φ este bijectivă, deoarece $\alpha : I \to \alpha(I)$ şi $\beta : J \to \beta(J)$ sunt bijective. Rămâne sa arătăm că φ şi φ^{-1} sunt derivabile.

Fie $t_0 \in I$, arbitrar fixat. Fie $\tau_0 = \varphi(t_0) \in J$. Deoarece drumul $(J, \beta = \beta(\tau))$ este nesingular, adică $\overline{\beta}'(\tau) = x'(\tau)\overline{i} + y'(\tau)\overline{j} + z'(\tau)\overline{k} \neq \overline{0}$, $\forall \tau \in J$, atunci avem că $\overline{\beta}'(\tau_0) \neq \overline{0}$. Dacă presupunem că $x'(\tau_0) \neq 0$, atunci aplicând Teorema funcţiei inverse (notând $x(\tau_0) = x_0$) avem că există o vecinatate $U \subset J$ a lui τ_0, o vecinătate V a lui x_0 şi o funcţie bijectivă $f : V \to U$ cu f şi f^{-1} derivabile aşa încât ecuaţia $x = x(\tau)$ să aibă soluţia $\tau = f(x)$. Atunci $\beta(f(V)) = \beta(U) = C \cap D$, unde D este o vecinătate a punctului $(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$. Deoarece $\beta(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$, $\forall \tau \in J$ rezultă că $\forall x \in V$ avem $\beta(f(x)) = (x, y, z)$ şi astfel $\beta^{-1}(x, y, z) = f(x)$. Atunci, în vecinătatea $\alpha^{-1}(\beta(f(V)))$ a lui $t_0 = \varphi^{-1}(\tau_0)$, funcţia $\varphi(t) = \beta^{-1}(\alpha(t)) = f(x(t))$ este derivabilă deoarece este o compunere de funcţii derivabile. Cum φ este derivabilă în vecinătatea lui t_0 şi t_0 este arbitrar ales în I, atunci rezultă că φ este derivabilă pe I, iar φ^{-1} este derivabilă pe J.

b) Fie $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$. Fixăm $t_0 \in I$, arbitrar. Cum $\overline{\alpha}'(t_0) \neq \overline{0}$ avem, de exemplu, $x'(t_0) \neq 0$ şi atunci conform Teoremei funcţiei inverse rezultă că ecuaţia $x = x(t)$ admite soluţia $f = f(x)$ cu f derivabilă într-o vecinătate V a lui $x_0 = x(t_0)$, iar $f(x_0) = t_0$. Fie $U = f(V)$. Atunci $f : V \to U$ este bijectivă şi f, f^{-1} sunt derivabile. În plus, ştim că $f^{-1} : U \to V$, $t \to x(t)$, $\alpha|_V : V \to \alpha(U)$, $x(t) \to (x(t), y(t), z(t))$ sunt bijecţii continue astfel încât $\alpha = \alpha|_V \circ f^{-1}$ este de asemenea continuă. Deci $\alpha(U)$ este o curbă simplă. ■

În concluzie, orice curbă este local suportul unui drum parametrizat nesingular, unic determinat până la o schimbare de parametru.

Având în vedere că orice două parametrizări locale, cu acelaşi suport, ale aceleiaşi curbe sunt echivalente, teorema de mai sus permite definirea unei curbe ca o clasă de echivalenţă a unui drum parametrizat. Această definiţie nu coincide cu definiţia curbei ca o varietate diferenţiabilă unidimensională, introdusă la începutul secţiunii.

Definiţia 8.2.3 *Se numeşte* ***parametrizare locală naturală*** *pe o curbă alegerea unui drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(s))$ cu proprietatea că $\|\overline{\alpha}'(s)\| = 1$, $\forall s \in I$. s se numeste* ***parametru natural*** *pe curbă.*

Având în vedere că orice drum parametrizat de clasă cel puţin C^1 este echivalent cu un drum cu parametrizare naturală rezultă:

Propoziţia 8.2.1 *Orice curbă admite o parametrizare locală naturală.*

Definiţia 8.2.4 *Fie C o curbă în spaţiu (sau în plan). Atunci:*

a) curba C se numeşte ***închisă*** *dacă este reprezentată de un drum parametrizat închis, adică există $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ (sau $\mathbf{R}^2$) un drum parametrizat de clasă C^1, nesingular, astfel ca $\alpha(a) = \alpha(b)$.*

b) dacă există două drumuri parametrizate $\alpha_1 : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ şi $\alpha_2 : [b, c] \to \mathbf{R}^3$ aşa încât $\alpha_1(b) = \alpha_2(b)$, atunci drumul $\alpha : [a, c] \to \mathbf{R}^3$, definit prin $\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & t \in [a, b] \\ \alpha_2(t), & t \in (b, c] \end{cases}$ este numit ***juxtapunerea*** *(sau lipitura) celor două drumuri, iar $C = C_1 \cup C_2$ este o curbă obţinută prin juxtapunerea curbelor simple $C_1 = \alpha_1([a, b])$ şi $C_2 = \alpha_2([b, c])$.*

c) curba C este o ***curbă fără puncte multiple*** *dacă orice drum parametrizat ce o reprezintă (local) este un drum format numai din puncte simple.*

d) curba C se numeşte ***curbă rectificabilă*** *dacă este reprezentată de un drum rectificabil. Lungimea comună a drumurilor echivalente ce definesc curba C se numeşte* ***lungimea*** *curbei C.*

e) se numeşte ***drum parametrizat nesingular pe porţiuni*** *(numit şi* ***drum neted****) un drum obţinut prin juxtapunerea unui număr finit de drumuri parametrizate nesingulare. O curba C se zice* ***curbă nesingulară pe porţiuni*** *(sau* ***netedă****) dacă este reprezentată de un drum parametrizat nesingular pe porţiuni.*

În continuare vom prezenta şi alte moduri de a defini o curbă în spaţiu (sau în plan), numite *moduri de reprezentare a curbelor.*

8.2.1 Curbe în plan

O curba C se numeşte **curbă plană** (sau **în plan**) dacă exisă un plan în spaţiu care conţine curba C.

Alegem reperul ortonormat cartezian în spaţiu $Oxyz$ aşa încât planul curbei să fie chiar planul xOy. O curbă plană poate fi dată *parametric, explicit, implicit* sau *în coordonate polare.*

1) Reprezentarea parametrică

Reamintim (din definiţia curbei) că o curba C este reprezentată parametric dacă pentru orice punct al său există o vecinătate în care curba este suportul unui drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$. Avem astfel ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I. \tag{1'}$$

Exemplul 8.2.1 *a) Cercul de centru O şi raza R are ecuaţiile parametrice:* $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, *reprezintă elipsa de semiaxe a, b, pe ecuaţia canonică.*

c) Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, \infty)$, *reprezinta* ***cicloida****, adică curbă plană descrisă de un punct fixat pe un cerc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe semiaxa Ox pozitivă începând din poziţia iniţială cu centrul cercului pe axa Oy.*

2) Reprezentarea explicită

Fie funcţia $f : I \to \mathbf{R}$, de clasă C^1. Graficul ei $G_f = \{(x, f(x)) | x \in I\}$ este o curbă simplă, cu parametrizarea $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$, $t \in I$. Uneori se întalnesc şi curbe de tipul $C : x = g(y)$, unde $g : J \to \mathbf{R}$, de clasă C^1, cu parametrizarea $\begin{cases} x = g(t) \\ y = t \end{cases}$, $t \in J$.

Exemplul 8.2.2 *Curba dată explicit prin $y = f(x)$, unde $f(x) = e^{-x^2}$, este* ***clopotul lui Gauss****.*

3) Reprezentarea implicită

Fie $D \subseteq \mathbf{R}^2$ o mulţime deschisă, $F : D \to \mathbf{R}$ de clasă C^1şi $\Gamma = \{(x, y) \in D | F(x, y) = 0\}$. *În general mulţimea* Γ *nu este o curbă.* Dacă însă, pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D$ avem că $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$, atunci mulţimea Γ este o curbă, iar ecuaţia

$$F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D \tag{4}$$

se numeşte **ecuaţia carteziană implicită** a curbei plane Γ.

Într-adevăr, dacă într-un punct $(x_0, y_0) \in D$ avem, de exemplu, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, atunci aplicând Teorema funcţiilor implicite avem că există o vecinătate $V \subset D$ a punctului (x_0, y_0) şi o funcţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$, de clasă C^1 (I fiind un interval real deschis ce conţine pe x_0) aşa încât $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$ şi $F(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in I$. E clar că $\Gamma \cap V = \{(x, \varphi(x)) | x \in I\}$ este o curbă. Deci, local, putem găsi un drum parametrizat ce reprezintă local pe Γ. Reciproc, dacă $\alpha : I \to E_2$ este un drum parametrizat cu $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ şi în vecinătatea unui punct $t_0 \in I$ putem elimina pe t între ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, obţinând ecuaţia $F(x, y) = 0$, atunci acesta este ecuaţia unei curbe plane cu suportul inclus în Γ.

Exemplul 8.2.3 *Cercul cu reprezentarea implicită* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2 = 0$, *are două reprezentari explicite* $y = f(x) = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$, $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ *şi reprezentarea parametrică* $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4) Reprezentarea în coordonate polare

Fie $f : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbf{R}$, o funcţie derivabilă şi cu valori pozitive, iar (ρ, θ) coordonatele polare în plan ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$). Fie $\Gamma = \{(\theta, \rho) | \rho = f(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]\} \subset \mathbf{R}^2$. Mulţimea Γ este o curbă plană cu parametrizarea locală $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Atunci, în coordonate polare, curba Γ are ecuaţia

$$\rho = f(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{5}$$

Exemplul 8.2.4 *Curba de ecuaţie* $\rho = k\theta$, $\theta \geq 0$, *($k > 0$, fixat) se numeşte* ***spirala lui Arhimede. Trifoiul cu patru foi*** *are ecuaţia* $\rho = a\sin 2\theta$, $\theta \in \{\theta \in \mathbf{R} | \sin 2\theta \geq 0\}$, *($a > 0$, fixat).*

8.2.2 Curbe în spaţiu (curbe strâmbe)

1) Reprezentarea parametrică

Ca şi în cazul curbelor plane, o curbă C în spaţiu (zisă şi *curbă strâmbă*) este reprezentată parametric dacă pentru orice punct al sau există o vecinătate în care curba coincide cu suportul unui drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$.

Exemplul 8.2.5 *a) Suportul drumului* $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$*,* $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$*,* $a, b > 0$ *este o curbă numită* ***elice cilindrică****.*

b) Curba dată prin ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = t^2 \\ y = e^t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$*, reprezintă o curbă netedă în spaţiu.*

2) Reprezentarea implicită

Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ o mulţime deschisă şi $F, G : D \to \mathbf{R}$ două funcţii de clasă C^1 pe D. Fie

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in D | F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0\}.$$

În general mulţimea Γ *nu este o curbă.* Dacă însă, pentru orice punct $(x_0, y_0, z_0) \in D$ avem că matricea jacobiană

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \text{în punctul } (x_0, y_0, z_0)$$

are rangul doi, atunci mulţimea Γ este o curbă în spaţiu, iar ecuaţiile

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad (x, y, z) \in D \tag{6}$$

se numesc **ecuaţiile carteziane implicite** a curbei Γ.

Într-adevăr, conform Teoremei funcţiilor implicite, pentru orice $(x_0, y_0, z_0) \in D$ există o vecinătate $V \subset D$ a lui (x_0, y_0, z_0) astfel ca $\Gamma \cap V$ să fie o curbă, deoarece dacă admitem că $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(x_0, y_0, z_0) \overset{not}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{|(x_0,y_0,z_0)}$ este nenul, atunci există o vecinătate V a lui (x_0, y_0, z_0) şi funcţiile reale de clasă C^1, $x \xrightarrow{f} y = f(x)$, $x \xrightarrow{g} z = g(x)$, definite pe o vecinătate I a lui x_0 aşa încât $\Gamma \cap V = \{(x, f(x), g(x)) | x \in I\}$.

De fapt, în vecinătatea I a lui x_0 avem

$$y' = \frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}}, \quad z' = \frac{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}}.$$

Definiţia 8.2.5 *Un punct* $(x_0, y_0, z_0) \in D$ *se zice* ***punct critic*** *(sau* ***punct singular****) al curbei dacă rangul matricei jacobiene* J *în* (x_0, y_0, z_0) *este* < 2*.*

Porţiunea $\Gamma \cap V$ din vecinătatea punctului nesingular (x_0, y_0, z_0) poate fi privită în mai multe moduri:

a) fie ca intersecţie de două suprafeţe cilindrice;

b) fie ca suportul drumului parametrizat $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$, $\alpha(t) = (t, f(t), g(t))$, $t \in I$;

c) fie ca graficul aplicaţiei $h : I \to \mathbf{R}^2$, $h(x) = (f(x), g(x))$, caz în care $\Gamma \cap V$ este o curbă simplă şi nesingulară.

Deci, Γ apare ca o reuniune de curbe simple şi nesingulare, eventual cu unele puncte critice.

Observaţia 8.2.2 *Dacă $\Gamma \subset E_3$ este o curbă în spaţiu dată prin parametrizarea* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$*, $t \in I$, şi dacă pentru un $t_0 \in I$ avem $x'(t_0) \neq 0$, atunci Teorema funcţiei inverse ne asigură că ecuaţia $x = x(t)$ admite soluţii $t = t(x)$ într-o vecinătate $I_1 \subset I$ a lui t_0. Astfel, în vecinătatea I curba Γ apare ca intersecţie a două suprafeţe cilindrice $y = y(x)$, $z = z(x)$ şi spunem că, în vecinătatea lui t_0, s-a trecut de la reprezentarea parametrică la reprezentarea carteziană. Mai general, dacă există o funcţie $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\varphi = (F, G)$ aşa încât $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, $G(x(t), y(t), z(t)) = 0$, $\forall t \in I$, atunci sistemul* $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ *conţine ecuaţiile carteziene ale curbei* $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$*, $t \in I$.*

Exemplul 8.2.6 *a) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 - a^2 = 0,\ y^2 + z^2 - a^2 = 0\}$, $a > 0$, este o curbă netedă în spaţiu dată ca intersecţie de doi cilindri.*

*b) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,\ Ax + By + Cz + D = 0\}$, unde $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ şi $\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$, este o curbă netedă în spaţiu numită **cerc în spaţiu**, dată ca intersecţia dintre o sferă şi un plan.*

c) $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ este tot un cerc în spaţiu şi coincide cu imaginea drumului parametrizat $\alpha : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$, $\alpha(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}, 2)$, $\forall t \in [0, 1]$.

d) Conica (din planul π) , $\gamma : \begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$, apare ca intersecţia dintre caudrica $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ şi planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

e) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z - e^{arctg \frac{y}{x}} = 0\}$ este o curbă netedă în spaţiu de ecuaţii parametrice $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in \mathbf{R}$.

8.3 Tangenta şi normala. Planul normal

8.3.1 Cazul curbelor plane

Fie Γ o curbă plană parametrizată, $\Gamma = \alpha(I)$, unde $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, este un drum parametrizat de clasă C^1. Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei Γ.

Definiţia 8.3.1 *Dreapta care trece prin punctul regulat P şi are ca vector director pe $\overline{\alpha}'(t)$, vectorul viteză, se numeşte **tangenta** la curba Γ în punctul P, iar dreapta care trece prin P şi este perpendiculară pe tangentă se numeşte **normala** curbei Γ în punctul P.*

Prin urmare, tangenta (notată T) şi normala (notată N) la curba plană Γ în punctul $P(x(t), y(t))$ au ecuaţiile:

$$T : \frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y\,(t)}{y'(t)}, \tag{7}$$

$$N : x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) = 0. \tag{8}$$

Observaţia 8.3.1 *Dacă punctul $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m ($m \in \mathbf{N}^*$) al curbei Γ, adică $\overline{\alpha}'(t) = \cdots = \overline{\alpha}^{(m-1)}(t) = \overline{0}$ şi $\overline{\alpha}^{(m)}(t) \neq \overline{0}$, atunci tangenta şi normala la Γ în P au ecuaţiile*

$$T_m : \frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y\,(t)}{y^{(m)}(t)}, \tag{7'}$$

$$N_m : x^{(m)}(t)(x - x(t)) + y^{(m)}(t)(y - y(t)) = 0. \tag{8'}$$

Dacă curba plană Γ este dată explicit prin $y = f(x)$, $x \in I \subset \mathbf{R}$, unde $f \in C^1(I)$, atunci tangenta în punctul $P(x_0, f(x_0))$ are ecuaţia $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, iar normala în acelaşi punct are ecuaţia $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, dacă $f'(x_0) \neq 0$.

Dacă curba plană Γ este dată implicit $F(x, y) = 0$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$, deschisă, $F \in C^1(D)$ şi $(x_0, y_0) \in D$ este un punct regulat al curbei (de exemplu, dacă $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$), atunci există o vecinătate $I \subset \mathbf{R}$ a lui x_0 şi o funcţie $f \in C^1(I)$ astfel încât $y = f(x)$, $\forall x \in I$ şi $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I$. Prin urmare $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I$ şi atunci

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Astfel, ecuaţia tangentei la Γ în punctul (x_0, y_0) devine

$$T : (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \tag{9}$$

iar ecuaţia normalei la Γ în punctul (x_0, y_0) este

$$N : \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}. \tag{10}$$

8.3.2 Cazul curbelor în spaţiu

Fie curba Γ în spaţiu, dată prin ecuaţia vectorială $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(t)$, $\overline{\alpha}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, $t \in I$. Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei, adică $\overline{\alpha}'(t) \neq \overline{0}$. Am văzut în prima secţiune că două drumuri parametrizate echivalente au vectori tangenţi coliniari, în punctele care se corespund. Deci tangentele coincid, adică nu depind de alegerea parametrizării locale.

Definiţia 8.3.2 *Dreapta care trece prin punctul regulat P şi are ca vector director pe $\overline{\alpha}'(t)$ se numeşte* ***tangenta*** *la curba Γ în punctul P, iar planul care trece prin P şi este perpendiculară pe tangenta la Γ se numeşte* ***plan normal*** *la Γ în punctul P.*

Prin urmare, tangenta (notată T) şi planul normal (notat π_n) la curba Γ în punctul $P(x(t), y(t), z(t))$ au ecuaţiile:

$$T : \frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y\,(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}, \tag{11}$$

$$\pi_n : x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) + z'(t)(z - z(t)) = 0. \tag{12}$$

Exemplul 8.3.1 *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curba Γ: $x = t^2$, $y = t^3$, $z = e^t$, $t \in \mathbf{R}$, în punctul $M_1(t = 1)$.*

Rezolvare:

Cum $x^{'}(t) = 2t$, $y^{'}(t) = 3t^2$, $z^{'}(t) = e^t$, $t \in \mathbf{R}$, atunci tangenta în $M(1, 1, e)$ are ecuaţiile $T : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-e}{e}$, iar ecuaţia planului normal este $2(x - 1) + 3(y - 1) + e(z - e) = 0$.

Dacă curba Γ este dată implicit prin ecuaţiile $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$, D deschisă, iar $P(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ este un punct regulat al ei (de exemplu, $\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)} \overset{not}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{|(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$), atunci având în vedere că ecuaţiile $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ definesc într-o vecinătate I a lui x_0 pe $y = y(x)$ şi $z = z(x)$, iar $y'(x_0) = \frac{\frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}}{\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}}$, $z'(x_0) = \frac{\frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}}{\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}}$, avem că ecuaţia planului normal la Γ în punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$\pi_n : \frac{D(F,G)}{D(y_0, z_0)}(x - x(t)) + \frac{D(F,G)}{D(z_0, x_0)}(y - y(t)) + \frac{D(F,G)}{D(x_0, y_0)}(z - z(t)) = 0. \tag{13}$$

iar tangenta la Γ în punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţiile

$$T : \frac{x - x(t)}{\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}} = \frac{y - y\,(t)}{\frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}} = \frac{z - z(t)}{\frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}}. \tag{14}$$

Observaţia 8.3.2 *Dacă Γ este o curbă regulată, dată implicit prin ecuaţiile* $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$*, atunci* $\nabla F \times \nabla G_{|(x_0,y_0,z_0)} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{|(x_0,y_0,z_0)} =$
$= \frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}\overline{i} + \frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}\overline{j} + \frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}\overline{k}$
este un vector tangent la Γ în punctul $P(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma$.

Exemplul 8.3.2 *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curba Γ, dată prin ecuaţiile carteziene implicite* $\begin{cases} x^2-y^2+z^2-x=0 \\ x^2-y=0 \end{cases}$*,*
$(x,y,z) \in \mathbf{R} \times (0,\infty) \times \mathbf{R}$, în punctul $M(1,1,1)$.

Rezolvare:

Cum $F(x,y,z) = x^2-y^2+z^2-x$, $G(x,y,z) = x^2-y$ avem $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x-1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$ şi $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial G}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial G}{\partial z} = 0$, de unde obţinem matricea jacobiană $J(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -2y & 2z \\ 2x & -1 & 0 \end{pmatrix}$*. Punctele nesingulare ale curbei sunt acelea pentru care rang $J(x,y,z) = 2$. În punctul $M(1,1,1)$ avem* $J(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *care este o matrice de rang 2. Deci $M(1,1,1)$ este un punct nesingular al curbei Γ şi atunci tangenta la Γ în punctul $M(1,1,1)$ este* $\frac{x-1}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$*, adică* $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{3}$*, iar ecuaţia planului tangent la Γ în punctul $M(1,1,1)$ este $2(x-1)+4(y-1)+3(z-1)=0$, adică $2x+4y+3z-9=0$.*

Dacă o curbă plană sau în spaţiu este dată parametric (adică este definită ca o clasă de drumuri parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare), atunci **orientarea** sa este dată prin parametrizare (parametrul t crescător), iar clasa drumurilor orientate opus dă cealălaltă orientare pe aceeaşi curbă (de fapt este o convenţie). În concluzie, admitem că pe o curba dată Γ (presupunând că suportul ei este o mulţime conexă) se pot stabili două sensuri de parcurs corespunzătoare măsurarii parametrului t pe intervalul I, pe care convenim să le notăm cu $+$ şi $-$.

Definiţia 8.3.3 *O curbă $\Gamma : \overline{\alpha} = \overline{\alpha}(t)$, $t \in I$, împreună cu o alegere a unui sens de parcurs pe ea se numeşte **curbă orientată**.*

Propoziţia 8.3.1 *Dacă Γ este o curbă regulată şi $\overline{\alpha}'(t)$ este vectorul tangent la Γ în punctul $P = \alpha(t)$, atunci considerăm sensul pozitiv al curbei sensul coerent cu sensul vectorului tangent $\overline{\alpha}'(t)$, când t parcurge I. Dacă Γ are puncte singulare, atunci pot exista situaţii când alegerea mentionată nu mai este posibilă.*

În cazul unei curbe plane Γ, închisă şi nesingulară, care mărgineşte un compact în plan, putem alege acea parametrizare (în cazul când aceasta se face global) aşa încât versorul normalei $\overline{n}$ care intră în compact şi versorul tangentei $\overline{\tau} = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'\|}\overline{\alpha}'$ să aibă aceeaşi orientare ca xOy. Adică, sensul pozitiv pe o asemenea curbă plană este acel sens care lasă în stânga domeniul mărginit de curba Γ.

8.4 Curbură. Torsiune. Triedrul lui Frenét. Formulele lui Frenét

Fie $(I, \alpha = \alpha(t))$ un drum parametrizat de clasă C^2, în spaţiu. Fie $\overline{\alpha}'(t) = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$ **vectorul viteză** şi $\overline{\alpha}''(t) = x''(t)\overline{i} + y''(t)\overline{j} + z''(t)\overline{k}$ **vectorul acceleraţie** în punctul $P = \alpha(t)$.

Definiţia 8.4.1 *Drumul parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$ se numeşte* ***biregulat*** *dacă $\overline{\alpha}'(t) \times \overline{\alpha}''(t) \neq \overline{0}$, $\forall t \in I$, adică vectorii $\overline{\alpha}'(t)$ şi $\overline{\alpha}''(t)$ sunt necoliniari, pentru orice $t \in I$.*

Fie două drumuri biregulate echivalente $(I, \alpha_1 = \alpha_1(t))$ şi $(J, \alpha_2 = \alpha_2(\tau))$. Atunci, există funcţia $\varphi : I \to J$ de clasă C^2, bijectivă aşa încât $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$. Rezultă că $\overline{\alpha}_1'(t) = \varphi'(t)\overline{\alpha}_2'(\varphi(t))$, $\overline{\alpha}_1''(t) = (\varphi'(t))^2\overline{\alpha}_2''(\varphi(t)) + \varphi''(t)\overline{\alpha}_2'(\varphi(t))$, $\forall t \in I$, de unde obţinem că $\overline{\alpha}_1'(t) \times \overline{\alpha}_1''(t) = (\varphi'(t))^3 \left(\overline{\alpha}_2'(\varphi(t)) \times \overline{\alpha}_2''(\varphi(t))\right)$, $\forall t \in I$, sau (ţinând seama că $\tau = \varphi(t)$)

$$\overline{\alpha}_1'(t) \times \overline{\alpha}_1''(t) = (\varphi'(t))^3 \left(\overline{\alpha}_2'(\tau) \times \overline{\alpha}_2''(\tau)\right), \quad \forall t \in I \text{ şi } \tau = \varphi(t) \in J. \tag{15}$$

Astfel, egalitatea (15) ne arată că pentru drumuri parametrizate echivalente, în punctele care se corespund (t şi $\tau = \varphi(t)$), vectorii $\overline{\alpha}_1'(t) \times \overline{\alpha}_1''(t)$ şi $\overline{\alpha}_2'(\tau) \times \overline{\alpha}_2''(\tau)$ sunt coliniari. Deci, orice drum parametrizat care este echivalent cu un drum parametrizat biregulat este tot biregulat.

Observaţia 8.4.1 *Cum orice drum parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$, nesingular (deci şi biregulat) este echivalent (şi are aceeaşi orientare) cu un drum cu parametrizare naturală $(J, \beta = \beta(s))$, deoarece există schimbarea de parametru $\varphi : I \to J = \varphi(I)$, $s = \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\overline{\alpha}'(\tau)\| \, d\tau$ (unde $t_0 \in I$ este fixat arbitrar) aşa încât $\beta(s) = \left(\alpha \circ \varphi^{-1}\right)(s) = \alpha(\varphi^{-1}(s))$, $\forall s \in J$, iar $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = 1$, $\forall s \in J$, rezultă că $\overline{\beta}'$ şi $\overline{\beta}''$ verifică (15).*

Propoziţia 8.4.1 *Dacă $(J, \beta = \beta(s))$ este un drum cu parametrizare naturală, biregulat, atunci avem*

a) $\overline{\beta}''(s) \perp \overline{\beta}'(s)$, $\forall s \in J$;

b) $\overline{\beta}''$ este independent de parametrizarea naturală şi

$$\overline{\beta}''(s(t)) = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t)\|^2}\overline{\alpha}''(t) - \frac{\overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}''(t)}{\|\overline{\alpha}'(t)\|^4}\overline{\alpha}'(t), \tag{16}$$

unde $(I, \alpha = \alpha(t))$ este un drum parametrizat echivalent cu $(J, \beta = \beta(s))$, iar $\varphi : I \to J$ este schimbare de parametru corespunzătoare, $s = s(t) = \varphi(t)$.

Demonstraţie. a) Din $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\|^2 = \overline{\beta}'(s) \cdot \overline{\beta}'(s) = 1$, $\forall s \in J$ rezultă, prin derivare, $\overline{\beta}''(s) \cdot \overline{\beta}'(s) + \overline{\beta}'(s) \cdot \overline{\beta}''(s) = 0$, adică $\overline{\beta}'(s) \cdot \overline{\beta}''(s) = 0$, $\forall s \in J$.

b) Fie $(J_1, \beta_1 = \beta_1(r))$ o altă parametrizare naturală a drumului $(I, \alpha = \alpha(t))$. Rezultă că şi drumurile $(J, \beta = \beta(s))$ şi $(J_1, \beta_1 = \beta_1(r))$ sunt echivalente, adică există o schimbare de parametru $r = h(s)$, $h : J \to J_1$, aşa încât $\beta = \beta_1 \circ h$. Atunci, $\overline{\beta}'(s) = h'(s)\overline{\beta}_1'(h(s))$ şi cum, $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = \left\|\overline{\beta}_1'(r)\right\| = 1$, rezultă că $|h'(s)| = 1$, $\forall s \in J$. Astfel, $h''(s) = 0$ şi atunci, $\overline{\beta}''(s) = h''(s)\overline{\beta}_1'(h(s)) + (h'(s))^2\, \overline{\beta}_1''(h(s)) = \overline{\beta}_1''(h(s)) = \overline{\beta}_1''(r)$. Deci, $\overline{\beta}''$ este independent de parametrizarea naturală.

Avem $\beta = \alpha \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow \alpha = \beta \circ \varphi$, adică $\alpha(t) = \beta(\varphi(t)) = \beta(s(t))$, $\forall t \in I$. Atunci, $\overline{\alpha}'(t) = s'(t)\overline{\beta}'(s(t)) = \|\overline{\alpha}'(t)\|\, \overline{\beta}'(s(t))$ şi $\overline{\alpha}''(t) = s''(t)\overline{\beta}'(s(t)) + (s'(t))^2\, \overline{\beta}''(s(t))$.

În plus, cum $(s'(t))^2 = \|\overline{\alpha}'(t)\|^2 = \overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}'(t)$, prin derivare în raport cu t, obţinem $2s'(t)s''(t) = 2\overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}''(t)$ şi deci, $s''(t) = \frac{\overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}''(t)}{\|\overline{\alpha}'(t)\|}$.

Acum, înlocuind în expresia lui $\overline{\alpha}''(t)$ pe $s''(t)$ şi pe $\overline{\beta}'(s(t)) = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t)\|}\overline{\alpha}'(t)$, obţinem relaţia (16). ■

Rezultatele de mai sus ne permit să definim alte noţiuni geometrice pentru o curbă, printre care şi aşa numiţii indicatori numerici (curbură, torsiune) care permit să distingem o curbă de altă curbă.

În continuare, fie o curbă Γ în spaţiu reprezentată într-o vecinătate a punctului $P \in \Gamma$ prin drumul parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$, de clasă C^2, biregulat astfel încât $P = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, $t_0 \in I$.

Definiţia 8.4.2 *Planul care trece prin punctul $P = \alpha(t_0)$ şi are vectorul normal $\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)$ se numeşte **plan osculator** în $P = \alpha(t_0)$ la curba Γ.*

Observaţia 8.4.2 *Având în vedere egalitatea (15) constatăm că definiţia planului osculator pentru o curbă nu depinde de parametrizarea locală aleasă.*

Ecuaţia vectorială a planului osculator (notat π_o) la curba Γ în punctul $P = \alpha(t_0)$ este:

$$\pi_o : (\overline{\alpha} - \overline{\alpha}(t_0)) \cdot (\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)) = 0, \tag{17}$$

sau

$$\pi_o : [\overline{\alpha} - \overline{\alpha}(t_0), \overline{\alpha}'(t_0), \overline{\alpha}''(t_0)] = 0. \tag{17'}$$

Având în vedere expresia analitică a produsului mixt, obţinem ecuaţia carteziană a planului osculator la curba Γ în punctul $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$:

$$\pi_o : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0. \qquad (17")$$

Definiţia 8.4.3 *Se numeşte* ***vector de curbură*** *al curbei* Γ *în punctul* $P = \alpha(t_0) \in \Gamma$ *vectorul*

$$\overline{k}(t_0) = \overline{\beta}''(s(t_0)), \qquad (18)$$

unde $\beta = \alpha \circ \varphi^{-1}$ *(*$\varphi(t) = s(t)$*) este un drum cu parametrizare naturală echivalent cu drumul* α*,* $s(t_0) = \tau_0$*.*

Lungimea vectorului de curbură $\overline{k}(t_0)$*,*

$$k(t_0) = \left\|\overline{k}(t_0)\right\| = \left\|\overline{\beta}''(s(t_0))\right\| \qquad (18')$$

se numeşte ***curbura*** *curbei* Γ *în punctul* $P = \alpha(t_0)$*, iar inversul acesteia* $\frac{1}{k(t_0)}$ *se numeşte* ***raza de curbură*** *a curbei* Γ *în punctul* $P = \alpha(t_0)$*.*

Observaţia 8.4.3 *Având în vedere rezultatele propoziţiei de mai sus care ne-a arătat că drumurile echivalente au parametrizări naturale echivalente, constatăm că definiţia vectorului de curbură este corectă, adică nu depinde de parametrizarea locală aleasă.*

Observaţia 8.4.4 *Curbura unei drepte sau porţiune de dreaptă este nulă peste tot. Mai mult, curba reprezentată de drumul parametrizat natural* $(J, \beta = \beta(s))$ *este o porţiune dintr-o dreaptă (segment de dreaptă sau semidreaptă) dacă şi numai dacă curbura ei este nulă în orice punct. Într-adevăr,* $\overline{k}(s) = \overline{\beta}''(s) = \overline{0}$*,* $\forall s \in J \Leftrightarrow \overline{\beta}'(s) = \overline{a}$*,* $\forall s \in J \Leftrightarrow \overline{\beta}(s) = \overline{a}s + \overline{b}$*,* $\forall s \in J$ *(*$\overline{a}$*,* $\overline{b}$ *sunt vectori constanţi), ceea ce înseamnă că suportul lui* β *este inclus într-o dreaptă.*

Propoziţia 8.4.2 *Pentru curba* Γ *avem*

$$\begin{cases} \overline{k}(t_0) & = & \frac{1}{v^2(t_0)}\overline{\alpha}''(t_0) - \frac{\overline{\alpha}'(t_0)\cdot\overline{\alpha}''(t_0)}{v^4(t_0)}\overline{\alpha}'(t_0) \\ k(t_0) & = & \left\|\overline{k}(t_0)\right\| = \frac{\left\|\overline{\alpha}'(t_0)\times\overline{\alpha}''(t_0)\right\|}{v^3(t_0)} \end{cases} \qquad (19)$$

unde $v(t) = \|\overline{\alpha}'(t)\|$ *este viteza pe curba* Γ *în punctul* $P = \alpha(t_0)$*.*

Demonstraţie. Prima egalitate rezultă direct din propoziţia anterioară (relaţia (16)) şi definiţia vectorului de curbură (18). Tot din propoziţia anterioară avem că $\overline{\beta}''(s) \perp \overline{\beta}'(s)$, $\forall s \in J$, unde $(J, \beta = \beta(s))$ este un drum cu parametrizare naturală echivalent cu drumul $(I, \alpha = \alpha(t))$, cu $s_0 = s(t_0) = \varphi(t_0)$. Atunci,

$\left\|\overline{\beta}''(s) \times \overline{\beta}'(s)\right\| = \left\|\overline{\beta}''(s)\right\| \left\|\overline{\beta}'(s)\right\| \sin 90^0 = \left\|\overline{\beta}''(s)\right\|$, $\forall s \in J$, ceea ce implică faptul că $k(t) = \left\|\overline{\beta}''(s(t))\right\| = \left\|\overline{\beta}''(s(t)) \times \overline{\beta}'(s(t))\right\|$, $\forall t \in I$.

Dar, $\overline{\alpha}'(t) = v(t)\overline{\beta}'(s(t))$ (vezi $\overline{\beta}'(s(t)) = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t)\|}\overline{\alpha}'(t)$, pentru că $s'(t) = \varphi'(t) = \|\overline{\alpha}'(t)\| = v(t)$) şi $\overline{\alpha}''(t) = v^2(t)\overline{\beta}''(s(t)) + s''(t)\overline{\beta}'(s(t))$, de unde rezultă $\|\overline{\alpha}'(t) \times \overline{\alpha}''(t)\| = \left\|v(t)\overline{\beta}'(s(t)) \ \times v^2(t)\overline{\beta}''(s(t)) + v(t)\overline{\beta}'(s(t))) \times s''(t)\overline{\beta}'(s(t))\right\| =$
$= v^3(t)\left\|\overline{\beta}'(s(t)) \times \overline{\beta}''(s(t))\right\| = v^3(t)k(t), \forall t \in I$. Atunci, $k(t_0) = \frac{\left\|\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)\right\|}{v^3(t_0)}$.
■

Observaţia 8.4.5 *Din definiţia planului osculator al unei curbe şi din egalitatea a doua din relaţia (19) rezultă că o curbă în spaţiu are plan osculator într-un punct dacă şi numai dacă curbura curbei în acel punct este nenulă (acel punct este biregulat).*

Cazul curbelor plane

Fie Γ o curbă plană (sau Γ o curbă din spaţiu conţinută într-un plan). Admitem că planul curbei se suprapune cu planul xOy ($z = 0$). Fie punctul $P = \alpha(t_0) \in \Gamma$ în vecinătatea căruia curba are ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$, $t \in I$, unde funcţiile scalare x, y sunt de clasă C^2 pe I. Atunci, cum $\overline{\alpha}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j}$, avem $\overline{\alpha}'(t) = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j}$, $\overline{\alpha}''(t) = x''(t)\overline{i} + y''(t)\overline{j}$, $v(t) = \|\overline{\alpha}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, iar $\overline{\alpha}'(t) \times \overline{\alpha}''(t) = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))\,\overline{k}$.

Deci, curbura curbei plane în punctul $P = \alpha(t_0)$ este

$$k(t_0) = \frac{\|\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)\|}{v^3(t_0)} = \frac{|x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)|}{((x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2)^{3/2}} \qquad (19')$$

Fie $\Gamma = \{(x, y) | y = f(x),\ x \in I\}$ o curbă plană reprezentată explicit, pentru care $f \in C^2(I)$. Cum $\Gamma = \alpha(I)$, unde $\alpha(t) = (t, y(t))$ şi $x'(t) = 1$, $y'(t) = f'(x)$, $x''(t) = 0$, $y''(t) = f''(x)$, rezultă curbura curbei în punctul $P(x_0, f(x_0))$

$$k(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}} = \frac{|y''(x_0)|}{(1 + (y'(x_0))^2)^{3/2}},\ \textit{dacă}\ y(x) = f(x). \qquad (19'')$$

Fie curba plană reprezentată implicit prin ecuaţia $F(x, y) = 0$ în vecinătatea unui punct al său $P(x_0, y_0) \in D$ (unde $F : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^2), pentru care admitem că $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Atunci, cum $y'(x_0) = -\frac{F_{x_0}}{F_{y_0}}$ (unde am notat prin F_{x_0}, F_{y_0}, $F_{x_0x_0}$, $F_{x_0y_0}$, $F_{y_0y_0}$ valorile derivatelor parţiale de ordinul I şi II ale lui F în punctul (x_0, y_0)), iar

$$y''(x_0) = \frac{2F_{x_0y_0} \cdot F_{x_0} \cdot F_{y_0} - F_{x_0x_0} \cdot F_{y_0}^2 - F_{y_0y_0} \cdot F_{x_0}^2}{F_{y_0}^3},$$

avem curbura în punctul $P(x_0, y_0)$,

$$k(x_0) = \frac{\left|F_{x_0x_0} \cdot F_{y_0}^2 + F_{y_0y_0} \cdot F_{x_0}^2 - 2F_{x_0y_0} \cdot F_{x_0} \cdot F_{y_0}\right|}{\left(F_{x_0}^2 + F_{y_0}^2\right)^{3/2}}. \qquad (19\text{''}')$$

Dacă curba $\Gamma : \rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ este o curbă plană dată în coordonate polare, atunci în orice punct θ avem

$$k(\theta) = \frac{\left|\rho^2(\theta) + 2(\rho'(\theta))^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)\right|}{\left(\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2\right)^{3/2}}, \qquad (19^{iv})$$

formulă obţinută din (19') şi din formulele de trecere la coordonate polare.

Observaţia 8.4.6 *Pentru o curbă plană Γ curbura poate fi definită ca o funcţie (de parametru) care să aibă şi valori negative. Anume, dacă $(J, \beta = \beta(s))$ este o parametrizare naturală a curbei în vecinătatea V a punctului $P = \beta(s)$, adică $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = 1$, $\forall s \in J$, atunci notând prin $\overline{T}(s) = \overline{\beta}'(s) = x'(s)\overline{i} + y'(s)\overline{j}$ versorul tangent la curbă în punctul $P = \beta(s)$, iar prin $\overline{N}(s) = -y'(s)\overline{i} + x'(s)\overline{j}$ versorul normal la curbă în punctul $P = \beta(s)$ (obţinut prin rotirea lui $\overline{T}(s)$ cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$), atunci funcţia $k : J \to \mathbf{R}$, $s \to k(s)$ definită prin **ecuaţia Frenét** $\frac{d\overline{T}}{ds}(s) = k(s)\overline{N}(s)$ se numeşte **curbura** curbei plane în punctul $P = \beta(s)$. Deci $k(s) \in \mathbf{R}$ şi semnul său arată cum se încovoaie curba $\beta(J) = \Gamma \cap V$.*

Exemplul 8.4.1 *Fie curba plană Γ dată prin ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, \infty)$. Remarcând că este vorba despre cicloidă, se cer:*

a) Verificaţi că cicloida este o curbă nesingulară;

b) Scrieţi ecuaţia tangentei şi ecuaţia normalei la Γ în punctul $M(x(\pi/2), y(\pi/2))$;

c) Calculaţi curbura cicloidei într-un punct nesingular al ei.

Rezolvare:

a) Deoarece $x'(t) = R(1 - \cos t)$, $y'(t) = R \sin t$ rezultă $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 2R^2(1 - \cos t) = 0$ dacă şi numai dacă $t \in \{2k\pi | k \in \mathbf{N}\}$. Prin urmare curba este nesingulară pe porţiuni, adică toate punctele cicloidei sunt nesingulare, cu excepţia celor pentru care $t = 2k\pi$, $k \in \mathbf{N}$. Deci Γ este o curbă nesingulară.

b) Cum $x(\pi/2) = R(\pi/2 - 1)$, $y(\pi/2) = R$, $x'(\pi/2) = R$, $y'(\pi/2) = R$, avem că tangenta la Γ în $M(x(\pi/2), y(\pi/2))$ are ecuaţia $\frac{x - R(\pi/2 - 1)}{R} = \frac{y - R}{R}$, iar normala la Γ în $M(x(\pi/2), y(\pi/2))$ are ecuaţia $x + y - \frac{\pi R}{2} = 0$.

c) Curbura cicloidei în punctul nesingular $M(x(t), y(t)) \in \Gamma$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbf{N}\}$, este $k(t) = \frac{\left|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)\right|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} = \frac{2R^2(\cos^2 \frac{t}{2} - \cos^2 t)}{(2R^2(1 - \cos t))^{3/2}} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \cos^2 t}{R\sqrt{2}(1 - \cos t)^{3/2}}$, deoarece $x''(t) = R \sin t$, $y''(t) = -R \cos t$.

Revenim la curba Γ **în spaţiu** reprezentată într-o vecinătate a punctului $P \in \Gamma$ prin drumul parametrizat $(I, \alpha = \alpha(t))$, de clasă C^3, biregulat astfel încât $P = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, $t_0 \in I$. Atunci, se pot defini următorii trei versori cu punctul de aplicaţie în P:

Definiţia 8.4.4 *i)* ***Versorul tangentă*** *în* $P = \alpha(t_0)$,

$$\overline{T}(t_0) = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t_0)\|}\overline{\alpha}'(t_0). \tag{20}$$

ii) ***Versorul normală principală*** *(sau* ***versorul curbură****) în* $P = \alpha(t_0)$,

$$\overline{N}(t_0) = \frac{1}{\|\overline{k}(t_0)\|}\overline{k}(t_0). \tag{21}$$

iii) ***Versorul binormală*** *în* $P = \alpha(t_0)$,

$$\overline{B}(t_0) = \overline{T}(t_0) \times \overline{N}(t_0). \tag{22}$$

Propoziţia 8.4.3 *Având în vedere definiţia de mai sus şi proprietăţile anterioare avem*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{T}(t_0) & = & \frac{1}{v(t_0)}\overline{\alpha}'(t_0) \\ \overline{N}(t_0) & = & \frac{v(t_0)}{\|\overline{\alpha}'(t_0)\times\overline{\alpha}''(t_0)\|}\overline{\alpha}''(t_0) - \frac{\overline{\alpha}'(t_0)\cdot\overline{\alpha}''(t_0)}{v(t_0)\|\overline{\alpha}'(t_0)\times\overline{\alpha}''(t_0)\|}\overline{\alpha}'(t_0) \\ \overline{B}(t_0) & = & \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t_0)\times\overline{\alpha}''(t_0)\|}\left(\overline{\alpha}'(t_0)\times\overline{\alpha}''(t_0)\right) \end{array}\right. . \tag{23}$$

Corolarul 8.4.1 *Dacă* $(J, \beta = \beta(s))$ *este o parametrizare naturală a curbei* Γ *în vecinătatea punctului* $P = \beta(s_0)$, *atunci avem*

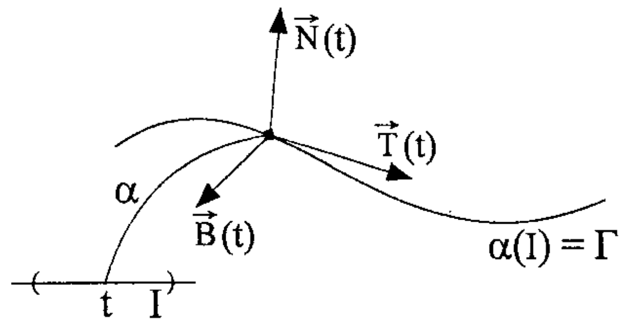
$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{T}(s_0) & = & \overline{\beta}'(s_0) \\ \overline{N}(s_0) & = & \frac{1}{\|\overline{\beta}''(s_0)\|}\overline{\beta}''(s_0) \\ \overline{B}(t_0) & = & \frac{1}{\|\overline{\beta}''(s_0)\|}\left(\overline{\beta}'(s_0)\times\overline{\beta}''(s_0)\right) \end{array}\right. . \tag{23'}$$

Având în vedere cele prezentate aici şi deoarece $\overline{\beta}''(s) \perp \overline{\beta}'(s)$, $\forall s \in J$, rezultă că $\{\overline{T}(s), \overline{N}(s), \overline{B}(s)\}$ formează o **bază ortonormată** în V^3, pentru fiecare punct $P = \beta(s)$ al unei curbe Γ. Atunci, este evident că, pentru orice parametrizare locală $(I, \alpha = \alpha(t))$, de clasă C^3, biregulată a curbei Γ, avem că $\{\overline{T}(t), \overline{N}(t), \overline{B}(t)\}$ reprezintă o bază ortonormată în V^3, pentru fiecare punct $P = \alpha(t) \in \Gamma$.

Definiţia 8.4.5 *Reperul cartezian ortonormat* $\mathcal{R}(P) = \{P; \overline{T}(t), \overline{N}(t), \overline{B}(t)\}$, *construit mai sus, se numeşte* ***reper Frenét*** *al curbei* Γ *asociat punctului* $P = \alpha(t) \in \Gamma$.

Acest reper determină un **triedru Frenét** (mobil de-a lungul curbei Γ) ale cărui **muchii** se numesc **tangenta** (dreapta determinată de punctul $P = \alpha(t)$ şi versorul tangentă $\overline{T}(t)$), **normala principală** (determinată de $P = \alpha(t)$ şi versorul normala principală $\overline{N}(t)$) şi **binormala** (determinată de $P = \alpha(t)$ şi versorul binormală $\overline{B}(t)$). Planele de coordonate ale triedrului se numesc, respectiv, **plan normal** (determinat de punctul $P = \alpha(t)$ şi de vectorul normal

$\overline{T}(t)$), **plan rectificant** (determinat de $P = \alpha(t)$ şi de vectorul normal $\overline{N}(t)$) şi **plan osculator** (determinat de $P = \alpha(t)$ şi de vectorul normal $\overline{B}(t)$). Acestea se numesc **feţele** triedrului Frenét.



Binormala (notată B) la curba Γ în punctul $P = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ este dreapta determinată de punctul P şi de vectorul director $\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)$. Atunci, ecuaţiile ei carteziene sunt

$$B : \frac{x - x(t_0)}{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{y - y(t_0)}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{z - z(t_0)}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}. \qquad (24)$$

Exerciţiul 8.4.1 *Verificaţi că* $\overline{T}(t) = \overline{N}(t) \times \overline{B}(t)$ *şi* $\overline{N}(t) = \overline{B}(t) \times \overline{T}(t)$ *pentru orice punct* $P = \alpha(t) \in \Gamma$.

Exerciţiul 8.4.2 *Verificaţi că, pentru orice punct* $P = \alpha(t) \in \Gamma$, *baza* $\{\overline{T}(t), \overline{N}(t), \overline{B}(t)\}$ *are aceeaşi orientare cu baza* $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

Planul rectificant (notat π_r) la curba Γ în punctul $P = \alpha(t_0) \in \Gamma$ este determinat de punctul P şi de versorii directori $\overline{T}(t_0)$ şi $\overline{B}(t_0)$, adică de vectorii directori $\overline{\alpha}'(t_0)$ şi $\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)$. Atunci, ecuaţia lui vectorială este

$$\pi_r : [\overline{\alpha} - \overline{\alpha}(t_0), \overline{\alpha}'(t_0), \overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0)] = 0. \qquad (25)$$

sau

$$\pi_r : (\overline{\alpha} - \overline{\alpha}(t_0)) \cdot (\overline{\alpha}'(t_0) \times (\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0))) = 0, \qquad (25')$$

Ecuaţia carteziană a a planului rectificant la curba Γ în punctul $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ este

$$\pi_r : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ l(t_0) & m(t_0) & n(t_0) \end{vmatrix} = 0, \qquad (25'')$$

unde $\overline{\alpha}'(t_0)\times\overline{\alpha}''(t_0) = l(t_0)\overline{i}+m(t_0)\overline{j}+n(t_0)\overline{k}$, adică $l(t_0) = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}$, $m(t_0) = \begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}$, $n(t_0) = \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}$.

Normala principală (notată NP) la curba Γ în punctul $P = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ este dreapta determinată de punctul P şi de vectorul director $\overline{\alpha}'(t_0) \times (\overline{\alpha}'(t_0) \times \overline{\alpha}''(t_0))$. Atunci, ecuaţiile ei carteziene sunt

$$NP : \frac{x - x(t_0)}{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ m(t_0) & n(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{y - y(t_0)}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ n(t_0) & l(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{z - z(t_0)}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ l(t_0) & m(t_0) \end{vmatrix}}. \tag{26}$$

Pentru controlul abaterii curbei de la planul osculator (abatere numită **torsionare**) în vecinătatea punctului $P = \alpha(t)$ se utilizează versorul normal la acest plan care este tocmai versorul binormal $\overline{B}(t)$. Folosirea triedrului lui Frenét în studiul unei curbe biregulate furnizează mai multe informaţii despre curbă decât ar da folosirea oricărui alt reper cartezian mobil. Ideea de bază în această utilizare constă în posibilitatea exprimării derivatelor $\overline{T}'(t)$, $\overline{N}'(t)$, $\overline{B}'(t)$ cu ajutorul lui $\overline{T}(t)$, $\overline{N}(t)$, $\overline{B}(t)$.

Fie $(I, \alpha = \alpha(t))$ un drum parametrizat biregulat, de clasă C^3. Atunci, funcţiile vectoriale $t \to \overline{T}(t)$, $t \to \overline{N}(t)$, $t \to \overline{B}(t)$ sunt funcţii de clasă C^1 şi avem rezultatul:

Teorema 8.4.1 *Dacă considerăm funcţia viteză $t \to \overline{v}(t)$ pe drumul α şi funcţia curbură $t \to k(t) > 0$ de-a lungul lui α, atunci avem **formulele lui Frenét:***

$$\begin{cases} \overline{T}'(t) &= v(t)k(t)\overline{N}(t) \\ \overline{N}'(t) &= -v(t)k(t)\overline{T}(t) + v(t)\tau(t)\overline{B}(t) \\ \overline{B}'(t) &= -v(t)\tau(t)\overline{N}(t) \end{cases}, \ \forall t \in I, \tag{27}$$

*unde $\overline{T}'(t)$, $\overline{N}'(t)$, $\overline{B}'(t)$ sunt derivatele lui $\overline{T}(t)$, $\overline{N}(t)$, $\overline{B}(t)$ în raport cu t, iar $\tau : t \in I \to \tau(t) \in \mathbf{R}$ este o funcţie scalară numită **torsiunea** pe drumul α.*

Demonstraţie. Ştim că $\overline{\alpha}'(t)$ este vectorul viteză, iar $v(t) = \|\overline{\alpha}'(t)\|$ este viteza pe drumul α în punctul t. Din $v^2(t) = \overline{\alpha}'(t)\cdot\overline{\alpha}'(t)$ rezultă, prin derivare în raport cu t, $2\overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}''(t) = 2v(t)v'(t)$, adică

$$v'(t) = \frac{\overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}''(t)}{v(t)}.$$

Atunci, cum $\overline{T}(t) = \frac{1}{v(t)}\overline{\alpha}'(t)$, rezultă
$\overline{T}'(t) = \frac{1}{v^2(t)}\left(\overline{\alpha}''(t)v(t) - \overline{\alpha}'(t)v'(t)\right) = \frac{1}{v(t)}\overline{\alpha}''(t) - \frac{\overline{\alpha}'(t)\cdot\overline{\alpha}'(t)}{v^3(t)}\overline{\alpha}'(t)$, iar
$v(t)k(t)\overline{N}(t) = v(t)k(t)\frac{1}{k(t)}\overline{k}(t) = v(t)\overline{k}(t) = \frac{1}{v(t)}\overline{\alpha}''(t) - \frac{\overline{\alpha}'(t)\cdot\overline{\alpha}''(t)}{v^3(t)}\overline{\alpha}'(t)$.

Prin urmare $\overline{T}'(t) = v(t)k(t)\overline{N}(t)$. Mai departe, din $\overline{B}(t) = \overline{T}(t) \times \overline{N}(t)$ rezultă $\overline{B}'(t) = \overline{T}'(t) \times \overline{N}(t) + \overline{T}(t) \times \overline{N}'(t) = (v(t)k(t)\overline{N}(t)) \times \overline{N}(t) + \overline{T}(t) \times$

$\overline{N}'(t) = \overline{T}(t) \times \overline{N}'(t)$, ceea ce înseamnă că $\overline{B}'(t) \perp \overline{T}(t)$. În plus, din $\left\|\overline{B}'(t)\right\| = 1$ rezultă $\overline{B}(t) \cdot \overline{B}'(t) = 0$, prin derivare în raport cu t, adică $\overline{B}'(t) \perp \overline{B}(t)$. Atunci, $\overline{B}'(t)$ este coliniar cu $\overline{N}(t)$, adică există un scalar $\tau(t)$ ($t \xrightarrow{\tau} \tau(t)$) aşa încât $\overline{B}'(t) = -\tau(t)v(t)\overline{N}(t)$.

În fine, din $\overline{N}(t) = \overline{B}(t) \times \overline{T}(t)$ rezultă, prin derivare,

$\overline{N}'(t) = \overline{B}'(t) \times \overline{T}(t) + \overline{B}(t) \times \overline{T}'(t) = -\tau(t)v(t)(\overline{N}(t) \times \overline{T}(t)) +$
$+v(t)k(t)(\overline{B}(t) \times \overline{N}(t)) = -v(t)k(t)\overline{T}(t) + v(t)\tau(t)\overline{B}(t)$. ■

Observaţia 8.4.7 *Dacă $(J, \beta = \beta(s))$ este un drum cu parametrizare naturală, atunci $v(s) = \left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = 1$, $\forall s \in J$ şi atunci formulele lui Frenét devin:*

$$\begin{cases} \overline{T}'(s) &= k(s)\overline{N}(s) \\ \overline{N}'(s) &= -k(s)\overline{T}(s) + \tau(s)\overline{B}(s) \\ \overline{B}'(s) &= -\tau(s)\overline{N}(s) \end{cases}, \ \forall s \in J \qquad (27')$$

formule numite şi *formulele lui Frenét pentru curba cu viteza* 1.

Observaţia 8.4.8 *Formulele (27) se pot scrie (şi reţine mai uşor) sub forma matriceală:*

$$\begin{pmatrix} \overline{T}' \\ \overline{N}' \\ \overline{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & vk & 0 \\ -vk & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B} \end{pmatrix} \qquad (27'')$$

Definiţia 8.4.6 *Funcţia $\tau : t \in I \to \tau(t) \in \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $\overline{B}'(t) = -v(t)\tau(t)\overline{N}(t)$ se numeşte **torsiunea** drumului (curbei) α, când $t \in I$, iar $\frac{1}{\tau}$ se numeşte **raza de torsiune** a drumului (curbei) α. Pentru fiecare punct $P = \alpha(t)$ de pe curbă, scalarul $\tau(t)$ este torsiunea curbei în punctul P, iar $\frac{1}{\tau(t)}$ este raza de torsiune a curbei în punctul P.*

Propoziţia 8.4.4 *Fie $(I, \alpha = \alpha(t))$ un drum parametrizat biregulat, de clasă C^3. Atunci, avem*

$$\tau(t) = \frac{[\overline{\alpha}'(t), \overline{\alpha}''(t), \overline{\alpha}'''(t)]}{\|\overline{\alpha}'(t) \times \overline{\alpha}''(t)\|^2}, \quad \forall t \in I. \qquad (28)$$

Mai mult, suportul drumului α este conţinut într-un plan (adică curba reprezentată de drumul α este plană) dacă şi numai dacă torsiunea lui α este nulă în orice punct al ei.

Demonstraţie. Întrucât $\overline{T}(t) = \frac{1}{v(t)}\alpha'(t)$, rezultă că $\overline{\alpha}' = v\overline{T}$şi $\overline{\alpha}'' = v'\overline{T} + v\overline{T}' = v'\overline{T} + kv^2\overline{N}$. Astfel, folosind prima formulă a lui Frenét, avem $\overline{\alpha}' \times \overline{\alpha}'' = kv^3(\overline{T} \times \overline{N}) = kv^3\overline{B}$. Mai departe, avem
$\overline{\alpha}''' = k'v^2\overline{N} + 2vv'k\overline{N} + kv^2\overline{N}' + v''\overline{T} + v'\overline{T}' =$
$= (k'v^2 + 2vv'k)\overline{N} + kv^2(-kv\overline{T} + \tau v\overline{B}) + v''\overline{T} + kvv'\overline{N} =$
$= (v'' - k^2v^3)\overline{T} + (k'v^2 + 3kvv')\overline{N} + kv^3\tau\overline{B}$, conform primelor două formule ale lui Frenét. Atunci, $(\overline{\alpha}' \times \overline{\alpha}'') \cdot \overline{\alpha}''' = k^2v^6\tau\overline{B} \cdot \overline{B} = k^2v^6\tau$, pentru că $\overline{B} \perp \overline{T}$, $\overline{B} \perp \overline{N}$. Prin urmare, conform (19), avem

$$\tau = \frac{[\overline{\alpha}', \overline{\alpha}'', \overline{\alpha}''']}{k^2v^6} = \frac{[\overline{\alpha}', \overline{\alpha}'', \overline{\alpha}''']\, v^6}{\|\overline{\alpha}' \times \overline{\alpha}''\|^2\, v^6} = \frac{[\overline{\alpha}', \overline{\alpha}'', \overline{\alpha}''']}{\|\overline{\alpha}' \times \overline{\alpha}''\|^2}.$$

Fie $\beta = \alpha \circ \varphi^{-1}$, $\beta : J \to \mathbf{R}^3$, cu $\left\|\overline{\beta}'(s)\right\| = 1$, $\forall s \in J$ parametrizarea naturală echivalentă cu α. Fie $(\overline{r} - \overline{r}_0) \cdot \overline{n} = 0$ planul ce conţine suportul drumului. Atunci, $(\overline{\beta}(s) - \overline{r}_0) \cdot \overline{n} = 0$, $\forall s \in J$, de unde rezultă $\overline{\beta}'(s) \cdot \overline{n} = 0$, $\forall s \in J$ şi $\overline{\beta}''(s) \cdot \overline{n} = 0$, $\forall s \in J$, adică $\overline{n} \perp \overline{T}$ şi $\overline{n} \perp \overline{N}$. Prin urmare $\overline{n}$ este coliniar cu $\overline{B}$, adică $\overline{B} = \pm\frac{1}{\|\overline{n}\|}\overline{n}$ ceea ce implică $\overline{B}' = \overline{0}$. Conform celei de-a treia formule a lui Frenét obţinem că $\tau = 0$ de-a lungul curbei.

Reciproc, dacă $\tau = 0$, atunci $\overline{B}' = \overline{0}$, conform celei de-a treia formule a lui Frenét. Astfel, $\overline{B} = \overline{c}$, un vector constant de-a lungul curbei. Atunci, fie $f : J \to \mathbf{R}$, $f(s) = (\overline{\beta}(s) - \overline{\beta}(0)) \cdot \overline{B}$. Cum $f'(s) = \overline{\beta}'(s) \cdot \overline{B} = \overline{T}(s) \cdot \overline{B} = 0$ rezultă că f este constantă pe J. Cum $f(0) = 0$ rezultă că $f(s) = 0$, $\forall s \in J$, ceea ce înseamnă că $(\overline{\beta}(s) - \overline{\beta}(0)) \cdot \overline{B} = 0$, $\forall s \in J$, adică există un plan care să conţină suportul lui β, plan care este chiar planul osculator al curbei în punctul $\beta(0)$. ■

Observaţia 8.4.9 *1) Analog se poate dovedi că dacă curbura unei curbe plane este constantă, atunci curba este un cerc (sau o porţiune dintr-un cerc) şi reciproc.*

2) Curbura şi torsiunea determină o curbă în spaţiu, abstracţie făcând de poziţia ei (adică de o izometrie).

3) Fie $(J, \beta = \beta(s))$ o parametrizare naturală a curbei Γ din spaţiu. Atunci Γ este o elice cilindrică dacă şi numai dacă raportul $\frac{\tau}{k}$ este constant de-a lungul curbei.

4) Dacă d este distanţa de la un punct fix la planul osculator într-un punct curent al curbei şi dacă raportul $\frac{d^2}{\tau}$ este constant de-a lungul curbei, atunci această curba se numeşte ***curba Ţiţeica****.*

Exemplul 8.4.2 *Fie elicea cilindrică Γ dată prin ecuaţia vectorială $\overline{\alpha}(t) = a\cos t\overline{i} + a\sin t\overline{j} + bt\overline{k}$, $t \in \mathbf{R}$, unde $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$ sunt constante. Se cer:*

a) Să se arate că elicea cilindrică Γ este o curbă simplă, netedă şi toate punctele ei sunt biregulate;

b) Să se scrie ecuaţiile parametrice ale elicei Γ şi să se arate că elicea se află pe cilindrul circular $x^2 + y^2 - a^2 = 0$;

c) Să se scrie ecuaţiile muchiilor şi feţelor reperului Frenét al elicei într-un punct arbirar al ei $M = \alpha(t)$;

d) Să se găsească expresiile versorilor $\overline{T}$, $\overline{N}$, $\overline{B}$ în punctul $M_0 = \alpha(0)$;

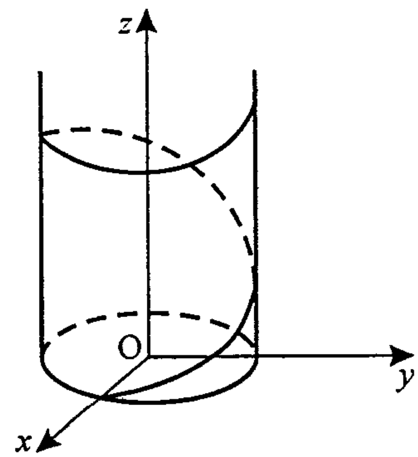
e) Să se determine o parametrizare naturală pentru Γ şi să se calculeze lungimea curbei între punctele $M_0 = \alpha(0)$ şi $M_1 = \alpha(2\pi)$;

f) Să se calculeze curbura şi torsiunea elicei Γ într-un punct arbitrar al ei;

g) Să se scrie formulele lui Frenét pentru elicea Γ.

Rezolvare:

a) Deoarece există drumul parametrizat $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, dat prin $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $\forall t \in \mathbf{R}$, de clasa C^k, $\forall k \geq 1$, astfel încât $\alpha(\mathbf{R}) = \Gamma$, rezultă că elicea cilindrica Γ este o curbă simplă. Cum $\overline{\alpha}'(t) = -a\sin t\overline{i} + a\cos t\overline{j} + b\overline{k} \neq \overline{0}$, $\forall t \in \mathbf{R}$, avem că Γ este o curbă netedă (toate punctele ei sunt nesingulare). Este clar că pentru orice $k \geq 1$, $\overline{\alpha}^{(k)}(t) \neq \overline{0}$,$\forall t \in \mathbf{R}$, iar $\overline{\alpha}'(t) \times \overline{\alpha}''(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\overline{i} - ab\cos t\overline{j} + a^2\overline{k} \neq \overline{0}$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Deci toate punctele ei sunt biregulate.



b) Ecuaţiile parametrice ale elicei Γ sunt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$. Se observă că coordonatele oricărui punct $M(a\cos t, a\sin t, bt) \in \Gamma$ verifică ecuaţia cilindrului $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ şi astfel elicea Γ este conţinută în cilindrul circular.

c) Având în vedere cele de mai sus şi calculând $\overline{\alpha}'(t) \times (\overline{\alpha}'(t) \times \overline{\alpha}''(t)) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ ab\sin t & -ab\cos t & a^2 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)(a\cos t\overline{i} + a\sin t\overline{j})$ rezultă că

Tangenta la Γ în punctul curent $M = \alpha(t)$ are ecuaţiile:

$$T : \frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{z - bt}{b}.$$

Planul normal la Γ în punctul curent $M = \alpha(t)$ are ecuaţia:

$$\pi_n : -a\sin t(x - a\cos t) + a\cos t(y - a\sin t) + b(z - bt) = 0.$$

Binormala la Γ în punctul curent $M = \alpha(t)$ are ecuaţiile:

$$B : \frac{x - a\cos t}{b\sin t} = \frac{y - a\sin t}{-b\cos t} = \frac{z - bt}{a}.$$

Planul osculator la Γ în punctul curent $M = \alpha(t)$ are ecuaţia:

$$\pi_o : b\sin t(x - a\cos t) - b\cos t(y - a\sin t) + a(z - bt) = 0.$$

Normala principala la Γ în punctul curent $M = \alpha(t)$ are ecuaţiile:

$$NP : \begin{cases} \frac{x-a\cos t}{\cos t} = \frac{y-a\sin t}{\sin t} \\ z - bt = 0 \end{cases}.$$

Planul rectificant la Γ în punctul curent $M = \alpha(t)$ are ecuaţia:

$$\pi_r : \cos t(x - a\cos t) + \sin t(y - a\sin t) = 0.$$

d) $\overline{T}(t) = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t)\|}\overline{\alpha}'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t\overline{i}+a\cos t\overline{j}+b\overline{k})$, $\overline{B}(t) = \frac{1}{\|\overline{\alpha}'(t)\times\overline{\alpha}''(t)\|}\overline{\alpha}'(t)\times \overline{\alpha}''(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\overline{i} - b\cos t\overline{j} + a\overline{k})$, $\overline{N}(t) = \overline{B}(t) \times \overline{T}(t) = \cos t\overline{i} + \sin t\overline{j}$, *de unde* $\overline{T}(0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{k}$, $\overline{N}(0) = \overline{i}$, $\overline{B}(0) = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{k}$.

e) Considerăm parametrizarea naturală cu originea în punctul $M_0 = \alpha(0)$, adică fixăm $t_0 = 0$ şi luăm schimbarea de parametru $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $s = \varphi(t) = \int_0^t \|\overline{\alpha}'(t)\|\, dt = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\cdot t$. Rezultă $t = \varphi^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi atunci o parametrizare naturală a elicei cilindrice Γ este $(\mathbf{R}, \beta = \beta(s))$, unde $\overline{\beta}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\overline{i} + a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\overline{j} + b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{k}$, $s \in \mathbf{R}$.

Lungimea elicei între punctele $M_0 = \alpha(0)$ şi $M_1 = \alpha(2\pi)$ este $L_{\widehat{M_0M_1}} = \int_0^{2\pi} \|\overline{\alpha}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

f) Având în vedere formulele (19) şi (28), avem curbura elicei în punctul $M = \alpha(t) \in \Gamma$, $k(t) = \frac{\|\overline{\alpha}'(t)\times\overline{\alpha}''(t)\|}{\|\overline{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{a^2(a^2+b^2)}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$ *şi torsiunea elicei în punctul $M = \alpha(t) \in \Gamma$,* $\tau(t) = \frac{[\overline{\alpha}'(t),\overline{\alpha}''(t),\overline{\alpha}'''(t)]}{\|\overline{\alpha}'(t)\times\overline{\alpha}''(t)\|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$, *deoarece*

$$[\overline{\alpha}'(t), \overline{\alpha}''(t), \overline{\alpha}'''(t)] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Se observă că torsiunea şi curbura sunt constante de-a lungul elicei.

g) Având în vedere calculele de mai sus şi formulele (27), rezultă formulele lui Frenét pentru elicea circulară Γ:

$$\begin{cases} \overline{T}'(t) &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{N}(t) \\ \overline{N}'(t) &= -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{T}(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{B}(t) \\ \overline{B}'(t) &= -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{N}(t) \end{cases}, \ \forall t \in \mathbf{R}.$$

8.5 Probleme propuse spre rezolvare

1. Se dă curba Γ dată prin ecuaţia vectorială $\overline{\alpha}(t) = \cos t\overline{i} + \sin t\overline{j} + (t+1)\overline{k}$, $t \in \mathbf{R}$. Se cer:

   a) Să se scrie ecuaţiile parametrice ale curbei Γ;

   b) Să se arate că $M(1, 0, 1) \in \Gamma$ şi toate punctele curbei sunt nesingulare;

   c) Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la Γ în punctul $M(1, 0, 1)$.

2. Fie curba plană $\Gamma : x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0$. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei la Γ în punctele de intersecţie cu axa Ox.

3. Se numeşte **curbă Ţiţeica**, curba pentru care $\frac{d^2}{\tau}$ =constant, unde τ torsiunea într-un punct arbitrar al curbei, iar d distanţa de la un punct fix la planul osculator al curbei. Să se arate că curba Γ definită de ecuaţiile $\begin{cases} xyz = 1 \\ y^2 = x \end{cases}$ este o curbă Ţiţeica.

4. Fie curba Γ dată prin ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x(t) = \frac{a}{3}(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = \frac{a}{3}(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, unde $a \in \mathbf{R}$, fixat.

   a) Să se arate că drumul parametrizat $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbf{R}$, care are drept suport curba Γ, este o funcţie periodică. Determinaţi punctele multiple ale lui α;

   b) Să se arate că drumul $\alpha_{|[0,2\pi]} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ este închis, simplu, dar nu este regulat;

   c) Calculaţi curbura lui Γ în punctul nesingular $M = \alpha(0)$.

   Curba Γ se numeşte **hipocicloida lui Steiner**.

5. Se consideră curba Γ dată implicit prin ecuaţiile
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - r^2 = 0 \\ y^2 + z^2 - r^2 = 0 \end{cases}, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$
   şi punctul $M\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right) \in \Gamma$.

   a) Să se scrie ecuatiile tangentei, planului normal şi planului osculator la curba Γ în punctul M;

   b) Sa se determine versorii reperului Frenét asociat curbei Γ în punctul M;

   c) Să se determine curbura şi torsiunea curbei Γ în punctul M.

6. Să se scrie ecuatiile axelor şi feţelor triedrului Frenét pentru curba Γ dată prin ecuaţiile parametrice
$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = \frac{t^2}{2} \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

în punctul unde $\mathbf{\Gamma}$ intersectează planul xOy.

7. Să se determine curbura şi raza de curbură pentru curbele plane

   a) $\Gamma_1 : y = x^3 - 4x^2 - x^4$ în punctul $O(0, 0)$;

   b) $\Gamma_2 : \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$ în punctul $A(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{8})$;

   c) $\Gamma_3 : x = 3t^2,\ y = 3t - t^3$ în punctul $M_0(t = 1)$;

   d) $\Gamma_4 : \rho = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ în punctul $M_0(\theta = \frac{\pi}{6})$.

8. Fie curba Γ dată de ecuaţiile parametrice:

$$x\,(t) = a\cos^2 t,\ \ y\,(t) = a\sqrt{2}\sin t\cos t,\ \ z\,(t) = a\sin^2 t,\ \ t \in \mathbf{R}.$$

   a) Să se găsească ecuaţiile carteziene implicite ale curbei;

   b) Să se determine ecuaţiile tangentei şi planului normal al curbei Γ în punctul $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}\right) \in \Gamma$;

   c) Să se determine ecuaţiile binormalei şi planului osculator al curbei Γ în punctul $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

9. Fie curba $\mathbf{\Gamma}$ dată de ecuaţia vectorială:

$$\overline{\alpha}(t) = 2t\bar{i} + \ln t\bar{j} + t^2\overline{k},\ t \in (0, \infty).$$

   Se cer:

   a) Arătaţi că punctele $A(2, 0, 1)$, $B(4, \ln 2, 4)$ aparţin curbei şi calculaţi lungimea arcului de curbă dintre A şi B;

   b) Să se scrie ecuaţiile axelor şi muchiilor reperului Frenét asociat curbei Γ în punctul A;

   c) Să se determine versorii $\overline{T}$, $\overline{N}$, $\overline{B}$ ai reperului Frenét într-un punct biregulat oarecare al curbei;

   d) Calculaţi curbura şi torsiunea curbei Γ în punctul A.

10. Se dă curba $\Gamma : \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ x^2 - z = 0 \end{cases}$. Se cer:

    a) Calculaţi lungimea arcului de curba dintre punctele O şi M, unde $M(1, 1, 1)$;

    b) Să se scrie ecuaţiile axelor şi muchiilor reperului Frenét asociat curbei Γ în punctul M;

    c) Calculaţi curbura şi torsiunea curbei Γ în punctul M.

Capitolul 9

Suprafeţe

Fixăm un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ în spaţiul E_3.

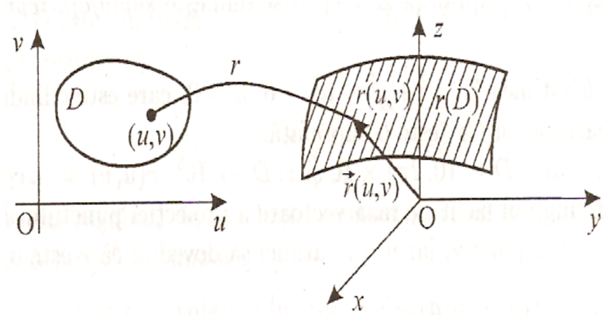
9.1 Pânze parametrizate. Suprafeţe. Moduri de reprezentare

Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ o mulţime deschisă şi $r : D \to \mathbf{R}^3$,

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad \forall (u,v) \in D$$

o funcţie de clasă C^k $(k \geq 1)$ pe D, adică fiecare dintre funcţiile reale $(u,v) \in D \xrightarrow{x} x(u,v)$, $(u,v) \in D \xrightarrow{y} y(u,v)$, $(u,v) \in D \xrightarrow{z} z(u,v)$ au derivate parţiale de ordinul k pe D şi acestea sunt continue pe D.

Definiţia 9.1.1 *Perechea $(D, r = r(u,v))$ numeşte* ***pânză parametrizată****, iar mulţimea de puncte $r(D) = \{r(u,v) | (u,v) \in D\} \subset \mathbf{R}^3$ se numeşte* ***suportul*** *(sau imaginea) pânzei parametrizate.*



Spunem că un punct $M_0 \in E_3$, de coordonate (x_0, y_0, z_0) relativ la reperul $\mathcal{R}$, **se află pe suportul** pânzei parametrizate $(D, r = r(u,v))$ dacă există $(u_0, v_0) \in D$ aşa încât $r(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Vom scrie $M_0 \in r(D)$ sau $M_0 = r(u_0, v_0)$.

Funcţiei $r : D \to \mathbf{R}^3$ îi putem asocia funcţia vectorială $\overline{r} : D \to V^3$, $\overline{r}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k}$. Atunci, ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D \tag{1}$$

se numesc **ecuaţiile scalare parametrice** ale pânzei parametrizate, iar ecuaţia

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k}, \quad (u,v) \in D \tag{2}$$

se numeşte **ecuaţia vectorială** a pânzei. Numerele reale u, v se numesc **parametrii** pânzei parametrizate.

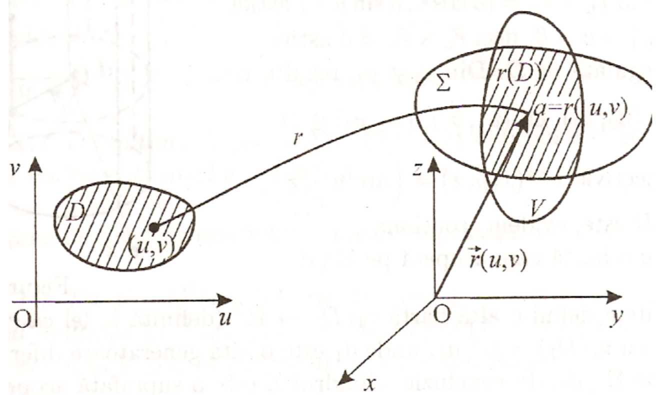
Dacă facem următoarele notaţii $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$, $z_u = \frac{\partial z}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $y_v = \frac{\partial y}{\partial v}$, $z_v = \frac{\partial z}{\partial v}$, $\overline{r}_u = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = x_u\overline{i} + y_u\overline{j} + z_u\overline{k}$, $\overline{r}_v = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = x_v\overline{i} + y_v\overline{j} + z_v\overline{k}$, atunci pânza parametrizată $(D, r = r(u,v))$ se zice **pânză regulată** (sau *netedă* sau *nesingulară*) dacă $\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq \overline{0}$, $\forall (u,v) \in D$.

Definiţia 9.1.2 *Pânzele parametrizate regulate $(D, r = r(u,v))$, $(\Delta, r_1 = r_1(p,q))$, unde D, $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ sunt mulţimi deschise, se numesc* ***echivalente (şi cu aceeaşi orientare)*** *dacă există o funcţie $h : D \to \Delta$, bijectivă, de clasă C^1 (şi strict crescătoare) aşa încât $r = r_1 \circ h$. Funcţia h se numeşte* ***schimbare de parametri****.*

Evident că orice două pânze echivalente au acelaşi suport $r(D) = r_1(\Delta)$, dar nu orice două pânze care au acelaşi suport sunt şi echivalente.

Definiţia 9.1.3 *O submulţime $\Sigma \subset E_3$ se numeşte* ***suprafaţă*** *dacă pentru orice punct $P \in \Sigma$ există o vecinătate $V \subset E_3$ şi o pânză parametrizată regulată $(D, r = r(u,v))$ astfel ca $r(D) = V \cap \Sigma$ şi $r : D \to r(D)$ este un homeomorfism (continuă, bijectivă şi cu inversa continuă).*

O suprafaţă Σ se numeşte ***simplă*** *dacă există o pânză regulată $(D, r = r(u,v))$ astfel ca $\Sigma = r(D)$. Pânza parametrizată regulată $(D, r = r(u,v))$ se numeşte* ***parametrizare locală*** *a suprafeţei Σ (în jurul punctului P).*



Din definiţia de mai sus se observă că o suprafaţă Σ este o varietate diferenţiabilă de dimensiune 2. A se vedea şi faptul că se poate demonstra că pentru orice punct $P \in \Sigma$ şi orice mulţime deschisă $V \subset E_3$, cu $P \in V$, orice două parametrizări locale $(D, r = r(u,v))$, $(\Delta, r_1 = r_1(p,q))$ cu $V \cap \Sigma = r(D) = r_1(\Delta)$ sunt pânze parametrizate *echivalente*.

În concluzie, orice suprafaţă este local suportul unei pânze parametrizate netede, unic determinată până la o schimbare de parametri.

Astfel, o suprafaţă se poate defini (local) ca o clasă de echivalenţă de pânze parametrizate regulate.

Pe lângă reprezentarea parametrică (locală) a unei suprafeţe ((1) sau (2)) avem şi *reprezentarea carteziană explicită şi implicită.*

a) Mulţimea $\Sigma = \{(x,y,z) | z = z(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2\}$ *este întotdeauna o suprafaţă simplă*, pentru că $\Sigma = r(D)$, unde $r : D \to \mathbf{R}^3$, $r(u,v) = (u, v, z(u,v))$ este o pânză parametrizată regulată. În acest mod suprafaţa Σ se numeşte *suprafaţă reprezentată explicit*, iar ecuaţia

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \tag{3}$$

se numeşte **ecuaţia carteziană explicită** a suprafeţei Σ. Analog, pentru $x = x(y,z)$ sau $y = y(x,z)$.

Exemplul 9.1.1 *Suprafaţa dată explicit* $\Sigma : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ *reprezintă un paraboloid eliptic, iar suprafaţa* $\Sigma : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ *reprezintă un paraboloid hiperbolic.*

Exemplul 9.1.2 *Ecuaţia* $y = xtgz$ *(sau* $y - xtgz = 0$*) reprezintă o suprafaţă numită* ***elicoid.***

b) Fie mulţimea $\Sigma = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, F(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in D \subset \mathbf{R}^3 \right\}$, unde F este o funcţie de clasă C^1 pe D. *În general mulţimea* Σ *nu este o suprafaţă.* Însă, dacă într-un punct $a = (x_0, y_0, z_0) \in D$ avem $F_{x_0}^2 + F_{y_0}^2 + F_{z_0}^2 \neq 0$ (unde am notat $F_{x_0} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ş.a.m.d.), atunci conform Teoremei funcţiilor implicite (pentru situaţia $F_{z_0} \neq 0$) există o vecinătate V în $\mathbf{R}^3$ a lui $a =$

(x_0, y_0, z_0) şi o funcţie de clasă C^1, $z : \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ vecinătate a lui (x_0, y_0), astfel ca $F(x, y, z(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in \Delta$. Deci $V \cap \Sigma = r(\Delta)$, unde $r(u, v) = (u, v, z(u, v))$, $(u, v) \in \Delta$, este o porţiune de suprafaţă simplă care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Ecuaţia acestei porţiuni de suprafaţă poate fi adusă la forma explicită $z = z(x, y)$. În acest caz ecuaţia

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

se numeşte **ecuaţia carteziană implicită** a porţiunii de suprafaţă $V \cap \Sigma$.

Reuniunea porţiunilor simple de suprafaţă ce se pot obţine în acest mod se numeşte *suprafaţă reprezentată implicit* de ecuaţia implicită (4).

Exemplul 9.1.3 *În ecuaţia (4) dacă funcţia F este o funcţie algebrică de gradul doi în x, y, z, atunci suprafaţa dată de (4) este o cuadrică. De pildă, un cilindru eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ sau o pereche de plane concurente $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.*

Exemplul 9.1.4 *Ecuaţia $x^3 + y^3 + z - 1 = 0$ este ecuaţia carteziană implicită a unei suprafeţe. Aceasta se poate reprezenta implicit prin $z = 1 - x^3 - y^3$ sau se poate reprezenta parametric prin $x = u$, $y = v$, $z = 1 - u^3 - v^3$.*

9.2 Curbe pe o suprafaţă. Curbe coordonate. Puncte singulare şi regulate

Fie Σ o suprafaţă şi $P \in \Sigma$ un punct al său. Admitem că $(D, r = r(u, v))$ este o parametrizare locală regulată a lui Σ în vecinătatea lui P. O curba Γ în spaţiu care trece prin P $(P \in \Gamma)$ se numeşte **curbă pe suprafaţa** Σ dacă există o parametrizare locală $(I, \alpha = \alpha(t))$ a curbei Γ, în jurul lui P $(P \in \alpha(I))$ şi există parametrizările $t \overset{u}{\to} u(t)$, $t \overset{v}{\to} v(t)$, $t \in I$, cu $(u(t), v(t)) \in D$, $\forall t \in I$, aşa încât $\alpha(t) = r(u(t), v(t)), \forall t \in I$.

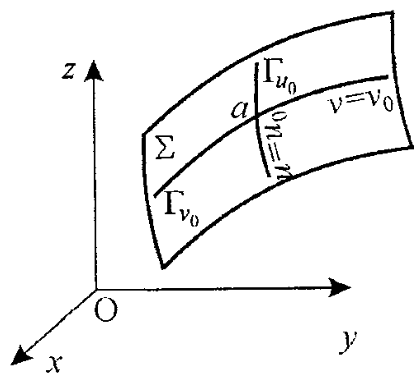
Mai simplu, *o curbă pe o suprafaţă este o curbă conţinută în acea suprafaţă.*

Exemplul 9.2.1 *Elicea cilindrică reprezentată parametric de drumul neted $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, este o curbă pe cilindrul circular $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$.*

Exemplul 9.2.2 *Evident, un cerc de pe o sferă este o curbă pe acea sferă.*

Fie suprafaţa $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ şi $M_0 = r(u_0, v_0) \in \Sigma$. Atunci, curbele $\Gamma_{u_0} : u = u_0$ şi $\Gamma_{v_0} : v = v_0$ de pe suprafaţa Σ se numesc **curbe coordonate** pe suprafaţa Σ (sau *curbele reţelei lui Gauss*).

Prin fiecare punct $M_0 = r(u_0, v_0) \in \Sigma$ ce aparţine unei porţiuni regulate de suprafaţă trece o curbă şi numai una din fiecare familie de curbe coordonate $u = const$, $v = const$, şi anume curbele $\Gamma_{u_0} : u = u_0$ si $\Gamma_{v_0} : v = v_0$. În acest caz u_0, v_0 se numesc **coordonatele curbilinii** ale punctului M_0 şi vom nota $M_0(u_0, v_0)$.



În concluzie, ecuaţia $\overline{\alpha}(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$, $t \in I$, *reprezintă ecuaţia vectorială parametrică a unei curbe de pe suprafaţa* $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, *curbă ce trece prin punctul* $M_0(u_0, v_0) \in \Sigma$, *dacă şi numai dacă putem alege acele funcţii* $t \xrightarrow{u} u(t)$, $t \xrightarrow{v} v(t)$, cu $(u(t), v(t)) \in D$, pentru toţi $t \in I$ şi *aşa încât să existe un* $t_0 \in I$ *cu* $u(t_0) = u_0$ *şi* $v(t_0) = v_0$.

Acum să remarcăm că *vectorul tangent* la curba coordonată $\Gamma_{u_0} : u = u_0$ într-un punct curent al ei este $\overline{r}_v \overset{not}{=} \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$ (a se vedea că $\Gamma_{u_0} : \overline{\alpha}(t) = \overline{r}(u_0, v(t))$, $v(t) = t$ şi atunci $\overline{\alpha}'(t) = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} u' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} v' = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$), iar vectorul tangent la curba coordonată $\Gamma_{v_0} : v = v_0$ este $\overline{r}_u \overset{not}{=} \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}$.

Definiţia 9.2.1 *Fie* $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ *o suprafaţă reprezentată parametric. Un punct* $M_0(u_0, v_0) \in \Sigma$ *se numeşte* ***punct regulat*** *al suprafeţei dacă* $\overline{r}_u \times \overline{r}_{v|(u_0,v_0)} \neq \overline{0}$, *adică vectorii* $\overline{r}_{u|(u_0,v_0)}$ *şi* $\overline{r}_{v|(u_0,v_0)}$ *sunt necoliniari. În caz contrar punctul* $M_0(u_0, v_0) \in \Sigma$ *numeşte* ***punct singular*** *al suprafeţei.*

O porţiune simplă de suprafaţă formată numai din puncte regulate se numeşte ***porţiune regulată*** *a suprafeţei* Σ. *Dacă toată suprafaţa e formată din puncte regulate atunci ea se zice* ***suprafaţă regulată*** *(sau netedă).*

Exemplul 9.2.3 *Suprafaţa reprezentată parametric* $\Sigma : \begin{cases} x = u^2 + v + 1 \\ y = u^2 - v + 1 \\ z = uv + 2 \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ *are reprezentarea parametrică vectorială* $\overline{r} = (u^2 + v + 1)\overline{i} + (u^2 - v + 1)\overline{j} + (uv + 2)\overline{k}$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ *este o suprafaţă cu doar un singur punct singular* ($\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq \overline{0}$, $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$). *Punctul* $M_0(u = 1, v = 1) \in \Sigma$ *are coodonatele carteziene* $x = 3$, $y = 1$, $z = 3$, *iar curbele coordonate care trec prin* M_0 *au ecuaţiile vectoriale* $\Gamma_{u=1} : \overline{r} = (v + 2)\overline{i} + (2 - v)\overline{j} + (v + 2)\overline{k}$, $\Gamma_{v=1} : \overline{r} = (u^2 + 2)\overline{i} + u^2\overline{j} + (u + 2)\overline{k}$ *sau* $\Gamma_{u=1} : \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 4 \end{cases}$ *(o dreapta prin* M_0 *situată pe* Σ*),* $\Gamma_{v=1} : \begin{cases} x - y = 2 \\ y = (z - 2)^2 \end{cases}$ *(intersecţia dintre un plan şi un cilindru parabolic). Cum* $\overline{r}_u = 2u\overline{i} + 2u\overline{j} + v\overline{k}$ *si* $\overline{r}_v = \overline{i} - \overline{j} + u\overline{k}$ *rezultă că*

$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = (2u^2+v)\overline{i} - (2u^2-v)\overline{j} - 4u\overline{k}$ *şi* $\overline{r}_u \times \overline{r}_{v|(u=1,v=1)} = 3\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k} \neq \overline{0}$, *adică într-adevăr* $M_0(u=1, v=1)$ *este un punct regulat.*

Exemplul 9.2.4 *Sfera de centru* O *şi rază* R *are reprezentarea parametrică* $\begin{cases} x = R\cos u \sin v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R\cos v \end{cases}$, $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$ *şi reprezentarea implicită* $x^2+y^2+z^2-R^2=0$. *Dar există două reprezentări explicite* $z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ *şi* $z = +\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ *care reprezintă emisfera sudică şi emisfera nordică a sferei. Dacă considerăm* $\begin{cases} u = u(t) = t^2 \\ v = v(t) = t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, *atunci curba* Γ *corespunzătoare de pe sferă are ecuaţiile* $\Gamma : \begin{cases} x = x(u(t),v(t)) = R\cos t^2 \sin t^3 \\ y = y(u(t),v(t)) = R\sin t^2 \sin t^3 \\ z = z(u(t),v(t)) = R\cos t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$. *Ea trece prin punctul* $M(0,0,R)$ *de coordonate curbilinii* $u=0$, $v=0$.

Curbele coordonate pe sferă care trec prin punctul curent $M_0(u_0,v_0)$ *sunt cercuri mari de pe sferă. Într-adevăr, cum* $\Gamma_{u_0} : u = u_0$, $\Gamma_{v_0} : v = v_0$, *adică* $\Gamma_{u_0} : \begin{cases} x = R\cos u_0 \sin v \\ y = R\sin u_0 \sin v \\ z = R\cos v \end{cases}$, *respectiv* $\Gamma_{v_0} : \begin{cases} x = R\sin v_0 \cos u \\ y = R\sin v_0 \sin u \\ z = R\cos v_0 \end{cases}$, *este clar că acestea sunt cercuri în spaţiu.*

9.3 Plan tangent. Normală

Fie $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, o suprafaţă reprezentată parametric şi $P = r(u,v)$ un punct regulat al ei. Tangentele la curbele coordonate de pe suprafaţa Σ care trec prin punctul P au direcţiile date de vectorii $\overline{r}_u$ şi $\overline{r}_v$, vectori care sunt necoliniari ($\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq \overline{0}$).

Definiţia 9.3.1 *Planul determinat de punctul* $P = r(u,v)$ *şi de vectorii directori* $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$ *se numeşte* ***plan tangent*** *la suprafaţa* Σ *în punctul* P, *iar dreapta care trece prin* P *şi este perpendiculară pe planul tangent la* Σ *se numeşte* ***normală*** *la suprafata* Σ *în punctul* P.

Observaţia 9.3.1 *Tangenta în* $P \in \Sigma$ *la orice curbă* $\Gamma : \overline{\alpha}(t) = \overline{r}(u(t),v(t))$ *care trece prin* P *şi este situată pe suprafaţa* $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$, *este conţinută în planul tangent la* Σ *în* P, *deoarece* $\overline{\alpha}'(t) = u'(t)\overline{r}_u(u(t),v(t)) + v'(t)\overline{r}_v(u(t),v(t))$ *şi astfel* $\overline{\alpha}'(t)$, $\overline{r}_u(u(t),v(t))$ *şi* $\overline{r}_v(u(t),v(t))$ *sunt coliniari.*

Direcţia normalei la Σ în punctul $P = r(u,v)$ este dată de vectorul $\overline{r}_u \times \overline{r}_v$, care se numeşte **vector normal** la suprafaţa Σ în punctul P. Când punctul $P = r(u,v)$ parcurge suprafaţa Σ, atunci funcţia $(u,v) \in D \to \overline{n}(u,v) \overset{not}{=} \frac{1}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|}(\overline{r}_u \times \overline{r}_v) \in V^3$ se numeşte **câmp normal unitar** al suprafeţei Σ. În fiecare punct al suprafeţei versorul normal $\overline{n}$ este de aceeaşi parte a suprafeţei dacă baza $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{n}\}$ este pozitiv orientată.

Orientăm suprafaţa Σ considerând pozitivă faţa dinspre direcţia pozitivă a normalei, dată de sensul lui $\overline{n}$.

Având în vedere cele de mai sus, ecuaţia vectorială a planului tangent la Σ în punctul $P = r(u,v)$ este

$$\pi_t : (\overline{r} - \overline{r}(u,v)) \cdot (\overline{r}_u \times \overline{r}_v) = 0 \tag{5}$$

sau, ecuaţia carteziană a sa este

$$\pi_t : \begin{vmatrix} x - x(u,v) & y - y(u,v) & z - z(u,v) \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \tag{5'}$$

Dacă notăm $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$, $B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$, $C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$, atunci (5') devine

$$\pi_t : A(x - x(u,v)) + B(y - y(u,v)) + C(z - z(u,v)) = 0. \tag{5''}$$

Cum normala la Σ în punctul $P = r(u,v)$ are drept vector director pe $\overline{r}_u \times \overline{r}_v = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$, rezultă că ea are ecuaţiile:

$$N : \frac{x - x(u,v)}{A} = \frac{y - y(u,v)}{B} = \frac{z - z(u,v)}{C}. \tag{6}$$

Dacă suprafaţa Σ este dată prin ecuaţia explicită $z = z(x,y)$, atunci (ţinând seama că Σ se poate parametriza prin $\overline{r} = u\overline{i} + v\overline{j} + z(u,v)\overline{k}$, unde $u = x$, $v = y$) ecuaţia planului tangent într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0 = z(x_0,y_0))$ al ei este:

$$\pi_t : \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \tag{5'''}$$

iar ecuaţiile normalei la Σ în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sunt

$$N : \frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{6'}$$

Dacă suprafaţa Σ este dată prin ecuaţia implicită $F(x,y,z) = 0$, atunci un punct $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$ se numeşte **punct regulat** al lui Σ dacă **vectorul gradient** al funcţiei F în punctul (x_0,y_0,z_0), $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\overline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\overline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\overline{k}$, este nenul. În caz contrar, punctul M_0 se numeşte **punct critic** (sau *singular*) al suprafeţei Σ.

Dacă $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct regulat al suprafeţei $\Sigma : F(x,y,z) = 0$, pentru care presupunem că $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, atunci din teorema funcţiilor implicite rezultă că funcţia $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, are într-o vecinătate a lui M_0 derivatele parţiale continue de ordinul întâi

$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$. Prin urmare, planul tangent la Σ în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţia

$$\pi_t : \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0, \tag{5^{iv}}$$

iar ecuaţiile normalei la Σ în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sunt

$$N : \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \tag{6”}$$

Se observă că vectorul normal la Σ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este vectorul gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ al lui F în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Exemplul 9.3.1 *Să se determine ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la sferă într-un punct curent al ei.*

Rezolvare:

Sfera de centru O şi raza R are ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = R\cos u \sin v \\ y = R\sin u \sin v \\ z = R\cos v \end{cases}$, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. *Cum $x_u = -R\sin u \sin v$, $y_u = R\cos u \sin v$, $z_u = 0$, $x_v = R\cos u \cos v$, $y_v = R\sin u \cos v$, $z_v = -R\sin v$, rezultă $\overline{r}_u \times \overline{r}_v = -R^2 \cos u \sin^2 v\overline{i} - R^2 \sin u \sin^2 v\overline{j} - R^2 \sin v \cos v\overline{k}$, de unde avem ecuaţia planului normal la sferă într-un punct curent al ei*

$$\cos u \sin^2 v(x-R\cos u \sin v)+\sin u \sin^2 v(y-R\sin u \sin v)+\sin v \cos v(z-R\cos v) = 0$$

şi ecuaţiile normalei la sferă într-un punct curent al ei

$$\frac{x - R\cos u \sin v}{\cos u \sin^2 v} = \frac{y - R\sin u \sin v}{\sin u \sin^2 v} = \frac{z - R\cos v}{\sin v \cos v}.$$

Se remarcă faptul că originea verifică ecuaţiile normalei, ceea ce înseamnă că oricare ar fi u, v, normala trece printr-un punct fix. Este adevarată şi reciproca: Dacă normala într-un punct curent al unei suprafeţe trece printr-un punct fix, atunci suprafaţa este o sferă cu centrul în acel punct fix.

Exemplul 9.3.2 *Scrieţi ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa dată explicit $\Sigma : z = xy$, $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, în punctul $M_0(x = 1, y = 1)$.*

Rezolvare:

Cum $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ rezultă că planul tangent la Σ în M_0 are ecuaţia $1(x-1)+1(y-1)-(z-1) = 0$, adică $x + y - z - 1 = 0$. Normala la Σ în M_0 are ecuaţiile $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Exemplul 9.3.3 *Aceeaşi problemă pentru suprafaţa dată implicit* $\Sigma : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} - 1 = 0$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, *în punctul* $M_0(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}})$.

Rezolvare:

Avem $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} - 1$ *şi* $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overline{k} = \frac{x}{2}\overline{i} + \frac{2y}{9}\overline{j} + \frac{z}{18}\overline{k}$. *Atunci* $\nabla F(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{i} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\overline{j} + \frac{3}{\sqrt{3}}\overline{k}$ *şi astfel planul tangent la* Σ *în* M_0 *are ecuaţia*

$$x - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\left(y - \frac{3}{\sqrt{3}}\right) + 3\left(z - \frac{6}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

iar normala la Σ *în* M_0 *are ecuaţiile*

$$\frac{x - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{y - \frac{3}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{z - \frac{6}{\sqrt{3}}}{3}.$$

9.4 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe. Lungimea unei curbe pe o suprafaţă. Unghiul a două curbe pe o suprafaţă. Elementul de arie al unei suprafeţe

Fie $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ o suprafaţă regulată, reprezentată parametric şi $\Gamma : \overline{\alpha}(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$, $t \in I$ o curbă situată pe suprafaţa Σ. Dacă s este abscisa curbilinie pe curba Γ, atunci $ds^2 = d\overline{\alpha}^2 = d\overline{r}^2 = d\overline{r} \cdot d\overline{r} = (\overline{r}_u du + \overline{r}_v dv) \cdot (\overline{r}_u du + \overline{r}_v dv)$, adică

$$ds^2 = \|\overline{r}_u\|^2 du^2 + 2(\overline{r}_u \cdot \overline{r}_v) dudv + \|\overline{r}_v\|^2 dv^2. \tag{7}$$

Definiţia 9.4.1 *Egalitatea (7) ne arată că* ds^2 *este o formă pătratică diferenţială în du, dv, numită* ***prima formă fundamentală*** *(a lui Gauss) a suprafeţei* Σ *sau* ***metrica*** *suprafeţei* Σ.

Dacă notăm $E = \|\overline{r}_u\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = \|\overline{r}_v\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$, atunci (7) devine

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{7'}$$

E, F, G se numesc **coeficienţii** primei forme fundamentale a suprafeţei Σ.

Observaţia 9.4.1 *Prima formă fundamentală a unei suprafeţe* Σ *este o* ***formă pătratică pozitiv definită*** *în toate punctele regulate ale suprafeţei, deoarece* $E = \|\overline{r}_u\|^2 > 0$ *(dacă* $\|\overline{r}_u\|^2 = 0$ *avem* $\overline{r}_u = \overline{0}$ *şi atunci* $\overline{r}_u \times \overline{r}_v = \overline{0}$*, contradicţie) şi* $\Delta \overset{not}{=} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = \|\overline{r}_u\|^2 \|\overline{r}_v\|^2 - (\overline{r}_u \cdot \overline{r}_v)^2 =$

$= \|\overline{r}_u\|^2 \|\overline{r}_v\|^2 \sin^2(\widehat{\overline{r}_u, \overline{r}_v}) = \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|^2 > 0.$

Deoarece produsul scalar este invariant la schimbări de baze ortonormate şi $ds^2 = d\overline{r} \cdot d\overline{r}$, rezultă că prima formă fundamentală este invariantă la schimbări de repere ortonormate.

Exemplul 9.4.1 *Prima formă fundamentală a sferei cu centrul în origine şi de rază R, de ecuaţie vectorială*

$$\overline{r} = R\cos u \sin v\overline{i} + R\sin u \sin v\overline{j} + R\cos v\overline{k}, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi],$$

este $ds^2 = R^2 \sin^2 v du^2 + R^2 dv^2$, *pentru că* $\overline{r}_u = -R\sin u \sin v\overline{i} + R\cos u \sin v\overline{j}$, $\overline{r}_v = R\cos u \cos v\overline{i} + R\sin u \cos v\overline{j} - R\sin v\overline{k}$ *şi atunci* $E = \|\overline{r}_u\|^2 = R^2 \sin^2 v$, $F = \overline{r}_u \cdot \overline{r} = 0$, $G = \|\overline{r}_v\|^2 = R^2$.

În cazul unei suprafeţe reprezentate explicit, $\Sigma : z = z(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, ţinând cont că putem parametriza suprafaţa prin $x = u$, $y = v$, $z = z(u, v)$, avem $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$, dacă folosim notaţiile lui Monge $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Prin urmare prima formă fundamentală a lui Σ este

$$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2. \qquad (7")$$

Exemplul 9.4.2 *Prima formă fundamentală a suprafeţei* $\Sigma : z = xy$, $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, *este* $ds^2 = (1 + y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 + x^2)dy^2$.

Revenind la curba $\Gamma : \overline{\alpha}(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$, $t \in I$, situată pe suprafaţa regulată $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, avem că lungimea arcului de curbă dintre punctele $M_1 = \alpha(t_1)$ şi $M_2 = \alpha(t_2)$ de pe Γ este $L_{\widehat{M_1M_2}} = \int_{t_1}^{t_2} \|\overline{\alpha}'(t)\| dt$, unde $t_1 < t_2$. Dar $\overline{\alpha}'(t) = u'(t)\overline{r}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\overline{r}_v(u(t), v(t))$ şi atunci avem

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \sqrt{\overline{\alpha}'(t) \cdot \overline{\alpha}'(t)} = \sqrt{E(t)(u'(t))^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)(v'(t))^2},$$

unde $E(t) = E(u(t), v(t)) = \|\overline{r}_u(u(t), v(t))\|^2$, $F(t) = F(u(t), v(t)) = \overline{r}_u(u(t), v(t)) \cdot \overline{r}_v(u(t), v(t))$, $G(t) = G(u(t), v(t)) = \|\overline{r}_v(u(t), v(t))\|^2$.
Prin urmare lungimea arcului de curbă $\widehat{M_1M_2}$ pe curba Γ este

$$L_{\widehat{M_1M_2}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(t)(u'(t))^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)(v'(t))^2} dt \qquad (8)$$

Dacă fixăm $t_1 \in I$ şi luăm t arbitrar în I, egalitatea $s = \int_{t_1}^{t} \|\overline{\alpha}'(\tau)\| d\tau$, unde s este abscisa curbilinie pe Γ (adică s este parametru natural) ne dă elementul de arc ds pe curba $\Gamma \subset \Sigma$, $ds = \|\overline{\alpha}'(t)\| dt$ sau $ds^2 = \|\overline{\alpha}'(t)\|^2 dt^2$. Atunci, avem

$ds^2 = E(t)(u'(t))^2dt^2 + 2F(t)u'(t)v'(t)dt^2 + G(t)(v'(t))^2dt^2$ sau
$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Evident că

$$L_{\widehat{M_1M_2}} = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt. \quad (8')$$

Exemplul 9.4.3 *Fie suprafaţa* $\Sigma : \overline{r} = (u+v)\overline{i} + (u^2 - v)\overline{j} + (u+v^2)\overline{k}$, $(u,v) \in \mathbf{R}^2$. *Să se determine perimetrul triunghiului curbiliniu* $M_1M_2M_3$ *determinat de curbele* $\Gamma_1 : u = 1$, $\Gamma_2 : v = -1$, $\Gamma_3 : u + v = 1$ *pe suprafaţa* Σ.

Rezolvare:

Avem $\overline{r}_u = \overline{i} + 2u\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{r}_v = \overline{i} - \overline{j} + 2v\overline{k}$, *de unde rezultă că* $E = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_u = 2 + 4u^2$, $F = 1 - 2u + 2v$, $G = 2 + 4v^2$. *Atunci prima formă fundamentală a lui* Σ *este*

$$ds^2 = (2 + 4u^2)du^2 + 2(1 - 2u - 2v)dudv + (2 + 4v^2)dv^2.$$

Deoarece $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{M_1\}$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \{M_2\}$, $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \{M_3\}$, *rezultă* $M_1(1,-1)$, $M_2(1,0)$ *şi* $M_3(2,-1)$, *iar* $\widehat{M_1M_2} \subset \Gamma_1$, $\widehat{M_2M_3} \subset \Gamma_3$, $\widehat{M_1M_3} \subset \Gamma_2$. *Atunci*

$L_{\widehat{M_1M_2}} = \int_{-1}^{0} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{G}dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{2 + 4t^2}dt =$
$= 2\int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}}dt = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$, *pentru că de-a lungul lui* $\widehat{M_1M_2}$ *avem* $u = 1$, $v = t \in [-1,0]$, $u' = 0$, $v' = 1$.

$L_{\widehat{M_2M_3}} = \int_{1}^{2} \sqrt{2(1 + 4t^2)}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1}^{2} 2\sqrt{(2t)^2 + 1}dt = \sqrt{2}[4\sqrt{17} - 2\sqrt{5} + \ln(4 + \sqrt{17}) - \ln(\sqrt{5} - 2)]$, *pentru că de-a lungul lui* $\widehat{M_2M_3}$ *avem* $u+ v = 1$, *adică* $u = t$, $v = 1 - t$, $t \in [1,2]$, $u' = 1$, $v' = -1$.

$L_{\widehat{M_1M_3}} = \int_{1}^{2} \sqrt{E}dt = \int_{1}^{2} \sqrt{2 + 4t^2}dt = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$, *pentru că de-a lungul lui* $\widehat{M_1M_3}$ *avem* $u = t \in [1,2]$, $v = -1$, $u' = 1$, $v' = 0$.

În final, perimetrul triunghiului curbiliniu $M_1M_2M_3$ *este egal cu* $L_{\widehat{M_1M_2}} + L_{\widehat{M_2M_3}} + L_{\widehat{M_1M_3}}$.

Fie acum două curbe $\Gamma_1 : \overline{\alpha}_1(t) = \overline{r}(u_1(t), v_1(t))$, $t \in I_1$ si $\Gamma_1 : \overline{\alpha}_2(\tau) = \overline{r}(u_2(\tau), v_2(\tau))$, $\tau \in I_2$ situate pe suprafaţa regulată $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ şi având punctul comun $M = \alpha_1(t) = \alpha_2(\tau)$.

Definiţia 9.4.2 *Se numeşte* ***unghi*** *al curbelor* Γ_1 *şi* Γ_2 *în punctul* M *unghiul* θ *format de tangentele la cele două curbe în* M.

Întrucât vectorii directori ai tangentelor la curbele Γ_1, Γ_2 în punctul M sunt $\overline{\alpha}'_1(t) = u'_1(t)\overline{r}_u + v'_1(t)\overline{r}_v$ şi $\overline{\alpha}'_2(\tau) = u'_2(\tau)\overline{r}_u + v'_2(\tau)\overline{r}_v$, rezultă

$$\cos\theta = \frac{\overline{\alpha}'_1(t) \cdot \overline{\alpha}'_2(\tau)}{\|\overline{\alpha}'_1(t)\|\,\|\overline{\alpha}'_2(\tau)\|} = \frac{d\overline{\alpha}_1 \cdot \delta\overline{\alpha}_2}{\|d\overline{\alpha}_1\|\,\|\delta\overline{\alpha}_2\|} = \frac{d\overline{r} \cdot \delta\overline{r}}{\|d\overline{r}\|\,\|\delta\overline{r}\|},$$

unde prin $\delta\overline{r}$ am notat diferenţiala în raport cu τ. Ţinând cont că $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$ şi $\delta\overline{r} = \overline{r}_u \delta u + \overline{r}_v \delta v$, obţinem expresia analitică a cosinusului unghiului θ făcut de cele două curbe în punctul comun M:

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{9}$$

Două curbe Γ_1 şi Γ_2 de pe suprafaţa Σ sunt **ortogonale** dacă şi numai dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$, adică

$$Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0. \tag{9'}$$

În cazul curbelor coordonate $\Gamma_{u_0} : u = u_0$ şi $\Gamma_{v_0} : v = v_0$ care trec prin punctul $M(u_0, v_0)$ avem $d\overline{r} = \overline{r}_v dv$ $(du = 0)$ şi $\delta\overline{r} = \overline{r}_u \delta u$ $(\delta v = 0)$. Atunci unghiul θ format de curbele coordonate este dat prin

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{9''}$$

Deci, curbele coordonate sunt ortogonale dacă şi numai dacă $F = 0$ (vezi sfera).

Observaţia 9.4.2 *Lungimea unei curbe pe o suprafaţă şi unghiul a două curbe pe o suprafaţă sunt exemple de mărimi exprimabile prin coeficienţii primei forme fundamentale* ds^2. *Acestea se numesc mărimi "intrinseci" ale suprafeţei. De asemenea mărimea vectorului normal* $\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{EG - F^2}$ *este o mărime "intrinsecă" a suprafeţei.*

Exemplul 9.4.4 *Fie suprafaţa* $\Sigma : \overline{r} = (u+v)\overline{i} + (u^2 - v)\overline{j} + (u + v^2)\overline{k}$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$. *Să se determine unghiul* θ *făcut de curbele coordonate* $u = 1$ *şi* $v = -1$, *în punctul* $M(1, -1)$.

Rezolvare:

Avem $\overline{r}_u = \overline{i} + 2u\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{r}_v = \overline{i} - \overline{j} + 2v\overline{k}$, *de unde* $E = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_u = 2 + 4u^2$, $F = 1 - 2u + 2v$, $G = 2 + 4v^2$. *Atunci în punctul* $M(1, -1)$, *avem* $E = 6$, $F = -3$, $G = 6$. *Având în vedere că de-a lungul curbei* $u = 1$ *avem* $du = 0$, *iar de-a lungul curbei* $v = -1$ *avem* $\delta v = 0$, *rezultă* $\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = -\frac{1}{2}$, *adică* $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Fie suprafaţa $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$.

Definiţia 9.4.3 *Se numeşte* ***elementul de arie*** *al suprafeţei* Σ *într-un punct regulat al ei* $M(u, v)$, *aria paralelogramului format pe vectorii* $\overline{r}_u du$ *şi* $\overline{r}_v dv$, *consideraţi cu punctul de aplicaţie în* M.

Dacă notăm elementul de arie prin $d\sigma$ avem că

$$d\sigma = \|\overline{r}_u du \times \overline{r}_v dv\| = \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| \, dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv \tag{10}$$

În cazul unei suprafeţe reprezentată explicit $\Sigma : z = z(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$ avem $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy$, unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Exemplul 9.4.5 *Pentru sfera* $\Sigma : \overline{r} = R \cos u \sin v \overline{i} + R \sin u \sin v \overline{j} + R \cos v \overline{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$, *avem* $E = R^2 \sin^2 v$, $F = 0$ *şi* $G = R^2$, *de unde* $EG - F^2 = R^4 \sin^2 v$. *Atunci elementul de arie al sferei este* $d\sigma = R^2 \sin v dudv$.

În cadrul cursului de analiză matematică, în capitolele de calcul integral, se va obţine aria unei porţiuni de suprafaţă Σ prin $\mathcal{A} = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma$, unde $\iint\limits_{\Sigma}$ este numită *integrala pe suprafaţă.*

9.5 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe. Curbura unei curbe pe o suprafaţă. Curbura normală. Curburi principale. Linii geodezice pe o suprafaţă

Fie $\Sigma : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, o suprafaţă, $P(u, v) \in \Sigma$ un punct regulat al ei, iar $\Gamma : \overline{\alpha}(s) = \overline{r}(u(s), v(s))$, s abscisa curbilinie (s parametru natural), o curbă pe Σ care trece prin P. Admitem că P este un punct biregulat pentru curba Γ. Ataşăm triedrul lui Frenét în punctul P al curbei Γ format din versorii tangentă $\overline{T}$, normală principală $\overline{N}$ şi binormală $\overline{B}$. Dacă $\overline{\alpha}(s) = \overline{r}(u(s), v(s))$ este vectorul de poziţie al punctului P, atunci $\overline{T} = \frac{d\overline{r}}{ds}$. Astfel, prima formulă a lui Frenét devine $\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \frac{1}{R}\overline{N}$, unde R este raza de curbură a curbei Γ.

Fie $\overline{n} = \frac{1}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|} (\overline{r}_u \times \overline{r}_v)$ versorul normalei la suprafaţa Σ. Atunci, avem $\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} \cdot \overline{n} = \frac{1}{R}\overline{N} \cdot \overline{n}$ sau $\frac{1}{R} \left\|\overline{N}\right\| \|\overline{n}\| \cos\theta = \overline{n} \cdot \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, unde θ este unghiul dintre $\overline{n}$ şi $\overline{N}$. Prin urmare

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{R}\overline{N} \cdot \overline{n} = \frac{d^2\overline{r} \cdot \overline{n}}{ds^2}. \tag{11}$$

Definiţia 9.5.1 *Vectorul* $\frac{1}{R}\overline{N}$ *se numeşte* ***vectorul de curbură*** *al curbei* Γ, *iar proiecţiile lui pe normala lui* Σ *şi pe planul tangent la* Σ *în punctul* P *se numesc* ***curbura normală*** *şi, respectiv,* ***curbura tangenţială***, *notate* $\frac{1}{R_n}$ *şi* $\frac{1}{R_g}$.

Egalitatea (11) ne dă tocmai **curbura normală**

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}\overline{N} \cdot \overline{n} = \frac{\cos\theta}{R} = \overline{n} \cdot \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}. \tag{12}$$

Cum unghiul făcut de $\overline{N}$ cu planul tangent este $\frac{\pi}{2} - \theta$ rezultă **curbura tangenţială**

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin\theta}{R}. \tag{13}$$

Mai departe, cum $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$, rezultă că

$$d^2\overline{r} = \overline{r}_{uu}du^2 + 2\overline{r}_{uv}dudv + \overline{r}_{vv}dv^2 + \overline{r}_u d^2u + \overline{r}_v d^2v,$$

unde $\overline{r}_{uu} = \frac{\partial^2\overline{r}}{\partial u^2}$, $\overline{r}_{uv} = \frac{\partial^2\overline{r}}{\partial u\partial v}$, $\overline{r}_{vv} = \frac{\partial^2\overline{r}}{\partial v^2}$.
Dacă ţinem cont că $\overline{n}\cdot\overline{r}_u = 0$ şi $\overline{n}\cdot\overline{r}_v = 0$, atunci avem

$$\overline{n}\cdot d^2\overline{r} = (\overline{n}\cdot\overline{r}_{uu})\,du^2 + 2\,(\overline{n}\cdot\overline{r}_{uv})\,dudv + (\overline{n}\cdot\overline{r}_{vv})\,dv^2. \tag{14}$$

Notând

$$\begin{cases} L = \overline{n}\cdot\overline{r}_{uu} = \frac{1}{\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|}[\overline{r}_u,\overline{r}_v,\overline{r}_{uu}] \\ M = \overline{n}\cdot\overline{r}_{uv} = \frac{1}{\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|}[\overline{r}_u,\overline{r}_v,\overline{r}_{uv}] \\ N = \overline{n}\cdot\overline{r}_{vv} = \frac{1}{\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|}[\overline{r}_u,\overline{r}_v,\overline{r}_{vv}] \end{cases}, \tag{15}$$

obţinem

$$\overline{n}\cdot d^2\overline{r} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \tag{14'}$$

Definiţia 9.5.2 *Forma pătratică diferenţială*

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \overset{not}{=} d\varphi^2 \tag{14"}$$

se numeşte ***a doua formă pătratică diferenţială*** *a suprafeţei Σ, iar L, M, N din (15) se numesc* ***coeficienţii*** *acestei forme.*

Exemplul 9.5.1 *Fie sfera cu centrul în origine şi de rază R, de ecuaţie vectorială*

$$\overline{r} = R\cos u\sin v\overline{i} + R\sin u\sin v\overline{j} + R\cos v\overline{k}, u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi],$$

Avem $\overline{r}_u = -R\sin u\sin v\overline{i} + R\cos u\sin v\overline{j}$, $\overline{r}_v = R\cos u\cos v\overline{i} + R\sin u\cos v\overline{j} - R\sin v\overline{k}$, $\overline{r}_{uu} = -R\cos u\sin v\overline{i} - R\sin u\sin v\overline{j}$, $\overline{r}_{uv} = -R\sin u\cos v\overline{i} + R\cos u\cos v\overline{j}$, $\overline{r}_{vv} = -R\cos u\sin v\overline{i} - R\sin u\sin v\overline{j} - R\cos v\overline{k}$, $E = \|\overline{r}_u\|^2 = R^2\sin^2 v$, $F = \overline{r}_u\cdot\overline{r} = 0$, $G = \|\overline{r}_v\|^2 = R^2$, $\overline{r}_u\times\overline{r}_v = -R^2\cos u\sin^2 v\overline{i} - R^2\sin u\sin^2 v\overline{j} - R^2\sin v\cos v\overline{k}$, $\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\| = R^2\sin v$, $L = \frac{1}{\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|}[\overline{r}_u,\overline{r}_v,\overline{r}_{uu}] = R\sin^2 v$, $M = \frac{1}{\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|}[\overline{r}_u,\overline{r}_v,\overline{r}_{uv}] = 0$, $N = \frac{1}{\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|}[\overline{r}_u,\overline{r}_v,\overline{r}_{vv}] = R$.

Atunci prima formă fundamentală a sferei este $ds^2 = R^2\sin^2 vdu^2 + R^2dv^2$, *iar a doua formă fundamentală este* $d\varphi^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = R\sin^2 vdu^2 + Rdv^2$.

Conform cu relaţiile (11), (12) şi (14') avem că $\frac{1}{R_n} = \frac{d^2\overline{r}\cdot\overline{n}}{ds^2} = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$, de unde rezultă faptul că, curbura normală a curbei Γ, $\frac{1}{R_n}$, este dată de formula:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{d\varphi^2}{ds^2}. \tag{16}$$

Exemplul 9.5.2 *Pentru sfera cu centrul în origine şi de rază R, curbura normala este $\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}$, peste tot.*

Observaţia 9.5.1 *Evident că membrul drept el egalităţii (16)* ***depinde doar de punctul*** *$P \in \Gamma \subset \Sigma$ (coeficienţii E, F, G, L, M, N sunt calculaţi în punctul P)* ***şi de tangenta în*** *P* ***la curba*** *Γ (prin intermediul lui du, dv). Prin urmare, dacă considerăm pe suprafaţa Σ o altă curbă Γ' care să trecă prin P şi să aibă aceeaşi tangentă în P ca şi curba Γ, atunci $\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos\theta'}{R'}$ în P, unde $\frac{1}{R'}$ este curbura lui Γ' şi θ' este unghiul dintre normala la Σ în P şi normala principală la Γ' în P.*

Deci curbura normală în $P \in \Sigma$, corespunzătoare curbei $\Gamma \subset \Sigma$, depinde de punctul P şi de direcţia tangentei la Γ în P.

Dacă admitem că ecuaţia curbei Γ de pe suprafaţa Σ este $v = v(u)$, $u \in I$ şi considerăm $\lambda = \frac{dv}{du}$, atunci formula curburii normale $\frac{1}{R_n}$ devine

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}. \tag{16'}$$

Acum, ne propunem să determinăm acele curbe de pe suprafaţa Σ pentru care curbura normală $\frac{1}{R_n}$ să aibă valori extreme. Prin anularea derivatei funcţiei $\frac{1}{R_n} : \lambda \to \frac{1}{R_n}(\lambda)$ obţinem

$$(M + N\lambda)(E + 2F\lambda + G\lambda^2) - (F + G\lambda)(L + 2M\lambda + N\lambda^2) = 0,$$

sau $\frac{L+2M\lambda+N\lambda^2}{E+2F\lambda+G\lambda^2} = \frac{M+N\lambda}{F+G\lambda} = \frac{L+M\lambda}{E+F\lambda}$ sau $(M+N\lambda)(E+F\lambda) - (L+M\lambda)(F+G\lambda) = 0$, adică $\begin{vmatrix} E+F\lambda & L+M\lambda \\ F+G\lambda & M+N\lambda \end{vmatrix} = 0$, ceea ce înseamnă

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Întrucât (17) reprezintă o ecuaţie de gradul doi în λ ale cărei rădăcini λ_1, λ_2 anulează derivata lui $\frac{1}{R_n}$, rezultă că valorile extreme ale curburii principale $\frac{1}{R_n}$ sunt $\frac{1}{R_n}(\lambda_1) \overset{not}{=} k_1$ şi $\frac{1}{R_n}(\lambda_2) \overset{not}{=} k_2$.

Definiţia 9.5.3 *Numerele reale k_1, k_2 se numesc* ***curburile principale*** *ale suprafeţei Σ.*

Având în vedere cele de mai sus, se observă că

$$k_1 = \frac{M + N\lambda_1}{F + G\lambda_1} \quad si \quad k_2 = \frac{M + N\lambda_2}{F + G\lambda_2}. \tag{18}$$

Din $\frac{dv}{du} = \lambda_1 = f_1(u,v)$ şi $\frac{dv}{du} = \lambda_2 = f_2(u,v)$, prin integrare, se obţin ecuaţiile

$$\varphi_1(u,v,c_1) = 0 \quad si \quad \varphi_2(u,v,c_2) = 0 \tag{19}$$

(unde $c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}$, constante), care reprezintă ecuaţiile a două familii de curbe pe Σ numite **linii de curbură** ale suprafeţei Σ.

Prin urmare, liniile de curbură la suprafaţa Σ sunt curbe situate pe Σ pentru care pantele tangentelor sunt egale cu λ_1, respectiv λ_2, pentru care curbura normală ia valori extreme. Direcţiile de pante λ_1 şi λ_2 (adică direcţiile tangentelor la liniile de curbură) se numesc **direcţii principale** ale suprafeţei Σ.

Deoarece pantele direcţiilor principale verifică ecuaţia $\frac{M+N\lambda}{F+G\lambda} = \frac{L+M\lambda}{E+F\lambda} \overset{not}{=} k$, obţinem (prin eliminarea lui λ între aceste ecuaţii) $\lambda = \frac{M-kF}{kG-N}$, de unde avem $\frac{L+M\frac{M-kF}{kG-N}}{E+F\frac{M-kF}{kG-N}} = k$, adică $\frac{(LG-MF)k+M^2-NL}{(EG-F^2)k+MF-NE} = k$.

Prin urmare, curburile principale verifică ecuaţia de gradul doi în k:

$$(EG - F^2)k^2 - (LG - 2MF + NE)k + LN - M^2 = 0. \tag{20}$$

Ecuaţia (20) se poate scrie şi sub forma

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0. \tag{20'}$$

Să remarcăm că ecuaţia (20) ne permite determinarea curburilor principale $k_1,\ k_2$ fără a determina în prealabil direcţiile principale $\lambda_1,\ \lambda_2$, ca în formula (18). De asemenea, din ecuaţia (20), folosind relaţiile lui Viète, avem

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2} \\ k_1 k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \end{cases}. \tag{21}$$

Definiţia 9.5.4 *Produsul şi semisuma curburilor principale $k_1,\ k_2$ se numesc* ***curbura totală*** *(sau* ***curbura Gauss****), notată K, respectiv* ***curbura medie,*** *notată H, pentru suprafaţa Σ.*

Din (21) rezultă formulele pentru curbura totală şi curbura medie:

$$\begin{cases} K = k_1 k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \\ H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} \end{cases}. \tag{21'}$$

Observaţia 9.5.2 *Având în vedere (17), rezultă că ecuaţia diferenţiala a liniilor de curbură este*

$$\begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Exemplul 9.5.3 *Să se determine curbura normală, curburile principale, direcţiile principale, liniile de curbură, curbura totală şi curbura medie pentru suprafaţa*

$$\Sigma : \overline{r} = u\cos v\overline{i} + u\sin v\overline{j} + av\overline{k}\,, \quad (u, v) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R},$$

unde $a \in \mathbf{R}$, suprafaţă numită ***elicoidul drept****.*

Rezolvare:

Avem $\overline{r}_u = \cos v\overline{i} + \sin v\overline{j}$, $\overline{r}_v = -u\sin v\overline{i} + u\cos v\overline{j} + a\overline{k}$, $\overline{r}_{uu} = \overline{0}$, $\overline{r}_{uv} = -\sin v\overline{i} + \cos v\overline{j}$, $\overline{r}_{vv} = -u\cos v\overline{i} - u\sin v\overline{j}$. Atunci $E = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_u = 1$, $F = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v = 0$, $G = \overline{r}_v \cdot \overline{r}_v = u^2 + a^2$, $\overline{r}_u \times \overline{r}_v = a\sin v\overline{i} - a\cos v\overline{j} + u\overline{k}$, $\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| = \sqrt{u^2+a^2}$, $L = 0$, $M = \frac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $N = 0$ şi astfel curbura normală este dată de (16),

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\frac{-2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv}{1du^2 + (u^2+a^2)dv^2} = -\frac{2a\frac{du}{dv}}{\sqrt{u^2+a^2}\left(\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (u^2+a^2)\right)}.$$

Curburile principale sunt date de ecuaţia (20), care devine $(u^2+a^2)k^2 - \frac{a^2}{u^2+a^2} = 0$. Atunci $k_1 = \frac{a}{u^2+a^2}$, $k_2 = -\frac{a}{u^2+a^2}$ sunt curburile principale.

Ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură (17) se scrie

$$\begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & \frac{-a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (u^2+a^2)du^2 - dv^2 = 0,$$

de unde avem mai întâi direcţiile principale $\lambda_1 = \frac{dv}{du} = -\sqrt{u^2+a^2}$ şi $\lambda_2 = \frac{dv}{du} = \sqrt{u^2+a^2}$. Integrând ecuaţiile $\frac{dv}{du} = -\sqrt{u^2+a^2}$ şi $\frac{dv}{du} = \sqrt{u^2+a^2}$ obţinem liniile de curbură date prin ecuaţiile $\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + v + c_1 = 0$ şi $\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) - v + c_2 = 0$, unde c_1, c_2 sunt constante reale.

Curbura totală este $K = k_1k_2 = \frac{-a^2}{(u^2+a^2)^2}$, iar curbura medie este $H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0$.

Definiţia 9.5.5 *Curbele de pe suprafaţa Σ în lungul cărora curbura normală $\frac{1}{R_n}$ se anulează se numesc* ***linii asimptotice*** *ale suprafeţei Σ, iar direcţiile tangentelor la aceste curbe se numesc* ***direcţii asimptotice****.*

Având în vedere expresia curburii normale (16) şi definiţia liniei asimptotice, avem ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \tag{23}$$

Fie $v = v(u)$ ecuaţia liniei asimptotice şi fie $\lambda = \frac{dv}{du}$. Atunci, (23) devine

$$L+2M\lambda+N\lambda^2=0. \tag{23'}$$

Rădăcinile λ_1, λ_2 ale ecuaţiei (23') sunt pantele direcţiilor asimptotice, iar din ecuaţiile $\frac{dv}{du}=\lambda_1=g_1(u,v)$ şi $\frac{dv}{du}=\lambda_2=g_2(u,v)$, prin integrare, se obţin ecuaţiile

$$\Psi_1(u,v,c_1)=0 \quad si \quad \Psi_2(u,v,c_2)=0 \tag{24}$$

(unde c_1, $c_2\in\mathbf{R}$, constante), care reprezintă ecuaţiile liniilor asimptotice ale suprafeţei Σ.

Din ecuaţia de gradul doi în λ, (23'), rezultă că în fiecare punct P al suprafeţei Σ există două direcţii asimptotice care pot fi (după valoarea discriminantului):

i) *reale* şi *distincte*, dacă $\left(M^2-LN\right)_{|P}>0$, caz în care punctul P se numeşte **punct hiperbolic**.

ii) *reale* şi *egale*, dacă $\left(M^2-LN\right)_{|P}=0$, caz în care punctul P se numeşte **punct parabolic**.

iii) *imaginare*, dacă $\left(M^2-LN\right)_{|P}<0$, caz în care punctul P se numeşte **punct eliptic**.

Prin urmare, prin fiecare punct hiperbolic al suprafeţei Σ trec două linii asimptotice, prin fiecare punct parabolic trece o singură linie asimptotică, iar printr-un punct eliptic nu trec linii asimptotice (spunem că avem două linii asimptotice imaginare).

Exemplul 9.5.4 *Să se determine liniile de curbură şi liniile asimptotice ale suprafeţei*

$$\Sigma:\overline{r}=u\cos v\overline{i}+u\sin v\overline{j}+\frac{1}{u}\overline{k},\quad (u,v)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}.$$

Rezolvare:

Avem $\overline{r}_u=\cos v\overline{i}+\sin v\overline{j}-\frac{1}{u^2}\overline{k}$, $\overline{r}_v=-u\sin v\overline{i}+u\cos v\overline{j}$, $\overline{r}_{uu}=\frac{2}{u^3}\overline{k}$, $\overline{r}_{uv}=-\sin v\overline{i}+\cos v\overline{j}$, $\overline{r}_{vv}=-u\cos v\overline{i}-u\sin v\overline{j}$. *Atunci* $E=\overline{r}_u\cdot\overline{r}_u=1+\frac{1}{u^4}$, $F=\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v=0$, $G=\overline{r}_v\cdot\overline{r}_v=u^2$, $\overline{r}_u\times\overline{r}_v=\frac{1}{u}\cos v\overline{i}+\frac{1}{u}\sin v\overline{j}+u\overline{k}$, $\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|=\sqrt{\frac{1}{u^2}+u^2}$, $L=\frac{2}{u\sqrt{u^4+1}}$, $M=0$, $N=-1$.

Directiile principale sunt date de ecuatia (17)

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ \frac{u^4+1}{u^4} & 0 & u^2 \\ \frac{2}{u\sqrt{u^4+1}} & 0 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad unde\ \lambda=\frac{dv}{du}.$$

Prin urmare $\lambda\left(\frac{u^4+1}{u^4}+\frac{2u}{\sqrt{u^4+1}}\right)=0$ *ceea ce implică* $\lambda=0$, *adică liniile de curbură au ecuaţia de forma* $v=cu$, $c\in\mathbf{R}$, *constantă.*

Ecuaţia liniilor asimptotice (23') se scrie $\frac{2}{u\sqrt{u^4+1}} - \lambda^2 = 0$, *unde* $\lambda = \frac{dv}{du}$. *Deci* $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{u\sqrt{u^4+1}}}$, *de unde avem că liniile asimptotice ale suprafeţei sunt date de ecuaţiile diferenţiale:* $\frac{dv}{du} = -\sqrt{\frac{2}{u\sqrt{u^4+1}}}$ *şi* $\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{2}{u\sqrt{u^4+1}}}$.

Definiţia 9.5.6 *O curbă* Γ *situată pe suprafaţa* Σ *se numeşte* ***linie geodezică*** *a suprafeţei dacă planul osculator al curbei în fiecare punct al ei conţine normala la suprafaţă.*

Pe o curba $\Gamma \subset \Sigma$, dacă alegem ca parametru una dintre coordonatele curbilinii ale suprafeţei Σ, de exemplu pe u, atunci ecuaţia vectorială a curbei Γ este $\overline{r}(u) = \overline{r}(u, v(u))$. Întrucât planul osculator al curbei Γ într-un punct arbitrar al ei este determinat de vectorii $\overline{r}'$, $\overline{r}''$, rezultă că curba Γ este o linie geodezică dacă şi numai dacă vectorii $\overline{r}'$, $\overline{r}''$, $\overline{n}$ sunt coplanari ($\overline{n}$ este versorul normalei la Σ). Astfel, ecuaţia diferenţială a liniilor geodezice este:

$$[\overline{r}', \overline{r}'', \overline{n}] = 0. \tag{25}$$

Exemplul 9.5.5 *Să se determine liniile geodezice ale planului* $\pi \subset E_3$.

Rezolvare:

Se consideră un reper cartezian ortonormat $Oxyz$ *astfel încât* $\pi = xOy$. *Atunci planul* π *are reprezentarea parametrică* $\pi\ :\ \overline{r} = u\overline{\imath} + v\overline{\jmath}$, $(u, v) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$. *Curba* $\Gamma \subset \pi$ *este linie geodezică a lui* π *dacă şi numai dacă planul osculator al lui* Γ *conţine normala la* π , *în fiecare punct al lui* Γ , *adică* $[\overline{r}', \overline{r}'', \overline{n}] = 0$. *Se consideră curba* $\Gamma : v = v(u)$, *situată pe* π . *Atunci* $\overline{r} = u\overline{\imath} + v(u)\overline{\jmath}$, $\overline{r}^{'} = \frac{d\overline{r}}{du} = \overline{\imath} + v^{'}\overline{\jmath}$, $\overline{r}^{''} = v^{''}\overline{\jmath}$, $\overline{n} = \frac{\bar{r}_u\times\bar{r}_v}{\|\bar{r}_u\times\bar{r}_v\|} = \bar{k}$.

Deci $[\bar{r}', \bar{r}'', \overline{n}] = \begin{vmatrix} 1 & v^{'} & 0 \\ 0 & v^{''} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow v^{''} = 0 \Leftrightarrow v(u) = c_1 u + c_2$ *(*c_1, c_2 *constante reale).*

Prin urmare, liniile geodezice ale planului π *au ecuaţia vectorială parametrică*

$\overline{r} = u\overline{i} + (c_1 u + c_2)\overline{j} = c_2\overline{j} + u(\overline{\imath} + c_1\overline{j})$, $u \in \mathbf{R}$, *care reprezintă ecuaţia vectorială parametrică a unei drepte. Deci liniile geodezice ale planului* π *sunt dreptele sale.*

Exemplul 9.5.6 *Fie suprafaţa* Σ *care are reprezentarea parametrică* $\overline{r} = u\overline{i} + uv\overline{j} + (v + \ln u)\bar{k}$, $(u, v) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}$.

Se cer:

a) Să se determine forma I-a fundamentală şi forma a II-a fundamentală pentru suprafaţa Σ*;*

b) Să se precizeze natura punctelor suprafeţei Σ *;*

c) Să determine liniile asimptotice ale suprafeţei Σ *;*

d) Să se calculeze curbura normală a suprafeţei Σ *în punctul* $P(u = 1, v = -1) \in \Sigma$, *corespunzătoare curbei* $\Gamma : u - v^2 = 0$, *situată pe* Σ *;*

e) Să se calculeze curburile principale, curbura totală şi curbura medie în punctul

$P(u=1, v=-1)$;
f) Să se determine liniile de curbură ale suprafeţei Σ .

Rezolvare:

a) Se observă că suprafaţa Σ este regulată de ordin $k \geq 2$ şi toate punctele sunt ordinare, pentru că având $\bar{r}_u = \bar{i} + v\bar{j} + \frac{1}{u}\bar{k}$, $\bar{r}_v = u\bar{j} + \bar{k}$ rezultă $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = (v-1)\bar{i} - \bar{j} + u\bar{k} \neq \bar{0}$.
Prima formă fundamentală este $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 =$
$= (1+v^2+\frac{1}{u^2})du^2 + 2(uv+\frac{1}{u})dudv + (u^2+1)dv^2$, pentru că $E = \bar{r}_u^2 = 1+v^2+\frac{1}{u^2}$, $F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = uv + \frac{1}{u}$, $G = \bar{r}_v^2 = u^2+1$.
A doua formă fundamentală este $d\varphi^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$,
unde $L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu})$, $M = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv})$, $N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv})$.
Cum $\Delta = \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|^2 = u^2 + v^2 - 2v + 2$, $\bar{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} = -\frac{1}{u^2}\bar{k}$, $\bar{r}_{uv} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} = \bar{j}$, $\bar{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} = \bar{0}$ şi $(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} 1 & v & \frac{1}{u} \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u}$, $(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv}) = \begin{vmatrix} 1 & v & \frac{1}{u} \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} 1 & v & \frac{1}{u} \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că $L = -\frac{1}{u\sqrt{\Delta}}$, $M = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, $N = 0$.
Deci $d\varphi^2 = -\frac{1}{u\sqrt{\Delta}}du^2 - \frac{2}{\sqrt{\Delta}}dudv$.
b) Deoarece $M^2 - LN = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{u\Delta} \cdot 0 = \frac{1}{\Delta} > 0$ în orice punct $P \in \Sigma$, rezultă că toate punctele suprafeţei Σ sunt hiperbolice, adică prin orice punct $P \in \Sigma$ trec două linii asimptotice reale.
c) Ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice este

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0\,,$$

adică $-\frac{1}{u\sqrt{\Delta}}du^2 - \frac{2}{\sqrt{\Delta}}dudv = 0$.
Prin urmare, avem $du = 0$ sau $\frac{1}{u}du + 2dv = 0$. De aici rezultă ecuaţiile celor două familii de linii asimptotice: $u = c_1$, respectiv $\ln u + 2v = c_2$ (c_1, c_2 constante reale).
Prin orice punct $P(u_0, v_0) \in \Sigma$ trece o linie asimptotică $u = u_0$ ($c_1 = u_0$) şi o linie asimptotică $\ln u + 2v = c_2$ (unde constanta reală c_2 se determină din condiţia $\ln u_0 + 2v_0 = c_2$, adică $c_2 = \ln(u_0 e^{2v_0})$).
d) Curbura normală $\frac{1}{R_n}$ a lui Σ , în punctul $P(u=1, v=-1) \in \Sigma$, corespunzătoare curbei $\Gamma : u - v^2 = 0$ ($\Gamma \subset \Sigma$) este

$$K_n = \frac{ds^2}{d\varphi^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

În punctul $P(u=1, v=-1)$ avem $E = 3$, $F = 0$, $G = 2$, $\Delta = 6$, $L = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $M = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $N = 0$. De-a lungul curbei $\Gamma : u - v^2 = 0$ avem, prin diferenţiere, $du = 2vdv$ şi în punctul $P(u=1, v=-1)$ avem $du = -2dv$. Atunci

$$\frac{1}{R_n} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{6}}du^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}dudv}{3du^2 + 2dv^2} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{6}}dv^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}dv^2}{12dv^2 + 2dv^2} = 0$$

e) Ecuaţia, cu necunoscuta K, care dă curburile principale în $P(u=1, v=-1)$ este

$$\begin{vmatrix} EK-L & FK-M \\ FK-M & GK-N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3K+\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 2K \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$6K^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}K - \frac{1}{6} = 0$, *de unde rezultă curburile principale ale lui* Σ *în* P: $k_1 = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{42}}{36}$, $k_2 = +\frac{\sqrt{6}+\sqrt{42}}{36}$. *Curbura totală a lui* Σ *în* P *este* $K = k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{36}$. *Curbura medie a lui* Σ *în* P *este* $H = \frac{k_1+k_2}{2} = -\frac{1}{6\sqrt{6}}$.

f) Ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură ale lui Σ *este*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1+v^2+\frac{1}{u^2} & uv+\frac{1}{u} & 1+u^2 \\ -\frac{1}{u\Delta} & -\frac{1}{\Delta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -\frac{1+u^2}{u}dudv + (v^2-v+1)du^2 - (1+u^2)dv^2 = 0$.

9.6 Probleme propuse spre rezolvare

1. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa Σ : $\bar{r} = (u+v)\bar{i} + u\bar{j} + \ln u\bar{k}$, $(u,v) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}$, în punctul $M(u=1; v=0)$.

2. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei la suprafaţa Σ : $3x^2 - y^2 + 4xz - 3x - z + 4 = 0$ în punctul $M(0,0,4)$.

3. Să se determine un punct P al suprafeţei Σ : $z = x^3 - 3xy$, în care normala la suprafaţă este perpendiculară pe planul π : $5x+6y+2z-7=0$. Scrieţi ecuaţia planului tangent la Σ în punctul P .

4. Fie suprafaţa Σ : $\bar{r} = u\bar{i} + (u+v)\bar{j} + (u+v^2)\bar{k}$, $(u,v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ şi curbele $\Gamma_1 : v = 1$, $\Gamma_2 : u = v$, situate pe suprafaţa Σ. Se cer:

   a) Să se determine prima formă fundamentală a suprafeţei Σ;
   b) Să se calculeze lungimea arcului M_1M_2 al curbei Γ_2, unde

   $M_1(u=v=0)$ şi $M_2(u=v=1)$;
   c) Să se calculeze măsura unghiului curbelor Γ_1 şi Γ_2 în M_2 .

5. a) Să se calculeze curbura normală a sferei într-un punct arbitrar al ei;

   b) Determinaţi direcţiile principale şi directiile asimptotice ale sferei;

   c) Determinaţi liniile geodezice ale sferei.

6. Să se calculeze curburile principale ale suprafeţei Σ : $z = xy$ în punctul $P(1,1,1)$. Determinaţi liniile de curbura şi liniile asimptotice ale acestei suprafeţe care trec prin P.

7. Fie suprafaţa $\Sigma : y = xtgz$.

   a) Să se arate că $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

   reprezintă o parametrizare a suprafeţei;

   b) Să se determine prima forma fundamentală a suprafeţei;

   c) Să se determine unghiul dintre curbele $\Gamma_1 : u + v = 0$ şi $\Gamma_2 : u - v = 0$ situate pe Σ, în punctul $M(u = 0, v = 0)$.

8. Să se găsească curbura totala, curbura medie, liniile de curbură şi liniile asimptotice ale suprafeţei de ecuaţie $z = x^2 - y^2$, în punctul $P\,(2, 1, 3)$.

9. Fie suprafaţa $\Sigma\ :\ \bar{r} = u\cos v\bar{i} + u\sin v\bar{j} + uv\bar{k}$, $(u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ şi curba $\Gamma : v = u + 1$, situată pe suprafaţa Σ. Se cer:

   a) Să se determine prima şi a doua formă fundamentală a suprafeţei Σ;
   b) Să se calculeze lungimea arcului M_1M_2 al curbei Γ, unde

   $M_1(u = 1, v = 2)$ şi $M_2(u = 2, v = 3)$;
   c) Să se determine curbura normala şi liniile de curbură ale suprafeţei Σ, în punctul $M(u = 0, v = 0)$.

10. Fie Σ o suprafaţă netedă şi orientabilă.

    a) Să se arate că suprafaţa Σ este un plan dacă şi numai dacă a doua formă fundamentală este nulă;

    b) Să se arate că suprafaţa Σ este o sferă dacă şi numai dacă coeficienţii formelor fundamentale sunt proporţionali, adică $\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$.

Bibliografie

[1] G. Marinescu, *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1959.

[2] I. Creangă, T. Luchian, *Introducere în calculul tensorial*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[3] M. Stoka, *Geometrie diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

[4] Gh. Vrânceanu, *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.

[5] Gh. Gheorghiev, R. Miron, D. Papuc, *Geometrie analitică şi diferenţială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

[6] P. Stavre, *Curs de geometrie diferenţială*, Litografia Universităţii din Craiova, 1970.

[7] I. Creangă, C. Haimovici, *Algebră liniară*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

[8] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[9] T. Luchian, *Algebră abstractă*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

[10] R. Miron, *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[11] Gh. Galbură, F. Rado, *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[12] I. Vladimirescu, G. Vraciu, *Algebră şi programare liniară. Culegere de probleme*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1979.

[13] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[14] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[15] M. Craioveanu, I.D. Albu, *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1982.

[16] G.E. Şilov, *Mathematical analysis. Finite dimensional spaces*, Editura Şt. Encicl., Bucureşti, 1983.

[17] A. Belage, J. Rouvre, J. Chastenet de Gery, R. Théodor, *Exercices résolus d'algébre linéaire*, Masson, 1983.

[18] I.P. Popescu, *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1984.

[19] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

[20] I. Vladimirescu, *Matematici speciale*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1987.

[21] C. Năstăsescu şi colectivul, *Probleme de structuri algebrice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1988.

[22] C. Iacob, *Matematică aplicată în mecanică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[23] Gh. Murărescu, *Curs de algebră liniară şi geometrie analitică*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1991.

[24] C. Udrişte, *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[25] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Universitaria, Craiova, 1994.

[26] V. Brânzănescu, O. Stănăşilă, *Matematici speciale*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[27] I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară şi geometrie n-dimensională*, Editura Radical, Craiova, 1996.

[28] I. Pop, Gh. Neagu, *Algebră liniară şi geometrie analitică în plan şi în spaţiu*, Editura Plumb, Bacău, 1996.

[29] C. Radu, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura ALL, Bucureşti, 1998.

[30] Gh. Murărescu, *Curs de Geometrie Diferenţială*, Reprografia Universităţii din Craiova, 1998.

[31] O. Stănăşilă, *Analiză liniară şi geometrie*, Editura ALL, Bucureşti, 2000.

[32] T. Vladislav, I. Raşa, *Matematici financiare şi inginereşti*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2001.

[33] M. M. Stănescu, F. Munteanu, V. Slesar, *Caiet de Seminar pentru Algebră liniară, Geometrie analitică şi Geometrie diferenţială*, Reprografia Universităţii din Craiova, 2001.

[34] M. M. Stănescu, F. Munteanu, V. Slesar, *Culegere de probleme de Algebră liniară, Geometrie analitică şi Geometrie diferenţială*, Editura Universitaria, Craiova, 2002.

[35] Gh. Murărescu, M. Sterpu, *Teoria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor. Teorie şi aplicaţii*, Editura Universitaria, Craiova, 2003.

[36] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, Ecuaţii diferenţiale*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2003.

[37] C. Radu, *Geometrie diferenţială. Ecuaţii diferenţiale,* Editura Fair Partners, Bucureşti, 2004.