9. INTEGRALE MULTIPLE

9.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 9.3.1. Să se calculeze integralele următoare:

a) $\iint_D \frac{\sqrt{xy}}{x+1} dxdy$, unde D = [0, 3] x [0, 1]

b) $\iint_D \frac{dxdy}{(1+xy)^2}$, unde D = [0, 1] x [0, 1]

c) $\iint_D \frac{y}{1+xy} dxdy$, unde D = [0, 1] x [0, 1]

d) $\iint_D \frac{\cos y}{1+\sin x \sin y} dxdy$, unde D = $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e) $\iint_D \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(1+xy)} dxdy$, unde D = [1, 3] x [0, 1]

R. a) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; b) ln 2; c) 2 ln 2 – 1; d) $\frac{\pi^2}{8}$; e) 2 - $\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{9}$.

Exerciţiul 9.3.2. Să se calculeze $\iint_D f(x,y)dxdy$ în fiecare din cazurile următoare:

a) f(x, y) = $\frac{x^2}{y^2}$, D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$ | $1 \le x \le 2$, $\frac{1}{x} \le y \le x$}

b) f(x, y) = $\sqrt{1-x^2-y^2}$, D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$ |$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ }

c) f(x, y) = $y^2\sin x$, D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$ | $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1 + \cos x$}

d) f(x, y) = x + 2y, D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$ | $-3 \le y \le 3$, $y^2 - 4 \le x \le 5$}

e) f(x, y) = $y e^{x^2}$, D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$ | $0 \le y \le 1$, $y^2 \le x \le y^{2/3}$}

f) f(x, y) = $x^2\sin^2 y$, D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$ | $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le x \le 3\cos y$}

R. a) $\frac{9}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{4}{3}$; d) 50,4; e) $\frac{e-2}{4}$; f) $\frac{12}{5}$

Exerciţiul 9.3.3. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D (y^2-x^2)dxdy$, D : $\begin{cases} 1 \le x+y \le 5 \\ 0 \le y-x \le 3 \end{cases}$

b) $\iint_D (x+y)dxdy$, D fiind domeniul mărginit de dreptele x = y, x + y = 2, y = 0

c) $\iint_D \frac{1}{(x+y)^4} dxdy$, D fiind domeniul determinat de $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \\ x+y \le 4 \end{cases}$

d) $\iint_D xy dxdy$, D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ şi dreapta de ecuaţie $y = 2x + 3$

e) $\iint_D \frac{y}{1+y} dxdy$, D fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2 + 1$ şi dreptele $y = 2x$, $x = 0$.

f) $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ -x \le y \le x\}$

g) $\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge x^3,\ y \le x^2,\ x \ge 0\}$

h) $\iint_D \sqrt{1+y}\, dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x,\ xy \ge 1,\ 1 \le x \le 2\}$

R. a) 27; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{48}$; d) $53 + \frac{1}{3}$; e) $-\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\ln 3$; f) $\frac{3}{8}(\pi - 2)$; g) $\frac{2}{135}$; h) $1 - 2\ln\frac{3}{2}$.

Exerciţiul 9.3.4. Utilizând coordonatele polare sau o schimbare de variabilă convenabilă, să se calculeze:

a) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$

b) $\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

c) $\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

d) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

e) $\iint_D (x^2+y^2)^{3/2} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$

f) $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\}$

g) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\}$

h) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}}\, dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ y \le 0\}$

i) $\iint_D (x+y) dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$

j) $\iint_D x dxdy$, D este domeniul limitat de curba de ecuaţie

$$\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$$

k) $\iint_D (x+3) dxdy$, $D : (2x - y + 1)^2 + (x + 3y - 4)^2 = 49$

l) $\iint_D xydxdy$, unde D este limitat de axele de coordonate şi arcul de astroidă $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

m) $\iint_D \left(a^{2/3} - x^{2/3} - y^{2/3}\right)^{3/2} dxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2/3} + y^{2/3} \le a^{2/3}\}$

n) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, unde D este domeniul mărginit de
$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$;

o) $\iint_D xdxdy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 2,\ x > 0\}$

R. a) $\frac{16\pi}{3}$; b) $\pi(1 - \ln 2)$; c) $\frac{32\pi}{5}$; d) $\pi(e - 1)$; e) $\frac{484\pi}{5}$; f) 2π;
g) $\frac{1}{9}(32 - 3\pi)$; h) $2\sqrt{2}\frac{\pi}{3}$; i) 0; j) 0; k) 28π; l) $\frac{a^4}{80}$; m) $\frac{2\pi a^3}{35}$;
n) $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2} - 20}{9}\right) \cdot \frac{a^3}{2}$; o) $\frac{1}{3}\left(5\sqrt{2} - 6\right)$.

Exerciţiul 9.3.5. Să se calculeze aria domeniului plan D mărginit de curbele următoare:
a) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;
b) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$;
c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$;
d) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$;
e) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

R. a) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; b) $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$; c) $\frac{3\pi a^2}{8}$; d) $\frac{5\pi a^2}{8}$; e) $\frac{a^2 b^2}{2c^2}$.

Exerciţiul 9.3.6. Să se calculeze masa pentru fiecare din plăcile plane, de densitate de masă $\rho(x, y)$ dată:
a) D este limitat de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\rho(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$;
b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 2,\ y^2 \le x \le 4y^2\}$; $\rho(x, y) = \frac{x^2}{y^4}$.

R. a) $\frac{2}{3}a^2 b$; b) $\frac{5}{2}$.

Exerciţiul 9.3.7. Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane de densitate $\rho(x, y)$:
a) D este limitat de $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$; $\rho(x, y) = k$;
b) D este limitat de $y = \cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$; $\rho(x, y) = 1$.

R. a) $x_G = \frac{2}{5}$, $y_G = 0$; b) $x_G = 0$; $y_G = \frac{\pi}{8}$

Exercițiul 9.3.8. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate pentru placa plană omogenă, mărginită de dreptele x + y = 2, x = 2, y = 2
R.4

Exercițiul 9.3.9. Să se calculeze momentul de inerție al plăcii omogene limitată de cardioida r = a(1 + cosθ) , θ ∈ [0, 2π] în raport cu originea.

R. $\frac{35\pi a^4}{16}$

Exercițiul 9.3.10. Să se calculeze momentul de inerție față de origine al plăcii plane neomogene reprezentată prin domeniul:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

și având densitatea în fiecare punct, $\rho(x, y) = (b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)^{-\frac{1}{2}}$.

R. $\frac{\pi}{3}(a^2 + b^2)(2 - \sqrt{2})$.

Exercițiul 9.3.11. Să se calculeze următoarele integrale :

a) $\iiint\limits_{\Omega} (xyz + x)dxdydz$, unde Ω = [0, 1] x [0, 1] x [0, 1]

b) $\iiint\limits_{\Omega} x^3y^2zdxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$$

c) $\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)dxdydz$, unde Ω = [0, 1] x [0, 1] x [0, 2]

d) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{\sqrt{1+z^2}}dxdydz$, unde Ω = [0, 2] x [0, 1] x [0, 3]

R. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{1}{110}$; c) 4; d) $\sqrt{10}$ - 1

Exercițiul 9.3.12. Să se calculeze $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$, în următoarele situații:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2\}$

b) $f(x, y, z) = x^2$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1\}$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

d) $f(x, y, z) = \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

e) $f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x + y + z)^4}$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$
f) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$

R. a) $\dfrac{16\pi}{3}$; b) 32π; c) 16π; d) $\dfrac{1}{64}$; e) $\dfrac{1}{48}$; f) $\dfrac{\pi}{6}$

Exercițiul 9.3.13. Utilizând o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2x \le 0, y \ge 0, 0 \le z \le 1\}$$

b) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$

c) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le az, 0 \le z \le h\}$$

d) $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 2rz\}$

e) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le x\}$

f) $\iiint\limits_{\Omega} \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right]dxdydz$,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1\}$

g) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 - z^2)dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$

R. a) $\dfrac{3\pi}{4}$; b) πr^4; c) $\dfrac{\pi a h^3}{12}(3h + 2a)$; d) $\dfrac{59\pi r^5}{480}$; e) $\dfrac{\pi}{10}$;

f) $\dfrac{8\pi}{5} abc\left[a^2 + b^2 + c^2\right]$; g) $\dfrac{4\pi R^5}{15}$.

Exercițiul 9.3.14. Să se determine volumul părţii din cilindrul $x^2+y^2 = 2ax$ cuprinsă între paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$ şi planul xOy.

R. $\dfrac{3\pi a^3}{4}$

Exercițiul 9.3.15. Să se calculeze volumul corpului:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4az, x^2 + y^2 + az \le 4a^2\}$$

R. $\dfrac{37\pi a^3}{6}$

Exercițiul 9.3.16. Să se determine volumul corpului mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ şi $x^2 + y^2 = 2az$, $z \ge 0$.

R. $\pi a^3\left(2\sqrt{3} - \dfrac{5}{3}\right)$

Exercițiul 9.3.17. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

R. $\frac{\pi abc^2}{3h}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

Exerciţiul 9.3.18. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafeţele:
$x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $z=0$, $y=0$, $y=x$.

R. $\frac{21\pi\sqrt{2}}{8}$

Exerciţiul 9.3.19. Să se determine volumul corpului mărginit de:

a) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$;

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2$ şi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $z\geq 0$.

c) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a^2}$ şi planul $x=a$.

d) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$

e) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$

R. a) $\frac{\pi^2abc\sqrt{2}}{8}$; b) $\frac{4\pi abc}{3}(\sqrt{2}-1)$; c) πabc; d) $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$; e) $\frac{\pi a^3}{3}$

Exerciţiul 9.3.20. Să se calculeze masa corpului

$$\Omega=\left\{(x,y,z)>\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$$

ştiind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 2|z|$.
R. πabc^2

Exerciţiul 9.3.21. Să se determine masa sferei

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 3rz\}$$

ştiind că densitatea în fiecare punct este egală cu pătratul distanţei de la origine la acest punct.

R. $\frac{81}{5}\pi r^5$

Exerciţiul 9.3.22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului Ω, cu densitatea de masă $\rho(x, y, z)$, dacă:

a) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq\frac{z^2}{c^2},\ 0\leq z\leq c\}$, $\rho(x,y,z)=1$

b) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 2az,\ x^2+y^2+z^2\leq 3a^2\}$, $\rho(x,y,z)=1$

c) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+2z^2\leq 4x,\ x\leq 2\}$, $\rho(x,y,z)=1$

d) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 2rz\}$, $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

R. a) $x_G=y_G=0$; $z_G=\frac{3c}{4}$; b)) $x_G=y_G=0$; $z_G=\frac{5}{83}\left(6\sqrt{3}+5\right)a$;

c) $x_G = \frac{4}{3}$; $y_G = z_G = 0$; d)) $x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{243}{512}r$.

Exercițiul 9.3.23. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz a corpului material omogen, limitat de suprafeţele $x^2+y^2+z^2 =2$, $x^2 + y^2 = z^2$,
$z \geq 0$.

R. $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$

Exercițiul 9.3.24. Să se determine momentele de inerţie faţă de axe şi faţă de planele de coordonate, ale elipsoidului omogen $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2 \leq 1$.

R. $I_{xOy} = I_{xOz} = \frac{8}{15}\pi$, $I_{yOz} = \frac{32}{15}\pi$, $I_{Ox} = \frac{16}{15}\pi$, $I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{8}{3}\pi$