# 9. INTEGRALE MULTIPLE

## 9.1. Noţiuni teoretice fundamentale

### 9.1.1. Definiţia şi proprietăţile integralei duble

Definirea integralelor duble şi a funcţiilor integrabile de două variabile, se face prin generalizarea rezultatelor din 6. Intervalul compact
$[a, b] \subset \mathbb{R}$ este înlocuit cu un domeniu compact măsurabil Jordan din $\mathbb{R}^2$, deoarece acesta are proprietăţile de bază ale intervalelor compacte din $\mathbb{R}$.

Reamintim că o mulţime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*. Aderenţa unui domeniu se numeşte *domeniu închis*. Un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ se numeşte *domeniu compact*. Un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este imaginea unei curbe netede pe porţiuni, este *măsurabil Jordan (are arie)*.

În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

**Definiţia 9.1.1.1.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil. Se numeşte *diviziune* a domeniului D, o familie finită $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ de mulţimi cu următoarele proprietăţi:

a) fiecare mulţime $D_i$ este domeniu compact măsurabil;

b) $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$;

c) dacă $i \neq j$; atunci $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$. ($\overset{\circ}{D}_i$ reprezintă interiorul muţimii $D_i$)

Se numeşte *norma diviziunii* d, numărul:

$$\|d\| = \max \{d(D_i); i=1, 2, \ldots, n\}$$

unde $d(D_i)$ este diametrul mulţimii $D_i$.

Notăm cu $\mathscr{D}$ mulţimea tuturor diviziunilor domeniului D.

**Definiţia 9.1.1.2.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi
$f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, fie $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $m_i = \inf f(D_i)$ şi
$M_i = \sup f(D_i)$. Suma $s_f(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot a(D_i)$ se numeşte *suma inferioară Darboux* asociată funcţiei f şi diviziunii d, iar suma $S_f(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot a(D_i)$ se numeşte *suma superioară Darboux* (cu $a(D_i)$ s-a notat aria domeniului $D_i$). Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul D, numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d); d \in \mathscr{D}\}$$

iar numărul :

$$\overline{I} = \inf \{S_f(d); d \in \mathscr{D}\}$$

se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul D. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul D în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numeşte *integrala dublă a funcţiei f pe domeniul compact D în sensul lui Darboux.*

**Definiţia 9.1.1.3.** Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară; fie $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $\xi_i \in D_i$, arbitrar; mulţimea de puncte
$\xi = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \}$ se numeşte *sistem de puncte intermediare* . Suma

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot a(D_i)$$

se numeşte *suma Riemann* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii d şi sistemului $\xi$ de puncte intermediare. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul compact D în sensul lui Riemann*, dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathscr{D}$ cu $\|d\| < \eta$ şi pentru orice sistem $\xi$ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon$. Numărul real $I$, a cărui unicitate se dovedeşte imediat, se numeşte *integrala funcţiei f în sensul lui Riemann, pe domeniul compact D.*

**Observaţia 9.1.1.1.** În definiţia 9.1.1.3. nu este necesar să presupunem funcţia f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul D are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că *orice funcţie integrabilă Riemann* pe un asemenea domeniu *este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai funcţii mărginite.

**Teorema 9.1.1.1.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este integrabilă în sens Darboux pe D;
b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathscr{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathscr{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
d) f este integrabilă în sens Riemann pe D.

În acest caz $I = \underline{I} = \bar{I}$; de aceea, în cele ce urmează , ne vom referi la funcţii integrabile pe domeniul compact D şi la integrale duble, fără a mai preciza sensul şi vom nota:

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

Cea mai importantă consecinţă a teoremei precedente este integrabilitatea funcţiilor continue.

**Teorema 9.1.1.2.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Dacă mulţimea $D_1 \subset D$ a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de măsură Jordan nulă (de arie nulă) atunci f este integrabilă pe D.

La fel ca şi în cazul integralei simple, se demonstrează următoarele proprietăţi:

**Teorema 9.1.1.3.** *(Proprietatea de liniaritate)*

Dacă $f_1$ şi $f_2$ sunt funcţii integrabile pe domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ atunci funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iint_D (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x, y)dxdy = \lambda_1 \iint_D f_1(x, y)dxdy + \lambda_2 \iint_D f_2(x, y)dxdy$$

**Teorema 9.1.1.4.** *(Proprietatea de aditivitate faţă de domeniu)*

Dacă $D_1$, $D_2$ , $D_1 \cup D_2$ sunt domenii compacte măsurabile, atunci funcţia mărginită f este integrabilă pe $D_1 \cup D_2$ dacă şi numai dacă f este integrabilă pe $D_1$ şi pe $D_2$; dacă în plus, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy .$$

**Teorema 9.1.1.5.** *(Proprietatea de monotonie)*

Dacă $f_1$ şi $f_2$ sunt funcţii integrabile de domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ şi pentru orice $(x, y) \in D$, avem $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$ atunci:

$$\iint_D f_1(x, y)dxdy \le \iint_D f_2(x, y)dxdy$$

**Teorema 9.1.1.6.** Dacă funcţia f este integrabilă pe D, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe D şi are loc inegalitatea:

$$\left| \iint_D f(x, y)dxdy \right| \le \iint_D | f(x, y) | dxdy$$

**Teorema 9.1.1.7.** *(Formula de medie pentru integrala dublă)*

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil D şi m = inf f(D), M = sup f(D) atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot a(D).$$

Dacă f este continuă pe D, atunci există $(\xi, \tau) \in D$ încât

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi, \tau) \cdot a(D).$$

## 9.1.2. Calculul integralelor duble

**Teorema 9.1.2.1.** Fie D = [a, b] x [c, d] şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe D. Dacă pentru fiecare $x \in [a, b]$ există

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

atunci funcţia $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe [a, b] şi are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx,$$

care se mai scrie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y)dy \right] dx.$$

**Observaţia 9.1.2.1.** Schimbând in teoremă rolul variabilelor x şi y obţinem: dacă f este integrabilă pe D şi dacă pentru fiecare $y \in [c, d]$ există

$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, atunci:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy,$$

adică,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

În particular, dacă f este *continuă* pe D, atunci f este integrabilă pe D, există atât F(x) , $x \in [a, b]$, cât şi G(y), $z \in [c, d]$, prin urmare au loc ambele egalităţi, deci *ordinea de integrare nu contează*.

**Teorema 9.1.2.2.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil, simplu faţă de axa Oy:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x);\ x \in [a, b]\},$$

unde $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $C^1$ (orice paralelă la axa Oy intersectează frontiera lui D în cel mult două puncte). Dacă funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D şi pentru orice $x \in [a, b]$ funcţia $y \to f(x, y)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ atunci funcţia $\tilde{F} : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ este integrabilă pe [a, b] şi are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \tilde{F}(x)dx, \text{ adică}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx .$$

**Observaţia 9.1.2.2.** Dacă domeniul compact măsurabil D este simplu faţă de Ox, se stabileşte un rezultat asemănător, schimbând rolul variabilelor x şi y. Dacă D nu este în nici una din aceste situaţii, se descompune prin paralele la axele de coordonate, într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune şi care să fie în una din situaţiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate faţă de domeniu.

**Teorema 9.1.2.3.** *(Teorema schimbării variabilelor în integrala dublă)*

Fie D, $D^* \subset \mathbb{R}^2$ domenii compacte măsurabile şi $T:D^* \to D$ o transformare punctuală (u, v) $\xrightarrow{T}$ (x, y) cu jacobianul neutru în $\overset{\circ}{D^*}$ şi astfel încât $T(D^*) = D$. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv .$$

**Observaţia 9.1.2.3.** Pentru aplicaţii, găsirea transformării T este esenţială; nu există o metodă generală pentru rezolvarea acestei probleme ci, de la caz la caz, se alege transformarea T în funcţie de forma ecuaţiilor care definesc frontiera domeniului D. Alegerea este bună, dacă noul domeniu $D^*$ este mai simplu, adică dacă integrala dublă pe $D^*$, obţinută după aplicarea formulei, se descompune mai uşor în integrale simple.

## 9.1.3. Aplicaţii ale integralelor duble

### 9.1.3.1. Calculul ariilor

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact, a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de curbe netede, atunci *aria lui D* este:

$$a(D) = \iint_D dxdy$$

### 9.1.3.2. Calculul maselor şi al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ reprezintă o placă materială (de grosime neglijabilă), iar funcţia continuă $\rho : D \to \mathbb{R}^+$ reprezintă densitatea plăcii, atunci *masa plăcii* este dată de:

$$\text{masa}(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy ,$$

iar *coordonatele centrului de greutate* al plăcii sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{masa(D)} \cdot \iint_D x\rho(x,y)dxdy , \quad y_G = \frac{1}{masa(D)} \cdot \iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

### 9.1.3.3. Momente de inerţie

*Momentul de inerţie* al plăcii reprezentată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ *faţă de originea axelor de coordonate* este dat de:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy ,$$

iar *momentele de inerţie faţă de axele de coordinate* sunt:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy \text{ , } I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

## 9.1.4. Definiţia şi proprietăţile integralei triple

Integrala triplă se defineşte la fel ca integrala dublă, domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ fiind înlocuit cu un domeniu compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Reamintim că un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ a cărui frontieră este imaginea unei suprafeţe netede pe porţiuni este măsurabil Jordan (are volum). În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

**Definiţia 9.1.4.1.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil. Se numeşte *diviziune* a domeniului $\Omega$, o familie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ de mulţimi cu următoarele proprietăţi:

a) fiecare mulţime $\Omega_i$ este domeniu compact măsurabil;

b) $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega$;

c) dacă $i \neq j$, atunci $\overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \emptyset$ ($\overset{\circ}{\Omega}_i$ reprezintă interiorul mulţimii $\Omega_i$).

Se numeşte *norma diviziunii* d, numărul :

$$\|d\| = \max \{d(\Omega_i);\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

unde $d(\Omega_i)$ reprezintă diametrul mulţimii $\Omega_i$ .

Notăm cu $\mathscr{D}$ mulţimea tuturor diviziunilor domeniului $\Omega$.

**Definiţia 9.1.4.2.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului $\Omega$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fie $m_i = \inf f(\Omega_i)$ şi

$M_i = \sup f(\Omega_i)$ Suma $s_f(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v(\Omega_i)$ se numeşte *suma inferioară Darboux* asociată funcţiei f şi diviziunii d, iar suma

$S_f(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot v(\Omega_i)$ se numeşte *suma superioară Darboux* (cu $v(\Omega_i)$ s-a notat volumul domeniului $\Omega_i$).

Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul $\Omega$, numărul :

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d);\ d \in \mathscr{D}\}$$

iar numărul

$$\overline{I} = \inf \{S_f(d);\ d \in \mathscr{D}\}$$

se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul $\Omega$. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul* $\Omega$ *în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numeşte *integrala triplă a funcţiei f pe domeniul compact* $\Omega$ *în sensul lui Darboux.*

**Definiţia 9.1.4.3.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului $\Omega$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $\xi_i \in \Omega_i$ arbitrar; mulţimea de puncte

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se numeşte *sistem de puncte intermediare*. Suma:

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot v(\Omega_i)$$

se numeşte *suma Riemann* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii d şi sistemului $\xi$ de puncte intermediare. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul compact* $\Omega$ *în sensul lui Riemann*, dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathscr{D}$ cu $\|d\| < \eta$ şi pentru orice sistem $\xi$ de puncte intermediare, să avem:

$$|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I, a cărei unicitate se dovedeşte imediat, se numeşte *integrala funcţiei f în sensul lui Riemann pe domeniul compact* $\Omega$.

**Observaţia 9.1.4.1.** În definiţia 9.1.4.3. nu este necesar să presupunem funcţia f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul $\Omega$ are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că orice *funcţie integrabilă Riemann* pe un asemenea domeniu *este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai funcţii mărginite.

**Teorema 9.1.4.1.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este integrabilă în sens Darboux pe $\Omega$;
b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathcal{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
d) f este integrabilă în sens Riemann pe $\Omega$.

În caz de integrabilitate, $I = \underline{I} = \bar{I}$ ; de aceea, în cele ce urmează, ne vom referi la funcţii integrabile pe domeniul compact $\Omega$ şi la integralele triple, fără a mai preciza sensul şi vom nota :

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz .$$

Cea mai importantă consecinţă a teoremei precedente este integrabilitatea funcţiilor continue.

**Teorema 9.1.4.2.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Dacă mulţimea $\Omega_1 \subset \Omega$ a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de măsură Jordan nulă (de volum nul), atunci f este integrabilă pe $\Omega$.

Proprietăţile integralelor duble se reformulează pentru integralele triple. De exemplu:

**Teorema 9.1.4.3.** *(Formula de medie pentru integrala triplă)*

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil $\Omega$ şi $m = \inf f(\Omega)$, $M = \sup f(\Omega)$, atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \mu \cdot v(\Omega).$$

Dacă f este continuă pe $\Omega$, atunci există $(\xi, \tau, \zeta) \subset \Omega$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi, \tau, \zeta) \cdot v(\Omega).$$

## 9.1.5. Calculul integralelor triple

**Teorema 9.1.5.1.** Fie $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe $\Omega$. Fie $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Dacă pentru fiecare $(x, y) \in D$ există:

$$F(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz ,$$

atunci funcţia $F: D \to \mathbb{R}$ astfel definită este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} F(x,y)dxdy$$

care se mai scrie:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} \left[ \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz \right] dxdy .$$

**Observaţia 9.1.5.1.** Schimbând în teoremă rolul variabilelor, se pot obţine încă două formule analoage prin care calculul integralei triple pe un paralelipiped se reduce la calculul unei integrale duble şi al uneia simple.

**Teorema 9.1.5..2.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil, simplu faţă de axa Oz: $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y); (x, y) \in D\}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ fiind domeniu compact măsurabil, $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $C^1$ pe D (orice paralelă la axa Oz intersectează frontiera lui Ω în cel mult două puncte). Dacă funcţia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe Ω şi pentru orice
$(x, y) \in D$ funcţia $z \to f(x, y, z)$ este integrabilă pe intervalul
$[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, atunci funcţia $\widetilde{F} : D \to \mathbb{R}$,
$\widetilde{F}(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D} \widetilde{F}(x, y)dxdy$$

adică : $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D} \left[ \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$

**Observaţia 9.1.5.2.** Dacă domeniul compact măsurabil Ω este simplu faţă de Ox sau Oy, se stabilesc două formule asemănătoare, schimbând rolul variabilelor. Dacă Ω nu este în nici una din aceste situaţii, se descompune într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune şi care să fie în una din situaţiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate faţă de domeniu.

**Teorema 9.1.5.3.** *(Teorema schimbării variabilelor în integrala triplă)*
Fie $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ domenii compacte măsurabile şi $T: \Omega^* \to \Omega$ o transformare punctuală $(u, v, w) \xrightarrow{T} (x, y, z)$ cu jacobianul nenul în interiorul domeniului $\Omega^*$ şi astfel încât $T(\Omega^*) = \Omega$. Fie $f: \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = = \iiint_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw$$

**Observaţia 9.1.5.3.** Transformarea T se alege în funcţie de forma ecuaţiilor suprafeţelor care constituie frontiera domeniului Ω. Alegerea este bună dacă noul domeniu $\Omega^*$ este mai simplu, adică dacă integrala triplă pe $\Omega^*$, obţinută după aplicarea formulei, se descompune mai uşor într-o integrală dublă şi una simplă.

## 9.1.6. Aplicaţii ale integralelor triple

### 9.1.6.1. Calculul volumelor

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu compact a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de suprafeţe netede, atunci volumul lui Ω este dat de

$$v(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz .$$

### 9.1.6.2. Calculul maselor şi al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ reprezintă un corp material, iar funcţia continuă $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ reprezintă densitatea corpului, atunci masa acestui corp este dată de:

$$\text{masa}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dxdydz ,$$

iar coordonatele centrului său de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz \ ,$$

$$y_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz \ ,$$

$$z_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz \ .$$

**9.1.6.3. Momente de inerţie**

Momentele de inerţie ale unui corp material reprezentat prin domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de densitate $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ sunt:

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oxy} = \iiint_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oyz} = \iiint_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oxz} = \iiint_{\Omega} y^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Ox} = \iiint_{\Omega} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oy} = \iiint_{\Omega} (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \quad I_{Oz} = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$