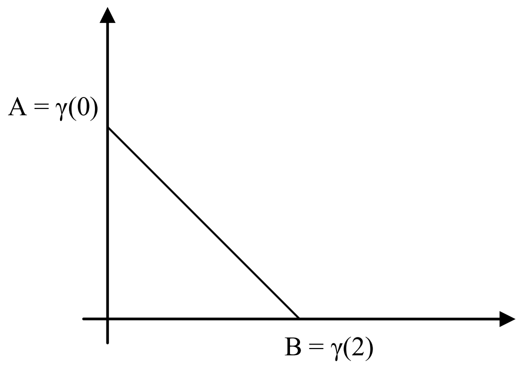
8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 8.2.1. Să se calculeze $\int_\gamma xydl$, unde γ este dată de x = t, y = 2 – t, t $\in$ [0, 2]

Soluţie.

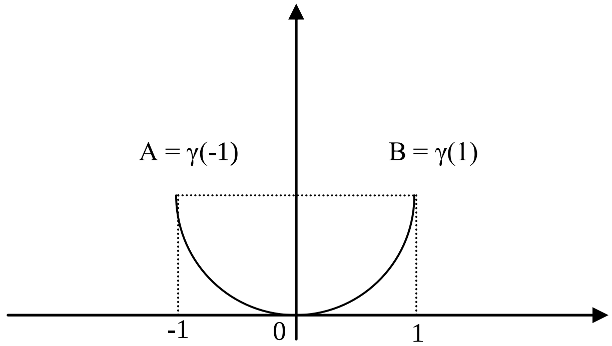


$$\int_\gamma xy\,dl = \int_0^2 t(2-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^2 (2^t - t^2)dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \sqrt{2}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Exerciţiul 8.2.2. Să se calculeze $\int_\gamma xydl$ unde γ este dată de y = x^2, x $\in$ [-1,1].

Soluţie.



Ecuaţiile parametrice ale lui γ sunt $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, t \in [-1,1] \end{cases}$.

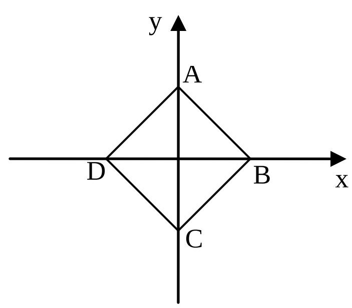
Deci $\int\limits_{\gamma} xydl \; = \int\limits_{-1}^{1} t^3\sqrt{1^2+(2t)^2}\,dt = 0$ (deoarece se integrează o funcţie impară pe un interval simetric fată de 0)

Exerciţiul 8.2.3. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} xydl$ unde γ : |x| + |y| = a, a>0

Soluţie. Imaginea drumului γ este prezentată în figura următoare. Se observă că ea este reuniunea imaginii a patru drumuri:

AB: $\begin{cases} x = t \\ y = a - t, t \in [0, a] \end{cases}$ CB: $\begin{cases} x = t \\ y = t - a, t \in [0, a] \end{cases}$

DC: $\begin{cases} x = t \\ y = -t - a, t \in [-a, 0] \end{cases}$ DA: $\begin{cases} x = t \\ y = a + t, t \in [-a, 0] \end{cases}$



Rezultă $\int\limits_{\gamma} xydl \; = \int\limits_{AB} xydl \; + \int\limits_{BC} xydl \; + \int\limits_{CD} xydl \; + \int\limits_{DA} xydl \; =$

$$= \int\limits_{0}^{a} t(a-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int\limits_{0}^{a} t(a-t)\sqrt{1^2+1^2}\,dt \; -$$

$$- \int\limits_{-a}^{0} t(-t-a)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int\limits_{-a}^{c} t(a+t)\sqrt{1^2+1^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left[\int\limits_{0}^{a} t(a-t)dt + \int\limits_{0}^{a} t(a-t)dt + \int\limits_{-a}^{0} t(a+t)dt + \int\limits_{-a}^{0} t(a+t)dt\right] = 0$$

Exerciţiul 8.2.4. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} (x+y)dl$ unde γ este bucla lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ aflată în cadranele I şi IV.

Soluţie. Înlocuim x şi y în ecuaţia implicită prin x = rcosθ, y = rsinθ . Rezultă $r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2r^2$ cos2θ, adică $r^2 = a^2\cos 2\theta$. Din condiţia cos2θ ≥ 0 rezultă $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (ţinând cont şi de faptul că interesează bucla din cadranele I şi IV)

Rezultă şi $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, deci ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos\theta \\ y = a\sqrt{\sin 2\theta} \cdot \sin\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Atunci $\int\limits_{\gamma} (x+y)dl = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos\theta + a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin\theta) \cdot$

$\cdot \sqrt{\left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos\theta\right)'\right]^2 + \left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin\theta\right)'\right]^2} d\theta =$

$$= \text{a}^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}) \cdot \sqrt{\left[\sqrt{\cos 2\theta}\right]^2 + \left[\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right]^2} d\theta =$$

$= \text{a}^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}) \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} d\theta =$

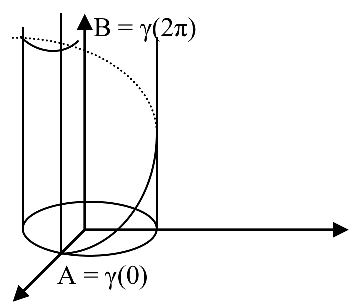
$= \text{a}^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin\theta + \cos\theta) d\theta = \text{a}^2 (\sin\theta - \cos\theta)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2\sqrt{2}$.

Exercițiul 8.2.5. Să se calculeze I = $\int\limits_{\gamma} (x+y+z)dl$, unde γ este dată de x = cos t, y = sin t, z = t, t∈ [0, 2π].

Soluție.

$$\int\limits_{\gamma} (x+y+z)dl = \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \cdot \sqrt{[(\cos t)']^2 + \left[(\sin t)'\right]^2 + [t']^2} dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t + \sin t + t)\sqrt{2} dt = \sqrt{2}\left(\sin t - \cos t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{2}$$



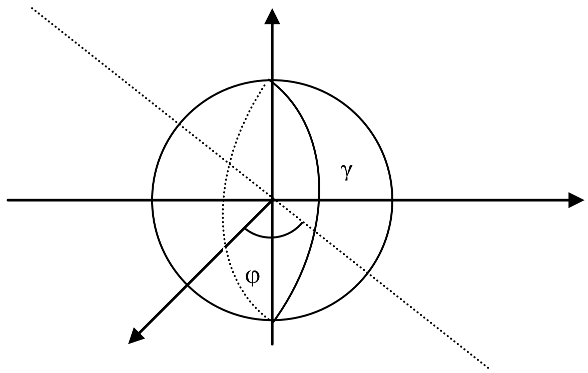
Imaginea curbei γ este reprezentată în figură.

Exercițiul 8.2.6. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, unde γ este circumferința cercului de ecuație

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}.$$

Soluţie. Cercul γ este intersecţia sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul de ecuaţie x = y.

$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt obţinute cu ajutorul ecuaţiilor parametrice ale sferei: $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta, \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ ţinând cont că din condiţia x = y rezultă $\varphi = \frac{\pi}{4}$ sau $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Rezultă γ : $\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = a\cos\theta, \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ y = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = a\cos\theta, \theta \in [0,\pi] \end{cases}$.

Deci $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta$, $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta$, $z = a\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

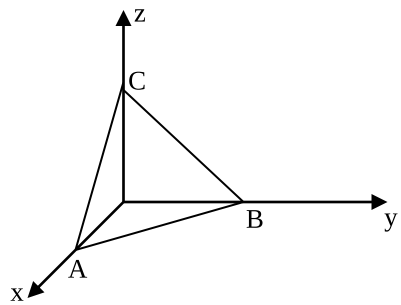
Rezultă $\int_\gamma \sqrt{2y^2 + z^2}\,dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)^2 + (a\cos\theta)^2} \cdot$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2 + (-a\sin\theta)^2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2}\,d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a^2$$

Exerciţiul 8.2.7. Să se calculeze $\int_\gamma (x + y + z)dl$ unde γ este triunghiul cu vârfurile în A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).

Soluţie. Se observă că γ este reuniunea a trei drumuri:



AB: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0, t \in [0,1] \end{cases}$ BC: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = t, t \in [0,1] \end{cases}$

CA: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t, t \in [0,1] \end{cases}$

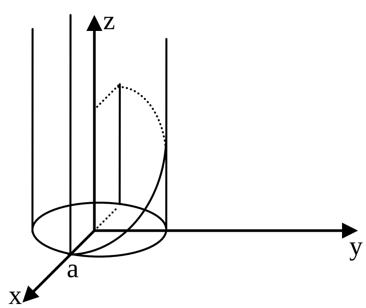
Rezultă $\int_\gamma (x + y + z)dl = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\,dt +$

$+ \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}\,dt + \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}\,dt$

$= 3\int_0^1 \sqrt{2}dt = 3\sqrt{2}$.

Exerciţiul 8.2.8. Să se calculeze lungimea curbei γ definită prin reprezentarea parametrică: x = a cost, y = a sint, y = bt, t∈[0, 2π],a > 0,b> 0

Soluţie. Curba este o elice circulară a cărei imagine este prezentată în figura alăturată.



Lungimea sa este:

$$l_\gamma = \int_0^\pi \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

Exercițiul 8.2.9. Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate al firului material care este imaginea curbei γ : $x = 4t^5$; $y = \sqrt{15}\, t^4$; $z = 2t^3$, $t \in [-1, 1]$ dacă densitatea în punctul (x, y, z) este $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}|z|$.

Soluție.

$$m = \int_\gamma \frac{1}{2}|z|\, dl = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}|2t^3|\sqrt{(20t^4)^2 + (4\sqrt{15}t^3)^2 + (6t^2)^2}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\cdot 2|t^3|\, t^2(20t^2+6)dt = 2\int_0^1 t^5(20t^2+6)dt = \left(\frac{40t^8}{8} + \frac{12t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 5 + 2 = 7$$

Coordonatele centrului de greutate sunt :

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\, dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1} 4t^5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_\gamma y\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\, dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1} \sqrt{15}t^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = \frac{68\sqrt{15}}{105}$$

$$z_G = \frac{\int_\gamma z\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\, dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1} 2t^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = 0$$

Exercițiul 8.2.10. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa Oz a primei spirale a elicei x = a cost, y = a sint, z = bt, având densitatea constantă ρ.

Soluție. $I_z = \int_\gamma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dl = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\cdot$

$$\cdot\rho\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi a^2\cdot\rho\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Exercițiul 8.2.11. Să se determine atracția exercitată de arcul de astroidă
$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ situat în primul cadran, asupra unității de măsură situată în originea coordonatelor, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu cubul distanței de la punct la originea coordonatelor.

Soluție.

$$F_x = k\cdot 1\cdot\int_\gamma \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}dl =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} a\cos^3 t\sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos^4 t\, dt = -k3a\frac{\cos^5 t}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3ak}{5}\ .$$