8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

8.1.1. Drumuri şi curbe în $\mathbb{R}^p$

Definiţia 8.1.1.1. Se numeşte *drum* în $\mathbb{R}^p$ orice funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_p\ [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt componentele lui γ, atunci egalităţile

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \quad . \\ \quad . \\ x_p = f_p(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$$ se numesc *ecuaţiile parametrice* ale drumului γ.

Imaginea drumului γ se notează (γ) şi este :

$$(\gamma) = \{(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_p(t)), t \in [a, b]\}.$$

Ea este o submulţime a lui $\mathbb{R}^p$

Punctele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc *capetele drumului* γ.

Drumul $\gamma^*: [a, b] \to \mathbb{R}^p$ definit prin $\gamma^*(t) = \gamma(a + b - t)$ se numeşte *opului lui* γ.

Observaţia 8.1.1.1. Evident $\gamma(a) = \gamma^*(b)$, $\gamma(b) = \gamma^*(a)$ şi $(\gamma) = (\gamma^*)$

Definiţia 8.1.1.2. Dacă $\gamma_1 :[a, b] \to \mathbb{R}^p$, $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^p$ sunt două drumuri şi $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, atunci drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{R}^p$ definit prin:

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), t \in [b, c] \end{cases}$$

se numeşte *juxtapunerea drumurilor* γ_1 şi γ_2.

Observaţia 8.1.1.2. Imaginea drumului $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumului γ_1 şi γ_2.

Definiţia 8.1.1.3. Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *neted* dacă funcţia γ este de clasă C^1 pe $[a, b]$ şi $\gamma'(t) \neq O_{\mathbb{R}^p}$ pentru orice $t \in [a, b]$. Drumul γ se numeşte *neted pe porţiuni* dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

Definiţia 8.1.1.4. Două drumuri netede $\gamma_1 :[a, b] \to \mathbb{R}^p$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^p$ se numesc *echivalente, cu aceeaşi orientare*, dacă există $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ astfel încât:

1. h este de clasă C^1 pe $[a, b]$
2. h este bijectivă;
3. h este strict crescătoare ;
4. $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Observaţia 8.1.1.3. a) Orice două drumuri echivalente au aceeaşi imagine, dar reciproca afirmaţiei nu este adevărată, adică există drumuri având aceeaşi imagine şi care nu sunt echivalente (de exemplu $\gamma_1 :[0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, t)$ şi $\gamma_2 :[-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t^2, t^2)$).

b) Faptul că h este strict crescătoare corespunde intuitiv faptului că imaginile lor sunt parcurse în acelaşi sens, ceea ce explică folosirea cuvintelor "cu aceeaşi orientare" în definiţia precedentă. Dacă h este strict descrescătoare, atunci γ_1 este echivalent cu γ_2^*.

c) Relaţia binară obţinută pe mulţimea drumurilor netede prin definiţia 8.1.1.4. este o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 8.1.1.5. Se numeşte *curbă* în $\mathbb{R}^p$ o clasă de drumuri echivalente din $\mathbb{R}^p$. *Imaginea* curbei este imaginea oricărui drum conţinut în curbă.

Observaţia 8.1.1.4. Deseori se foloseşte noţiunea de curbă în sensul de imagine a sa, care este o submulţime din $\mathbb{R}^p$, ceea ce explică următoarele afirmaţii privind:

a) *Curbe în* $\mathbb{R}^2$.

- Dacă $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^2$ este un drum neted în $\mathbb{R}^2$, cu componentele f, g :[a, b] $\to \mathbb{R}$, se spune că egalităţile $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile parametrice ale curbei* din care face parte drumul γ
- Dacă $\gamma :[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, atunci se spune că $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$ este *ecuaţia explicită* a curbei din care face parte drumul γ.
- Dacă $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^2$ şi ecuaţia F(x, y) = 0 defineşte (local) implicit pe y ca funcţie de x, se spune că F(x, y) = 0 este *ecuaţia implicită* a unei curbe în $\mathbb{R}^2$.

b) *Curbe în* $\mathbb{R}^3$.

- Dacă $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^3$ este un drum neted în $\mathbb{R}^3$, cu componentele f, g, h:[a, b] $\to \mathbb{R}$, se spune că egalităţile $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), t \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile parametrice ale curbei* din care face parte drumul γ.
- Dacă $\gamma :[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t), \psi(t))$, atunci se spune că $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x), x \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile explicite* ale curbei din care face parte drumul γ.
- Dacă $F, G : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^3$ şi sistemul F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) =0 defineşte (local) implicit pe y şi z ca funcţii de x, se spune că $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ sunt *ecuaţiile implicite* ale unei curbe în $\mathbb{R}^3$.

8.1.2. Drumuri rectificabile. Lungimea unui drum.

Fie $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum în $\mathbb{R}^3$ şi Δ o diviziune a intervalului [a, b] determinată de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Punctele $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0,n}$ determină o linie poligonală ale cărei vârfuri aparţin imaginii lui γ.

Lungimea acestei linii poligonale este:

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2 + [h(t_i) - h(t_{i-1})]^2}$$

şi creşte dacă diviziunea Δ este înlocuită cu o diviziune mai fină.

Definiţia 8.1.2.1. Drumul γ se numeşte *rectificabil* dacă mulţimea $\{l_\Delta, \Delta$ este o diviziune a lui $[a, b]\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulţimi se numeşte lungimea drumului γ şi se notează l_γ .

Teorema 8.1.2.1. Dacă $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum neted, atunci γ este rectificabil şi

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

Pentru calculul lungimii unui drum neted se pot folosi şi următoarele formule:

- Dacă γ este dat de ecuaţiile explicite y = φ(x), z = ψ(x), x ∈ [a, b], atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\,dx$
- Dacă γ :[a, b] → $\mathbb{R}^2$, γ(t) = (f(t), g(t)) este un drum neted, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$
- Dacă γ este un drum neted dat prin ecuaţia explicită y = f(x), x ∈ [a, b], atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Teorema 8.1.2.2. Un drum echivalent cu un drum rectificabil γ este rectificabil şi are aceeaşi lungime cu γ.

Observaţia 8.1.2.1. Din teorema anterioară rezultă că toate drumurile ce aparţin unei curbe netede au aceeaşi lungime, care va fi numită *lungimea curbei*.

8.1.3. Integrala curbilinie de primul tip

Fie γ :[a, b] → $\mathbb{R}^3$ un drum neted şi F : (γ) → $\mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Pentru o diviziune d a intervalului [a, b] determinată de
$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ se notează cu l_i lungimea arcului de extremităţi $\gamma(t_{i-1})$ şi $\gamma(t_i)$, iar $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ este un sistem de puncte intermediare.

Funcţiei F, diviziunii d şi sistemului θ de puncte intermediare
i se asociază suma:

$$\sigma(F, d, \theta) = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(\theta_i)) \cdot l_i$$

Definiţia 8.1.3.1. Funcţia F se numeşte *integrabilă în raport cu arcul* pe drumul γ dacă există I ∈ $\mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice ε > 0 există δ > 0 astfel ca, pentru orice diviziune d a lui [a, b] cu ‖ d ‖ < δ şi orice sistem de puncte intermediare θ să avem:

$$|\,\sigma(F, d, \theta) - I\,| < \varepsilon.$$

Numărul real I se numeşte *integrala curbilinie în raport cu arcul* sau *integrala curbilinie de primul tip* a funcţiei F pe drumul γ şi se notează:

$$I = \int_\gamma F(x, y, z)\,dl$$

Observaţia 8.1.3.1. a) Dacă F(x, y, z) = 1, pentru orice (x, y, z) ∈ (γ), rezultă imediat că numărul I este tocmai l_γ a arcului (γ). Deci $l_\gamma = \int_\gamma dl$.

b) Se poate demonstra că dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri echivalente şi F este integrabilă în raport cu arcul pe γ_1, atunci ea este integrabilă şi pe γ_2 şi cele două integrale coincid. De aici rezultă că, dacă F este integrabilă în raport cu arcul pe un drum γ, atunci ea este integrabilă pe orice drum din curba din care face parte γ şi valoarea integralei este aceeaşi. Aceasta justifică denumirea de integrală curbilinie (sau integrală pe curba din care face parte γ).

Teorema 8.1.3.1. Fie γ :[a, b] → $\mathbb{R}^3$ un drum neted de ecuaţii x =f(t), y = g(t), z = h(t), t $\in$ [a, b] şi F o funcţie continuă pe un domeniu ce conţine imaginea lui γ. Atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe drumul γ şi

$$\int_{\gamma} F(x,y,z)dl = \int_a^b F(f(t),g(t),h(t))\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}\,dt$$

Observaţia 8.1.3.2. Dacă γ :[a, b] → $\mathbb{R}^2$ este un drum neted de ecuaţii x = f(t), y = g(t), t $\in$ [a, b] şi F : (γ) → $\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe γ şi

$$\int_{\gamma} F(x,y)dl = \int_a^b F(f(t),g(t))\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

Teorema 8.1.3.2. *(Proprietăţi ale integralei curbilinii de primul tip)*

Fie γ :[a, b] → $\mathbb{R}^3$ un drum neted, F, G : (γ) → $\mathbb{R}$ continue.

Atunci:

$$\int_{\gamma} (\alpha F(x,y,z)+\beta G(x,y,z))dl = \alpha\int_{\gamma} F(x,y,z)dl + \beta\int_{\gamma} G(x,y,z)dl \text{ (liniaritate)}$$

- Dacă F(γ(t)) ≥ 0 pentru orice t $\in$ [a, b], atunci
  $$\int_{\gamma} F(x,y,z)dl \geq 0 \qquad \text{(monotonie)}$$
- $$\left|\int_{\gamma} F(x,y,z)dl\right| \leq \int_{\gamma} |F(x,y,z)|dl \qquad \text{(estimarea modulului integralei)}$$
- Există $t^* \in$ [a, b] astfel încât $\int_{\gamma} F(x,y,z)dl = F(\gamma(t^*)) \cdot l_\gamma$, unde l_γ este lungimea drumului γ (formula de medie)
- $$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} F(x,y,z)dl = \int_{\gamma_1} F(x,y,z)dl + \int_{\gamma_2} F(x,y,z)dl \qquad \text{(aditivitate faţă de drum)}$$
- $$\int_{\gamma} F(x,y,z)dl = \int_{\gamma^*} F(x,y,z)dl \qquad \text{(independenţa de orientare)}$$

8.1.4. Aplicaţii ale integralei curbillinii de primul tip

8.1.4.1. Lungimea unei curbe

Curba reprezentată de drumul neted γ de ecuaţii x = f(t), y = g(t),
z = h(t), t $\in$ [a, b] are lungimea $l_\gamma = \int_{\gamma} dl$.

8.1.4.2. Masa unui fir material

Dacă imaginea (γ) a drumului neted γ modelează un fir material, iar ρ : (γ) → $\mathbb{R}$ este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct
(x, y, z) $\in$ (γ) densitatea ρ(x, y, z) a firului în acel punct, atunci masa firului este m = $\int_{\gamma} \rho(x,y,z)dl$

8.1.4.3. Centrul de greutate al unui fir material

Coordonatele centrului de greutate al firului (γ) a cărui densitate în punctul (x, y, z) este ρ(x, y, z) sunt date de egalităţile:

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\rho(x,y,z)dl}{\int_\gamma \rho(x,y,z)dl}\ ;\ y_G = \frac{\int_\gamma y\rho(x,y,z)dl}{\int_\gamma \rho(x,y,z)dl}\ ;\ z_G = \frac{\int_\gamma z\rho(x,y,z)dl}{\int_\gamma \rho(x,y,z)dl}$$

8.1.4.4. Momentele de inerţie ale unui fir material

Momentele de inerţie ale firului material (γ), având densitatea ρ(x, y, z) în punctul (x, y, z), în raport cu axele Ox, Oy, Oz sunt:

$$I_x = \int_\gamma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dl\ ;$$

$$I_y = \int_\gamma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dl\ ;$$

$$I_z = \int_\gamma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dl$$

8.1.4.5. Atracţia exercitată asupra unui punct material de către un fir material

Punctul material $M(x_0, y_0, z_0)$ având masa m_0, este atras de firul material (γ), cu densitatea ρ(x, y, z) în punctul (x, y, z), cu o forţă ale cărei componente sunt:

$$F_x = km_0 \int_\gamma \frac{(x-x_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}dl\ ;$$

$$F_y = km_0 \int_\gamma \frac{(y-y_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}dl\ ;$$

$$F_z = km_0 \int_\gamma \frac{(z-z_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}dl\ .$$

Aici k este o constantă ce depinde de alegerea unităţilor de măsură.