6. INTEGRALA SIMPLĂ. INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 6.3.1. Să se calculeze :

a) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin(x+|x|)dx$ b) $\int_{-2}^{2} (|x|-|3x-1|)dx$

c) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}dx$ d) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$

e) $\int_{1}^{5} \sqrt[3]{x-|x-3|}dx$ f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$

g) $\int_{0}^{3} \max(x, x^2)dx$ h) $\int_{0}^{\pi/2} \min(\sin x, \cos x)dx$

R. a) 1 ; b) $-\frac{25}{3}$; c) $\sqrt{x}=t, \sqrt{1+t}=t+u$;d) tg x = t; $\frac{1}{4}\ln 3$
e) $\frac{25}{8}\sqrt[3]{3}-\frac{3}{8}$; f) cos x = t; $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; g) $\frac{55}{6}$; h) $2\sqrt{2}$

Exerciţiul 6.3.2. Fie $I_n = \int_{0}^{1} x^n\sqrt{1-x}dx$, $n\in\mathbb{N}$. Să se stabilească o relaţie de recurenţă şi să se calculeze I_3.

R. $I_n = \frac{2n}{2n+3}\cdot I_{n-1}$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$; $I_3 = \frac{32}{315}$.

Exerciţiul 6.3.3. Să se calculeze :

a) $\int_{1}^{2} \sqrt{(x-1)(x-2)}dx$ b) $\int_{0}^{2\pi} x|\cos x|\,dx$

c) $\int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ d) $\int_{0}^{\pi/4} \ln(1+tgx)dx$

e) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x+x-1}{e^x+\sin x+\cos x+2x}dx$ f) $I = \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

R. a) $\frac{\pi}{8}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi\ln 2}{8}$; e) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi/2}+1+\pi}{2}$;
f) x = π – t, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Exerciţiul 6.3.4. Să se calculeze :

a) I = $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$ b) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx$ d) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

e) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ f) $\int_0^a \sqrt{ax-x^2}\, dx$

R. a) Indicaţie. Se face schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi se obţine I = $\frac{\pi}{4}$; b) x = tg t; $\frac{\pi}{8}\ln 2$; c) $e^{\frac{\pi}{2}}$; d) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; e) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; f) $\frac{\pi a^2}{8}$.

Exerciţiul 6.3.5. Să se calculeze cu trei zecimale exacte integralele următoare:

a) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$

R. a) 1,605… ; b) 0,927…

Exeerciţiul 6.3.6. Să se determine aria domeniului mărginit de :

a) f(x) = $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, axa Ox, x = 1 şi x =2

b) f(x) = $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, axa Ox, x = 0 şi x = 2

c) f(x) = $\frac{\cos x}{1+\cos x}$, axa Ox, x = 0 şi x = $\frac{3\pi}{4}$.

R. a) $\ln(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}$; b) $\ln\frac{16}{9}$; c) – 2 + tg $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$

Exerciţiul 6.3.7. Să se determine aria domeniului mărginit de graficele funcţiilor f : (0, ∞) → R , f(x) = ln x şi g: (0, ∞) → R , g(x) = $\ln^2$x.

R. 3 – e

Exerciţiul 6.3.8. Să se determine volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei f : [1, e]→ R f(x) = x lnx .

R. $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$

Exerciţiul 6.3.9. Să se determine lungimea graficului pentru următoarele funcţii :

a) f : [0, 4] → R , f(x) = $x^{3/2}$

b) f : $\left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right]$→ R , f(x) = ln x

R. a) $\frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$; b) 1 + $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Exerciţiul 6.3.10. Să se arate că funcţiile următoare sunt continue pe domeniile indicate:

a) F(x) = $\int_0^{\pi} \ln(1+x\cos t)dt$, x $\in$ (-1, 1);

b) F(x) = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1+x\cos t)dt$; x $\in$ (-1, 1);

c) F(x) = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} \cdot \ln\frac{1+x\sin t}{1-x\sin t}dt$; x $\in$ (-1, 1);

d) F(x) = $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)dt$; x $\in$ (0, ∞);

e) F(x) = $\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt$; x $\in$ (-1, 1);

f) F(x) = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{tgt} \cdot arctg(xtgt)dt$; x $\in$ [0, ∞).

Exercițiul 6.3.11. Folosind teorema de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze următoarele integrale :

a) $\int_0^{\pi} \ln(1+x\cos t)dt$; x $\in$ (-1, 1);

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1+x\cos t)dt, |x|<1$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} \cdot \ln\frac{1+x\sin t}{1-x\sin t}dt, |x|<1$

d) $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)dt, x>0$

e) $\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt, |x|<1$

f) $\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt, |x|<1$

g) $\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(x\sin t)}{\sin t}dt$

h) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{tgt} \cdot arctg(xtgt)dt, x \geq 0$

i) $\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t)dt, x>1$

R. a) $\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}$, b) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos x)^2$, c) π acrsin x, d) $\pi \ln \frac{x+1}{2}$, e) $\pi \ln \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$, f) $\pi\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)$,

g) $\frac{\pi}{2} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, h) $\frac{\pi}{2} \ln(x+1)$, i) $\pi \ln \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}$

Exercițiul 6.3.12. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare, să se calculeze:

a) $\int_0^1 f(x)dx$, unde f(x) = $\begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} \cdot \sin(\ln x), & \text{x} \neq 0 \text{ si x} \neq 1 \\ 0, & \text{x} = 0 \text{ sau x} = 1 \end{cases}$,

α , β > 0

b) $\int_0^1 f(x)dx$, unde f(x) = $\begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} \cdot \cos(\ln \frac{1}{x}), & \text{x} \neq 0 \text{ si x} \neq 1 \\ 0, & \text{x} = 0 \\ \beta - \alpha, & \text{x} = 1 \end{cases}$

R. a) arctg $\frac{a-b}{1+(a+1)(b+1)}$, b) $\frac{1}{2} \ln \frac{(b+1)^2+1}{(a+1)^2+1}$

Exercițiul 6.3.13. Utilizând integralele cu parametru, să se calculeze:

a) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{26}{15} - \sin^2 t\right)dt$

b) $I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + 9\sin^2 t)dt$

c) $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \ln\left(1+\frac{\cos t}{2}\right)dt$

d) $I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{arctg(\sin t)}{\sin t}dt$

R. a) Se observă că $I_1 = F\left(\frac{5}{4}\right)$,unde F(x) = $\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t)dt$ Folosind rezultatul exercițiului 8.4.25, punctul i), obținem $I_1 = 0$.

b) $I_2 = \pi \ln 2$; c) $I_3 = \frac{5\pi^2}{72}$; d) $I_4 = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2})$