5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.

5.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 5.3.1. Să se determine y' şi y'' dacă $y = y(x)$ este funcţia definită implicit de ecuaţia:

a) $y^5 + x^2y^3 + x^2 + y = 0$ în vecinătatea punctului (0, 0)

b) $y^2 + x^5 - 1 = 0$ în vecinătatea punctului (0, 1)

Exerciţiul 5.3.2. Să se determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ dacă $z = z(x, y)$ este funcţia definită de ecuaţia $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ şi punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}\right)$.

Exerciţiul 5.3.3. Să se determine y' şi z' dacă $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ sunt definite implicit de sistemul $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 10z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \end{cases}$ în vecinătatea punctului $\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$.

Exerciţiul 5.3.4. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, e - 1)$ dacă $z = z(x, y)$ este funcţia definită implicit de ecuaţia $x + y + z = e^z$ şi de condiţia $z(0, e - 1) = 1$.

Exerciţiul 5.4.5. Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$;
ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ defineşte implicit pe z ca funcţie de x şi y (local).

Să se arate că $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$.

Exerciţiul 5.3.6. Să se determine extremele unei funcţii $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia:

a) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0$

b) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$

R. a) $y(-4) = -2$ maxim local, $y(-3) = -1$ minim local

b) $y(0) = -1$ maxim local, $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ maxim local.

Exerciţiul 5.3.7. Să se determine extremele unei funcţii $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia:

a) $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

c) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

R. a) Pentru funcţia z_1 care satisface condiţia $z_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1$ punctul $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ este punct de minim. Pentru funcţia z_2 care satisface condiţia $z_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -2$, punctul $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ este punct de maxim.

b) Pentru funcţia z_1 care satisface condiţia $z_1(1, -2) = -2$, punctul $(1, -2)$ este punct de minim. Pentru funcţia z_2 care satisface condiţia $z_2(1, -2) = 8$, punctul $(1, -2)$ este punct de maxim.

c) $(-1, 2)$ este punct de maxim pentru funcţia z_1 care satisface condiţia
$z_1(-1, 2) = -2$. $(-1, 2)$ este punct de minim pentru funcţia z_2 care satisface condiţia $z_2(-1, 2) = 1$.

Exerciţiul 5.3.8. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ condiţionate de $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

R. (2, 2) punct de maxim ($\lambda = -1$), (-2, -2) punct de minim ($\lambda = 1$)

Exerciţiul 5.3.9. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = x + y + z$ condiţionate de $x - y + z = 2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

R. $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ punct de maxim, $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

(0, -2, 0) punct de minim, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Exerciţiul 5.3.10. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ condiţionate de $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R. (1, 1, 1) punct de minim, $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Exerciţiul 5.3.11. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y) = xy$ condiţionate de $x + y = 1$.

R. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punct de maxim, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Exerciţiul 5.3.12. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y) = x + 2y$ condiţionate de $x^2 + y^2 = 5$.

R. (1, 2) punct de maxim, $\lambda = -\frac{1}{2}$, (-1, -2) punct de minim, $\lambda = \frac{1}{2}$.

Exerciţiul 5.3.13. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = xy^2z^3$ condiţionate de $x + y + z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R. (2, 4, 6) punct de maxim

Exerciţiul 5.3.14. Să se determine *inf f(A)* şi *sup f(A)* dacă:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$
b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le 1, 0 \le y \le x^2\}$

Exerciţiul 5.3.15. Să se determine *inf f(A)* şi *sup f(A)* dacă:

a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \le 8\}$
b) $f(x, y, z) = z - y - x$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y^2 + z^2 - 1 = 0, 4x - 3z = 0\}$

Exerciţiul 5.3.16. Pe curba $y = x^2$, $z = x^2$ din $\mathbb{R}^3$ să se determine punctul cel mai apropiat de (0, 0, 1)

Exerciţiul 5.3.17. În planul $3x - 2z = 0$ să se determine punctul cu proprietatea că suma pătratelor distanţelor la punctele (1, 1, 1) şi (2, 3, 4) este cea mai mică posibilă.

Exerciţiul 5.3.18. Între toate triunghiurile de perimetru dat $2p$ să se determine acela a cărui arie este maximă.

R. triunghiul echilateral.