4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE

4.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 4.3.1. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale următoarelor funcţii, precizând şi domeniul lor de definiţie:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3axy$ b) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ c) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ d) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

e) $f(x, y) = x^y$ f) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$

g) $f(x, y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ h) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\frac{z}{xy}$.

Exerciţiul 4.3.2. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale următoarelor funcţii; precizând şi domeniul lor de definiţie:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\,|\,y\,|}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}\sin\frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Exerciţiul 4.3.3. Demonstraţi că funcţia $z(x, y) = y\cdot\Phi(x^2 - y^2)$ verifică ecuaţia $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ unde Φ este o funcţie de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 4.3.4. Demonstraţi că funcţia $z(x, y) = xy + x\cdot\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuaţia $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot y + z$ unde Φ este o funcţie de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 4.3.5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Determinaţi derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei *f* şi studiaţi continuitatea lor.
b) Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei *f* în (0, 0).

Exerciţiul 4.3.6. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(xy^2)$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se calculeze diferenţiala sa.

Exerciţiul 4.3.7. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x, y) = (\sin xy, \sin(x\sin y), \sin x - \cos y)$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine *df*.

Exerciţiul 4.3.8. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\ln(x^2 + y^2 + z^2), & (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ -\frac{\pi}{2} & ,(x, y, z) = (0,0,0) \end{cases}$$

a) Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei f în (0, 0, 0)

b) Determinaţi $(grad\ f)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

c) Determinaţi $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unde v este versorul gradientului funcţiei f în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exerciţiul 4.3.9. Demonstraţi că dacă $z(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$ atunci $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ oricare ar fi funcţiile f şi g de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 4.3.10. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dacă

$z(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$ unde f este o funcţie de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 4.3.11. Să se scrie formula lui Taylor pentru funcţia $f(x, y) = e^x \sin y$ şi punctul (0, 0).

Exerciţiul 4.3.12. Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$f = (f_1, f_2)$, $f_1(x, y) = (x - 1)e^y$, $f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}, (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad, (x, y) = (0,0) \end{cases}$

în (0, 0).

R. f este diferenţiabilă în (0, 0); $df_{(0, 0)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 - h_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exerciţiul 4.3.13. Se dau funcţiile f, g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ unde $f_1(x, y) = x^3 - y^3$, $f_2(x, y) = 3x^2y + 3xy^2$, $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = x - y$. Să se arate că funcţiile $f, g, f \circ g$ sunt diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$ şi să se scrie df, dg,
$f \circ g$ şi $d(f \circ g)$.

R. $df_{(x, y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 3x^2h_1 - 3y^2h_2 \\ (6xy + 3y^2)h_1 + (3x^2 + 6xy)h_2 \end{pmatrix}$

$dg_{(x, y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ h_1 - h_2 \end{pmatrix}$

$(f \circ g)(x, y) = (6x^2y + 2y^3, 6x^3 - 6xy^2)$

$d(f \circ g)_{(x, y)}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 12xy & 6x^2 + 6y^2 \\ 18x^2 - 6y^2 & -12xy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 12xyh_1 + (6x^2 + 6y^2)h_2 \\ (18x^2 - 6y^2)h_1 - 12xyh_2 \end{pmatrix}$ pentru orice $(x, y), (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

Exerciţiul 4.3.14. Să se determine extremele locale ale următoarelor funcţii:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $f(x) = arctg \frac{1 - x}{1 + x}$ c) $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ d) $f(x) = |x - 1|$

e) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$ f) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

R. a) $x = -1$ punct de maxim local, $x = 1$ punct de minim local; b) nu are;

c) $x = \frac{1}{2}$ punct de minim local; d) $x = 1$ punct de minim local; e) $x = 0$ punct de minim local; f) $x = e$ punct de minim local.

Exercițiul 4.3.15. Să se determine punctele de extrem local pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

c) $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ d) $f(x, y) = xy^2e^{x-y}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{(x+1)(y+2)(x+y)}$ f) $f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

g) $f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$ h) $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x^2+y^2})$

R. a) (1, 1) punct de minim local; b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ punct de minim local;

c) (0, 0), $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ puncte de minim local; d) (-1, 2) punct de maxim local, (α, 0) este punct de minim local dacă α > 0, punct de maxim local și nu e punct de extrem dacă α = 0; e) (2, 1) punct de maxim local; f) (1, 0) punct de maxim local, (1, 1) punct de minim local; g) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sunt puncte de maxim local, iar $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ sunt puncte de minim local; h) (0, 0) punct de minim local.

Exercițiul 4.3.16. Să se determine punctele de extrem local ale următoarelor funcții:

a) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$
b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - xy + xz + 2yz$
c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
d) $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + d$
e) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4x - 2y + 6z - 3$
f) $f(x, y, z) = xyz - (x + y)\ln z + 5$

R. a) (0, 0, 0) punct de minim local; b) (0, 0, 0) punct de minim local;
c) (24, -114, -1) punct de minim local; d) (a, b, c) punct de minim local;
e) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$ punct de minim local.

Exercițiul 4.3.17. Să se demonstreze că funcția $f(x, y) = (1 + e^x)\cos y - xe^x$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ are o infinitate de puncte de maxim local și nici un punct de minim local.