2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.2. Exerciţii rezolvate.

Exerciţiul 2.2.1. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor de puteri: a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; b) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soluţie.

a) Raza de convergenţă este: $r = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Pentru x = -1 obţinem $f_n(-1) = (-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Seria generată de şirul numeric $\{f_n(-1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ are aceeaşi natură cu seria armonică, deci este divergentă. Pentru $x = 1$, obţinem $f_n(1) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Acest şir generează seria armonică alternată care, conform criteriului lui Leibniz, este convergentă. Mulţimea de convergenţă a seriei de puteri considerate este deci (-1, 1].

Fie $S: (-1, 1] \to \mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$.

Pentru orice $x\in(-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$.

Din $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, $x\in(-1, 1)$ şi $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x\in(-1, 1)$. Ţinând seama de observaţia de mai sus, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = S(1) = \lim_{x\to 1}S(x) = \lim_{x\to 1}\ln(1+x) = \ln 2$.

Deci, suma seriei armonice alternate este *ln 2*. Acest rezultat permite aproximarea numărului *ln 2* prin numere raţionale şi evaluarea erorii făcute.

b) Raza de convergenţă este dată de : $r = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[m]{|a_m|}}$ unde

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}.$$

Deci $\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{1}{\sqrt[m]{m}}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}$. Deoarece $\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{m} = 1$, şirul $(\sqrt[m]{|a_m|})_{m\in\mathbb{N}}$ are punctele de acumulare 0 şi 1. Prin urmare $\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_m|} = 1$, deci $r = 1$.

Pentru $x = -1$ se obţine seria numerică $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ care este convergentă (se aplică criteriul lui Leibniz).

Pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}$ care este de asemenea convergentă.

Prin urmare, mulţimea de convergenţă este $A = [-1, 1]$.

Fie acum $S : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Aplicând teorema de derivare termen cu termen, deducem că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^{n} = \frac{1}{1+x^2}$. Deci $S(x) = arctg\ x + C$. Din $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = arctg\ x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece S este continuă în 1, deducem acum că $S(1) = \lim_{x\to 1, x<1} S(x) = \frac{\pi}{4}$, rezultat ce permite aproximarea numărului π prin numere raţionale şi evaluarea erorii făcute. Analog se obţine $S(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exerciţiul 2.2.2. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n}\cdot\frac{n+1}{n^2+n+1}\cdot\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^{n},\ x^2 \neq \frac{1}{2}.$$

Soluţie.

Dacă se notează $\frac{x^2-2}{1-2x^2} = y$ se obţine o serie de puteri cu coeficienţii $a_n = (-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^2+n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Raza de convergenţă a acestei serii de puteri este $r = 1$ deoarece $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. Mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 0}a_n y^n$ este [-1, 1]. Mulţimea de convergenţă a seriei date se obţine acum rezolvând $-1 \leq \frac{x^2-2}{1-2x^2} \leq 1$, de unde rezultă
$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Exerciţiul 2.2.3. Să se arate că funcţiile $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ şi $h(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$ sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ şi să se determine seriile corespunzătoare.

Soluţie.

Prin inducţie se arată că $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$,
$g^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ şi $h^{(n)}(x) = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ şi $|g^{(n)}(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ rezultă că f şi g sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbb{R}$.

Pentru orice $a > 0$ şi orice $x \in [-a, a]$ şi $n \in \mathbb{N}$ avem $0 < h^{(n)}(x) \leq e^a$, deci h este dezvoltabilă în serie de puteri pe orice interval de forma $[-a, a]$ deci este dezvoltabilă pe $\mathbb{R}$.

Pentru $n = 2m$ avem $f^{(n)}(0) = \sin m\pi = 0$, $g^{(n)}(0) = \cos m\pi = (-1)^m$, iar pentru $n = 2m+1$, $f^{(n)}(0) = \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m$ şi $g^{(n)}(0) = 0$.

Rezultă dezvoltările:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum $h^{(n)}(0) = e^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă dezvoltarea

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.2.4. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia:

$$f(x)=(1 + x)^{\alpha} \text{ cu } x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluţie.

Prin inducţie se demonstrează că

$$f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha - 1)\cdot \ldots \cdot(\alpha - n + 1)\cdot (1 + x)^{\alpha-n}, \text{ deci}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha - 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha - n + 1).$$

Se obţine dezvoltarea

$$(1 + x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

pentru $|x| < 1$.

Exerciţiul 2.2.5. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie.

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pentru $|x| < 1$ avem: $f'(x)=(1 + x^2)^{-1/2} =$

$= 1 - \dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \ldots$ de unde, prin integrare, rezultă $f(x) = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$ pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Exerciţiul 2.2.6. Să se calculeze $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ cu şase zecimale exacte.

Soluţie.

În dezvoltarea $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ punând $x = -\dfrac{1}{2}$, obţinem

$\dfrac{1}{\sqrt{e}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}$. Cum într-o serie alternată eroarea este inferioară primului termen neglijat, din $\dfrac{1}{2^n n!} < \dfrac{1}{10^6}$, prin încercări se obţine $n = 7$, deci

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{4\cdot 2!} - \frac{1}{8\cdot 3!} + \frac{1}{16\cdot 4!} - \frac{1}{32\cdot 5!} + \frac{1}{64\cdot 6!} = \ldots$$

Exercițiul 2.2.7. Să se calculeze cu trei zecimale exacte $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

Soluție.

Din $\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$, obținem

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{4n+1}$$

Calculând suma primilor cinci termeni prin transformarea lor în fracții zecimale, prin lipsă și prin adaos acolo unde transformarea nu se face exact, cu patru zecimale, obținem

$0,9035 < \int_0^1 \cos x^2 dx < 0,9036$, deci $\int_0^1 \cos x^2 dx$ este aproximată cu trei zecimale exacte prin 0,903.