2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

2.1.1. Serii de puteri reale.

Definiţia 2.1.1.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Se numeşte *serie de puteri reale* cu coeficienţii a_n, $n\in\mathbb{N}$, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde

$f_n(x) = a_n x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

Principalele rezultate privind mulţimea de convergenţă a unei asemenea serii, precum şi proprietăţile sumei, (datorate matematicienilor Abel, Cauchy, Hadamard) sunt concentrate în teorema următoare.

Teorema 2.1.1.1. Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x\in\mathbb{R}$ o serie de puteri reale, cu coeficienţii daţi a_n, $n\in\mathbb{N}$ şi $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & ,\text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & ,\text{daca } 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty \\ \infty & ,\text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

a) dacă r = 0, singurul punct de convergenţă al seriei este $x = 0$;
b) dacă r > 0, seria este absolut convergentă pe intervalul (-r, r) şi este divergentă pentru $|x| > r$;
c) dacă $x = r$ este punct de convergenţă al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog pentru $x = -r$;
d) dacă r > 0, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul (-r, r) şi aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
e) dacă r > 0, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b]\subset(-r, r)$.

Observaţia 2.1.1.1. a) Numărul r se numeşte *rază de convergenţă* a seriei de puteri. Formula de calcul pentru r se numeşte *formula Cauchy-Hadamard*.

b) Se poate demonstra că, dacă $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există, atunci există şi $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ şi cele două limite sunt egale. Prin urmare, dacă există $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, atunci $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (cu convenţia $\frac{1}{0} = \infty$ şi $\frac{1}{\infty} = 0$).

2.1.2. Serii Taylor. Dezvoltări în serie.

Definiţia 2.1.2.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi $n\in\mathbb{N}$, fixat. Se numeşte *serie Taylor, cu coeficienţii* a_n, $n\in\mathbb{N}$, *centrată în* x_0, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

Este evident că orice serie de puteri este o serie Taylor centrată în punctul
$x_0 = 0$. De asemenea, dacă $x_0 \in\mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, printr-o translaţie $x - x_0 = y$, o serie Taylor centrată în x_0 se transformă într-o serie de puteri, centrată în origine. Din acest motiv, teorema 2.1.3.1. de la serii de puteri poate fi extinsă uşor la serii Taylor. Se obţine astfel:

Teorema 2.1.2.1. Fie $\sum_{n\geq 0} f_n$ o serie Taylor cu coeficienţii a_n, $n\in\mathbb{N}$, centrată în x_0 şi $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & , \text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{daca } 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty \\ \infty & , \text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

a) dacă r = 0, singurul punct de convergenţă al seriei este $x = x_0$;

b) dacă r > 0, seria este absolut convergentă pe intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ şi divergentă pentru $|x - x_0| > r$;

c) dacă r > 0, seria este uniform convergentă pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;

d) dacă $x = x_0 + r$ este punct de convergenţă al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog, pentru $x = x_0 - r$;

e) dacă r > 0, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ şi aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;

f) dacă r > 0, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;

Rămâne valabilă observaţia referitoare la determinarea razei de convergenţă *r*.

În teorema precedentă, fiind daţi coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$ şi punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, se deduc proprietăţi ale sumei seriei. Problema poate fi pusă însă şi invers: fiind dată suma seriei şi punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, să se determine coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$. Apare, astfel, problema găsirii unei serii Taylor a cărei sumă să fie o funcţie dată, funcţie care se va numi dezvoltabilă în serie Taylor.

Definiţia 2.1.2.2. Fie I un interval deschis al axei reale, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Funcţia f se numeşte *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului* x_0, dacă există şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât:

- $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$, $\varepsilon \le r$, unde r este raza de convergenţă a seriei Taylor cu coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$, centrată în x_0 ;
- pentru orice $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ avem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Apar în mod natural două probleme:

- În ce condiţii o funcţie f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct dat?
- Cum se pot calcula coeficienţii a_n $n \in \mathbb{N}$,dacă se cunoaşte funcţia f?

Referitor la problema a doua, ţinând seama de teorema 2.1.4.1., e), avem:

Teorema 2.1.2.2. Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ fixat. Dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, atunci f admite derivate de orice ordin în x_0 şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$.

Observaţia 2.1.2.1. Din această teorema rezultă că existenţa derivatelor de orice ordin într-o vecinătate a lui x_0 este o condiţie necesară pentru ca o funcţie să fie dezvoltabilă în serie Taylor. Ea nu este însă şi suficientă.

Exemplul 2.1.4.1. Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ are derivate de orice ordin pe $\mathbb{R}$, $f_{(0)}^{(n)} = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Ea nu este însă dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$, pentru că, dacă ar fi, ar rezulta

$a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ şi, prin urmare, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ceea ce este fals.

Observaţia 2.1.2.2. Din teorema precedentă rezultă că, dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, există o singură serie Taylor a cărei sumă să fie f pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ şi anume, seria cu coeficienţii $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$, $n \in \mathbb{N}$. Această serie se mai numeşte *seria Taylor asociată funcţiei f în jurul punctului* x_0. Prin urmare, referitor la prima problemă formulată anterior, este suficient să stabilim în ce condiţii o funcţie indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) este suma seriei Taylor asociate pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Pentru aceasta, este deosebit de utilă următoarea:

Teorema 2.1.2.3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul I, $x_0 \in I$ fixat. Atunci, pentru orice $x \in I$, există cel puţin un punct ξ (depinzând de x) situat între x_0 şi x, astfel încât:

$$f(x)= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Aceasta este *formula lui Taylor* pentru o funcţie reală, de $n+1$ ori derivabilă pe I cu restul $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ în sensul lui Lagrange. Polinomul:

$$T_n(x)= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numeşte *polinomul Taylor de gradul n* asociat funcţiei f şi punctului fixat x_0.

Observaţia 2.1.2.3. Coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$ obţinuţi în teorema 2.1.4.2. coincid cu cei din formula lui Taylor pentru funcţia f şi punctul x_0. Deci, polinomul lui Taylor $T_n(x)$ asociat funcţiei f şi punctului x_0 este suma parţială de ordin n a seriei Taylor asociate funcţiei f în jurul punctului x_0 şi, prin urmare, referitor la prima problemă, obţinem acum:

Teorema 2.1.2.4. Fie $f:I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) pe o vecinătate a punctului fixat $x_0 \in I$. Atunci funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, dacă şi numai dacă, există o vecinătate V a punctului x_0, încât, pentru orice $x \in$ V avem $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Cu ajutorul acestei teoreme se obţine uşor următorul criteriu, utilizat de obicei în practică:

Teorema 2.1.2.5. Fie $f:I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in I$. Presupunem că există $M > 0$ astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in$ V, să avem $|f_{(x)}^{(n)}| \le M$ (funcţia f are derivatele egal mărginite pe V). Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, adică f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(x_0)}^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$, pentru orice $x \in V$.