1. ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

1.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 1.3.1. Demonstraţi că următoarele şiruri sunt fundamentale:

a) $x_n = \dfrac{n+3}{5n+4}$, $n\in \mathbb{N}$ b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3}$, $n\in \mathbb{N}^*$

c) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(2k+3)}{k^2}$, $n\in \mathbb{N}^*$ d) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\text{arctg}(kx)}{k^3}$, $n\in \mathbb{N}^*$

e) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 \dfrac{\pi}{k}$, $n\in \mathbb{N}^*$ f) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k!(k+2)}$, $n\in \mathbb{N}^*$

Exerciţiul 1.3.2. Fie $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale cu proprietatea că există $c\in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$ astfel încât $|x_{n+1} - x_n| \le c\cdot|x_n - x_{n-1}|$ pentru orice $n\in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ este fundamental.

Exerciţiul 1.3.3. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt convergente:

a) $x_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$, $n\in \mathbb{N}$ b) $x_n = \dfrac{n^3+2}{3n^2+1}$, $n\in \mathbb{N}$

c) $x_n = \left(\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)n^2$, $n\in \mathbb{N}$ d) $x_n = (1 + \cos n\pi)\dfrac{n}{n+1}$, $n\in \mathbb{N}$

e) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$, $n\in \mathbb{N}^*$ f) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k!)}{k^2}$, $n\in \mathbb{N}^*$

g) $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$, $n\in \mathbb{N}^*$

R. a) convergent, b) divergent, c) divergent, d) divergent, e) convergent, f) convergent, g) convergent.

Exerciţiul 1.3.4. Determinaţi limitele extreme ale şirurilor:

a) $x_n = \dfrac{1}{n}n^{(-1)^n} + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n\in \mathbb{N}^*$.

b) $x_n = (1 + (-1)^n)n$, $n\in \mathbb{N}$

c) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $n\in \mathbb{N}^*$.

R. a) -1, 1; b) 0, ∞; c) 0, 1.

Exerciţiul 1.3.5. Determinaţi limitele şirurilor:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}$, $n\in \mathbb{N}$ b) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $n\in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$

c) $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$, $n\in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$

R. a) 1, b) 1, c) $\dfrac{4}{e}$.

Exerciţiul 1.3.6. Să se studieze natura seriilor următoare şi să se calculeze suma în caz de convergenţă:

a) $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ b) $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \alpha \ge 0$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{\alpha^n}, |\alpha|>1$ d) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n\geq 2}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$ f) $\sum_{n\geq 2}\frac{\ln((n+1)/n)}{\ln n\cdot\ln(n+1)}$

g) $\sum_{n\geq 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$ h) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$

Indicaţie: $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$

R. a) convergentă, s = $\frac{5}{4}$, b) convergentă, s = $\frac{1}{\alpha+1}$,

c) convergentă, s = $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, d) divergentă, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$,

e) convergentă, s = $\sqrt{a}$ - 1, f) convergentă, s = $\frac{1}{\ln 2}$,

g) convergentă. s = $\frac{\pi}{4}$, h) divergentă.

Exerciţiul 1.3.7. Folosind criteriul rădăcinii să se studieze convergenţa următoarelor serii:

a) $\sum_{n\geq 1}\operatorname{arctg}^n\left(\frac{1}{n}\right)$ b) $\sum_{n\geq 1} n\cdot a^n, a>0$ c) $\sum_{n\geq 1}\operatorname{tg}^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum_{n\geq 1}\sin^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$ e) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

R. a) convergentă, b) convergentă dacă a < 1, divergentă dacă a ≥ 1,
c) divergentă, d) convergentă, e) convergentă.

Exerciţiul 1.3.8. Folosind criteriul raportului, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{\sqrt{n!}}$ b) $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

d) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{e^n}$ e) $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{2^n+1}$ f) $\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$

R. a) convergentă, b) convergentă, c) convergentă, d) convergentă,
e) divergentă, f) convergentă.

Exerciţiul 1.3.9. Să se studieze convergenţa următoarelor serii alternate. În caz de convergenţă, să se precizeze dacă seriile sunt semiconvergente.

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ b) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ d) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

e) $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ f) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

R. a) semiconvergentă, b) semiconvergentă, c) absolut convergentă,
d) semiconvergentă, e) divergentă, f) absolut convergentă

Exerciţiul 1.3.10. Demonstraţi că următoarele serii sunt absolut convergente:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(na)}{n^2}$, $a\in\mathbb{R}$;b) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(na)}{n^2}$, $a\in\mathbb{R}$;c) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(na)}{2^n}$, $a\in\mathbb{R}$

Exerciţiul 1.3.11. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2}:

$$\text{a) } \sum_{n\geq 1}\frac{1}{10^n\cdot n!}\text{; b) } \sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{(\sqrt{3})^n}\text{; c) } \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}\text{; d) } \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}.$$

R. a) $s \approx s_2 = 0{,}1050000000$; b) $s \approx s_7 = 6{,}676399794$;

c) $s \approx s_6 = 0{,}6718750000$; d) $s \approx s_5 = 0{,}6333333333$

Exerciţiul 1.3.12. Să se determine suma seriei de termen general x_n dacă:

a) $x_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$ b) $x_n = \frac{3^n+2^n}{6^n}$, $n\in\mathbb{N}$

c) $x_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$

d) $x_n = \sqrt{n+2+\alpha}-2\sqrt{n+1+\alpha}+\sqrt{n+\alpha}$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$

e) $x_n = \ln\cos\frac{\alpha}{2^n}, \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

R. a) 1; b) 7/2; c) $\ln 3$; d) $\sqrt{\alpha}-\sqrt{1+\alpha}$; e) $\ln\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

Exerciţiul 1.3.13. Să se stabilească natura seriilor următoare:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\alpha)}{n^p}$, $p > 0$, $\alpha\in(0,\pi)$ b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{3^n}$

c) $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ d) $\sum_{n\geq 1}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

e) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$ f) $\sum_{n\geq 1}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

R. a) convergentă, b) convergentă, c) convergentă, d) convergentă,
e) divergentă, f) convergentă.

Exercițiul 1.3.14. Să se stabilească natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} a^n \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega}{2^n}$, $a > 0$, $\omega \in (0, \pi)$.

R. Seria este convergentă pentru $a \in (0, 2)$ și divergentă pentru $a \geq 2$.

Exercițiul 1.3.15. Să se stabilească dacă se poate aplica criteriul lui Leibniz pentru seriile:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1+\cos n\pi}{n}$

b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos n\pi}{\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, n)}$

c) $\sum\limits_{n\geq 1} \sin \frac{n^2+n+1}{n+1} \cdot \pi$

R. a) Nu, b) Da, c) Da.