12. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.3. Exerciții propuse

Exercițiul 12.3.1. Să se calculeze:

a) $\iint\limits_{(S)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, (S) fiind fața exterioară a sferei $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$;

b) $\iint\limits_{(S)} \frac{dydz}{3x} + \frac{dzdx}{2y} + \frac{dxdy}{2z}$, (S) fiind fața interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$;

c) $\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) z dxdy$, (S) fiind fața superioară a porțiunii de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$;

d) $\iint\limits_{S} yzdydz + xzdzdx + xydxdy$, (S) fiind fața exterioară a tetraedrului determinat de planele x = 0, y = 0, z = 0, x+ y+ z = 1.

R. a) $\frac{256\pi}{3}$, b) - $\frac{124\pi}{9}$, c) $\frac{25\pi}{84}$, d) 0.

Exercițiul 12.3.2. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori:

a) $\vec{V} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ prin fața exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le h$;

b) $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafața $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$.

R. a) 0, b) π

Erercițiul 12.3.3. Să se calculeze cu ajutorul formulei Green-Riemann următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint\limits_{FrD} e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy)$, unde D = {(x, y), $x^2 + y^2 \le 1$};

b) $\oint\limits_{FrD} (xy - y)dx + (xy + x)dy$, unde D = $\left\{(x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$;

c) $\oint\limits_{FrD} (x - y)dx + dy$, unde D = {(x, y), $x^2 + y^2 \le 2x$, $y \ge 0$};

R. a) $2\pi e$; b) $2\pi ab$; c) $\frac{\pi}{2}$

Exercițiul 12.3.4. Să se calculeze direct și aplicând formula Green-Riemann:

a) $\oint\limits_{FrD} (x + y)dx - (x - y)dy$, unde D = {(x, y), $x^2 - 1 \le y \le 3x - 3$};

b) $\oint\limits_{FrD} (2x + 3y^2)dx + (x^2 + y)dy$, unde D = [-1, 1] x [-1, 1]

R. a) - $\frac{1}{3}$; b) 0.

Exercițiul 12.3.5. Folosind integrala curbilinie, să se calculeze:

a) aria figurii mărginită de curba $\begin{cases} x = a(2\cos t - \sin 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

b) aria figurii mărginită de curba de ecuaţie $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (lemniscata lui Bernoulli)
c) aria figurii mărginită de curba de ecuaţie $x = a \sin 2\varphi \cos \varphi$,
$y = a \sin 2\varphi \sin \varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R. a) $4\pi a^2$; b) $2a^2$; c) $\frac{\pi a^2}{8}$.

Indicaţii. b) ecuaţiile parametrice ale curbei sunt $x = a\sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t$;
$y = a\sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Exerciţiul 12.3.6. Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de al doilea tip:

a) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ pe faţa exterioară a sferei
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\iint_S x^3 y^2 dydz + x^2 y^3 dzdx + 3zdxdy$ pe faţa exterioară a frontierei domeniului mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$;

c) $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ pe faţa exterioară a piramidei mărginită de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

R. a) $\frac{12\pi}{5} a^5$; b) 27π; c) $\frac{a^3}{2}$.

Exerciţiul 12.3.7. Arătaţi că volumul corpului compact elementar, mărginit de suprafaţa S este, $V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$.

R. Se aplică formula Gauss-Ostrogradski. Se poate observa că

$$V = \iint_S V_1(x, y, z)dydz + V_2(x, y, z)dzdx + V_3(x, y, z)dxdy,$$

dacă $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 1$.

Exerciţiul 12.3.8. Să se calculeze $I = \iint_S xzdydz + xz^3 dzdx + yzdxdy$ pe faţa exterioară a suprafeţei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$.

Indicaţie. Se completează S astfel încât să se obţină frontiera jumătăţii de elipsoid $\left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\right\}$, se aplică formula Gauss-Ostrogradski şi se arată că integrala este 0 pe porţiunea de frontieră din planul xOy.

R. $I = \frac{\pi abc^2}{8}$.

Exerciţiul 12.3.9. Folosind formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $\oint\limits_{(C)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$, unde (C) este intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu planul x + y + z = a, parcursă odată în sens direct faţă de Ox

b) $\oint\limits_{(C)}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, unde (C) este conturul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, x + y+ z = a

c) $\oint\limits_{(C)}x^2y^3dx+dy+zdz$, unde (C) este circumferinţa $x^2 + y^2 = R^2$, z = 0

d) $\oint\limits_{(C)}zxdx+xydy+yzdz$, unde (C) este curba de intersecţie a cilindrului $x^2 + y^2 = R^2$ cu planele de coordpnate şi cu planul z = h, h > 0, situată în primul octan.

R. a) 0; b) 0; c) $-\frac{\pi}{8}R^6$; d) $\frac{1}{2}Rh(R+h)$

Exerciţiul 12.3.10. Să se demonstreze că :

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k}$$

este solenoidal în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 12.3.11. Se consideră câmpul vectorial exprimat în coordonate cilindrice prin:

$$\vec{V}^*(r, \theta, z) = \frac{1}{r}\cdot\vec{e}_r + \theta\cdot\vec{e}_\theta - \frac{z}{r}\vec{e}_z,\ r > 0,\ \theta\in[0, 2\pi],\ z\in\mathbb{R}$$

Să se demonstreze că acest câmp este solenoidal.

Exerciţiul 12.3.12. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k},\ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3$$

prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din $\mathbb{R}^3$ este nul.

Exerciţiul 12.3.13. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k},\ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3$$

este un camp de rotori în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine un potenţial vector pentru $\vec{V}$.

R. $\vec{W}(x, y, z) = z(1 - yz)\,\vec{i} + 2x(1 - yz)\,\vec{j}$ + grad U, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 12.3.14. Să se determine fluxul câmpului vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \vec{k},$$

prin faţa exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

R. π