11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENŢI

11.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 11.3.1. *Să se determine (grad U)(2, 1) unde*

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

R. $\frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$

Exerciţiul 11.3.2. *Să se determine punctele în care norma gradientului câmpului $U(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ este egală cu 2.*

R. $\{(x, y): x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\}$

Exerciţiul 11.3.3. *Dacă φ şi ψ sunt funcţii reale diferenţiabile iar c este o funcţie constantă, arătaţi că:*

a) $grad(\varphi + \psi) = grad\ \varphi + grad\ \psi$
b) $grad\ (c + \varphi) = grad\ \varphi$
c) $grad(c \cdot \varphi) = c \cdot grad\ \varphi$
d) $grad(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot grad\ \psi + \psi \cdot grad\ \varphi$
e) $grad(\varphi^n) = n \cdot \varphi^{n-1} \cdot grad\ \varphi,\ n \in \mathbb{N}^*$

Exerciţiul 11.3.4. *Să se determine divergenţa şi rotorul următoarelor câmpuri vectoriale:*

a) $\vec{V}(x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

b) $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 + z^2) \cdot \vec{i} + (z^2 + x^2) \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}$

c) $\vec{V}(x, y, z) = grad(x^2 + y^2 + z^2)$

R. a) $div\ \vec{V} = 3$, $rot\ \vec{V} = \vec{0}$ b) $div\ \vec{V} = 0$,
$rot\ \vec{V} = 2[(y - z) \cdot \vec{i} + (z - x) \cdot \vec{j} + (x - y) \cdot \vec{k}]$; c) $div\ \vec{V} = 6$, $rot\vec{V} = \vec{0}$.

Exerciţiul 11.3.5. *Demostraţi că dacă φ este un câmp scalar, $\vec{V}$ un câmp vectorial, ambele de clasă C^1, atunci*

$$div(\varphi \cdot \vec{V}) = \varphi \cdot div\ \vec{V} + \vec{V} \cdot grad\ \varphi$$

Exerciţiul 11.3.6. *Demonstraţi că dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1, iar $\vec{a}$ este un câmp constant, atunci*

$$\vec{a} \cdot [grad\ (\vec{V} \cdot \vec{a}) - rot\ (\vec{V} \times \vec{a})] = div\ \vec{V}.$$

Exerciţiul 11.3.7. *Demonstraţi că dacă U este un câmp scalar, $\vec{V}$ un câmp vectorial, ambele de clasă C^2, atunci:*

a) $rot\ (grad\ U) = \vec{0}$

b) *div(rot* $\vec{V}$ *) = 0*

c) *div (grad U)* = $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$

Exercițiul 11.3.8. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip, pe curba γ parcursă în sens direct.

a) $\int_\gamma \frac{dx}{x^2+y^2}$; γ : x = a cos t, y = a sin t, t $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\int_\gamma (\arcsin y)dx + x^2 dy$; γ : x = - t, y = $\sqrt{1-t^2}$, t $\in$ [-1, 1]

c) $\int_\gamma \sqrt{yz}dx + \sqrt{zx}dy + \sqrt{xy}dz$; γ : x = t, y = t^2 , z = t^3, t $\in$ [0, 1]

d) $\int_\gamma z\sqrt{a^2-x^2}dx + xzdy + (x^2+y^2)dz$;

γ : x = a cos t, y = a sin t, z = bt, t $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R. a) - $\frac{1}{a}$; b) – π, c) $\frac{61}{42}$, d) $\frac{a^2 b}{2}(\pi - 1)$

Exercițiul 11.3.9. Calculați următoarele integrale curbilinii de al doilea tip.

a) $\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, unde γ este arcul de parabolă y = x^2 ce unește punctele A(1, 1) și B(2, 4) parcurs în sens direct.

b) $\int_\gamma \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$ unde γ este cercul $x^2 + y^2 = a^2$, parcurs în sensul invers acelor de ceasornic.

c) $\int_\gamma y^2 dx + x^2 dy$, unde γ este arcul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aflat deasupra axei Ox și parcurs în sensul acelor de ceasornic.

d) $\int_\gamma \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2+y^2}$, unde γ este bucla lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, pentru care x ≥ 0, parcursă în sens invers acelor de ceasornic.

R. a) $\frac{1219}{30}$; b) – 2 π; c) $\frac{4}{3}ab^2$; d) 0

Exercițiul 11.3.10. Să se calculeze $\int_\gamma 2xydx - x^2 dy$ pe următoarele curbe ce au extremitatea inițială în O(0, 0) și cea finală în A(2, 1).

a) y = $\frac{1}{2}$ x

b) y = $\sqrt{\frac{x}{2}}$

c) linia poligonală OBA cu B(2, 0)
d) linia poligonală OCA cu C(0, 1)

R. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{12}{5}$; c) – 4; d) 4.

Exercițiul 11.3.11. Să se calculeze $\int_{\gamma} 2xydx + x^2dy$ în aceleaşi ipoteze ca în exercițiul 11.4.20.

R. 4 în toate cele patru cazuri.

Exercițiul 11.3.12. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\int_{\gamma} xydx + yzdy + zxdz$, unde γ este curba de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, $y > 0$ parcursă în sens direct;

b)i = $\int_{\gamma}(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, unde γ este elipsa $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$, cu a, h > 0, parcursă în sens invers acelor de ceasornic dacă se priveşte din partea pozitivă a axei Oz.

c) $\int_{\gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, unde γ este curba lui Viviani, definită de ecuaţiile: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$, $z \geq 0$, curbă parcursă în sensul acelor de ceasornic, privită din partea pozitivă a axei Ox.

R. a) $R^3\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)$;

b) Ecuaţiile parametrice sunt x = a cos t, y = b sin t, z = h(1 – cos t), $t \in [0, 2\pi]$. I = $-2\pi b(a + h)$

c) Ecuaţiile parametrice ale lui γ sunt x = a $\sin^2\theta$, y = a sinθ cosθ, z= a cosθ, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. I = $\frac{\pi}{4}a^3$.

Exercițiul 11.3.13. Arătaţi că următoarele câmpuri vectoriale sunt câmpuri de gradienţi pe domeniul maxim de definiţie şi calculaţi un potenţial scalar al lor.

a) $\vec{V}(x, y) = (2x + 3y)\cdot\vec{i} + (3x - 4y)\cdot\vec{j}$

b) $\vec{V}(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2)\cdot\vec{i} - (x^2 - 2xy + 3y^2)\cdot\vec{j}$

c) $\vec{V}(x, y) = e^{x-y}[(1 + x + y)\cdot\vec{i} + (1 - x - y)\cdot\vec{j}]$

d) $\vec{V}(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}[yz(1 + 2x^2)\cdot\vec{i} + xz(1+2y^2)\cdot\vec{j} + xy(1 + 2z^2)\cdot\vec{k}]$

R. a) $U(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$; b) $U(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$;

c) $U(x, y) = (x + y)e^{x-y}$; d) $U(x, y, z) = xyz\, e^{x^2+y^2+z^2}$

Exercițiul 11.3.14. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip pe o curbă netedă, orientată, arbitrară, pentru care se precizează doar extremităţile:

a) $\int_{(0,b)}^{(a,0)} y^2e^xdx + 2ye^xdy$

b) $\int_{(1,4)}^{(9,1)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}dy$, pe o curbă din primul cadran

c) $\int\limits_{(0,0,0)}^{(3,9,5)} x^2 dx + \sqrt{y}dy - z\sqrt{z}dz$, pe o curbă cu imaginea aflată în regiunea y ≥ 0, z ≥ 0.

d) $\int\limits_{(-1,0,1)}^{(2,3,4)} e^{xyz}(yzdx + xzdy + xydz)$

R. a) – b^2; b) 1; c) 27 - 10$\sqrt{5}$; d) e^{24} – 1