ANALIZĂ MATEMATICĂ
CALCUL INTEGRAL

CUPRINS

ANALIZĂ MATEMATICĂ CALCUL INTEGRAL

INTRODUCERE

Materialul de faţă se adresează în primul rând studenţilor Facultăţii de Inginerie Electrică secţia Frecvenţă Redusă dar, prin conţinutul ei şi prin metodologia de abordare constituie un suport pentru oricine are nevoie să folosească noţiuni fundamentale de analiză matematică.

Lucrarea are un pronunţat caracter didactic. Materialul este organizat in 8 capitole numite Unităţi de Învăţare. Acestea acoperă cunoştinţele aferente calculului integral: primitive, integrala simplă (Riemann), integrala improprie, integrala curbilinie, integrala dublă, integrala triplă şi integrala de suprafață, teme care fac obiectul cursului de Analiză Matematică – Calcul integral , programat în anul I, semestrul II.

O atenţie deosebită se acordă fiecăruia dintre cele două obiective principale ale cursului: a) însuşirea de către studenţi a principalelor noţiuni teoretice şi metode de rezolvare a problemelor legate de calculul integralelor ; b) folosirea cunoștinţelor şi abilităţilor de calcul dobândite în cadrul cursului pentru rezolvarea unor probleme concrete (de exemplu calculul masei unei plăci, a centrului ei de greutate, a momentelor ei de inerție etc.) și interpretarea rezultatelor obţinute.

Fiecare Unitate de Învăţare conţine un rezumat teoretic, prezintă metodele de rezolvare a problemelor tipice şi le exemplifică prin exerciţii rezolvate detaliat. Acolo unde este cazul sunt propuse teste de auto-evaluare. În finalul fiecărei teme este propusă o lucrare de verificare şi sunt precizate câteva referinţe bibliografice considerate mai importante.

Prima și a doua Unitate de Învăţare este dedicată primitivelor. Sunt prezentate principalele metode generale de calcul ale primitivelor, precum și calculul primitivelor unor tipuri de funcții (funcții raționale, binomiale etc.)

În Unitatea a treia se definește noțiunea de integrală simplă (Riemann), proprietăți ale acesteia, calculul precum şi unele aplicaţii directe ale acesteia.

Unitatea a patra este dedicată studiului integralei improprii, care reprezintă o extensie a integralei simple pentru funcții nemărginite, respectiv domenii nemărginite.

În Unitatea a cincea se studiază integrala curbilinie și se prezintă principalele ei aplicații în mecanică: masa unui fir material, momentele de inerție ale firului material fața de axe şi faţă de planele de coordonate, coordonatele centrului de greutate etc.

Integrala dublă este studiată în Unitatea a şasea. Se prezintă noţiunea de integrală dublă, principalele metode de calcul precum şi aplicaţiile acesteia cum ar fi: calculul ariei unui domeniu compact din plan, calculul masei, coordonatelelor centrului de greutate şi momentelor de inerţie ale unei plăci materiale plane.

Integrala triplă este prezentată în Unitatea a şaptea, alături de metodele de calcul şi de aplicaţiile acesteia cum ar fi: calculul volumului unui domeniu compact din spaţiu, calculul masei, coordonatelor centrului de greutate şi al momentelor de inerţie ale unui corp material din spaţiu.

În ultima Unitate, a opta, se introduce noţiunea de integrală de suprafaţă, proprietăţile acesteia, precum si calculul integralei de suprafaţă. Sunt prezentate şi aplicaţii ale integralei de suprafaţă precum: calculul ariei unei suprafeţe, calculul masei, coordonatelor centrului de greutate şi al momentelor de inerţie ale unei placi curbate neomogene din spaţiu. De asemenea, ca aplicaţie se prezintă şi atracţia exercitată de o placă curbă asupra unui punct material, precum şi potenţialul newtonian al plăcii.

După parcurgerea acestor teme studenţii trebuie să fie capabili să recunoască tipul unei integrale şi să folosească metodele de rezolvare prezentate.

Materialul este conceput într-o manieră accesibilă şi sistematică, astfel încât să poată fi parcurs şi prin studiu individual, acolo unde numărul de ore afectat unei teme este prea mic în raport cu cantitatea necesară de informaţie transmisă.

Pe parcursul semestrului sunt planificate două lucrări de verificare, una referitoare la primitive, integrala simplă şi integrala improprie şi una referitoare la integrala curbilinie, dublă. triplă şi de suprafaţă.

Nota finală ia în consideraţie notele obţinute la lucrările de verificare (50%) şi răspunsurile la examen (50%).

Sperăm că folosirea acestui material să trezească interesul pentru analiza matematică şi să convingă pe cititor de importanţa folosirii matematicii pentru studierea fenomenelor ce apar în diverse domenii de activitate.

Unitatea de învăţare nr. 1

PRIMITIVE

Cuprins	**Pagina**

OBIECTIVELE unității de învățare nr. 1

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 1 sunt:

- Obiectiv 1 : Cunoașterea noțiunii de primitivă
- Obiectiv 2 : Cunoașterea și aplicarea metodei de integrare prin părți pentru calculul primitivelor
- Obiectiv 3 : Cunoașterea și aplicarea metodei de schimbare de variabilă pentru calculul primitivelor

1.1. Primitive. Notiuni generale

Definitia 1.1 Fie f : I→ℝ o functie, I interval.

Spunem ca F : I→ℝ e o primitiva a lui f pe I daca F e derivabila pe I daca F e derivabila pe I si $F'=f$.

Multimea tuturor primitivelor lui f se poate scrie sub forma {F+c,c ∈ ℝ} si se noteaza :

$$\int f(x)dx$$

si se numeste integrala nedefinita a lui f

Deci
$$\int f(x)dx = \{F + c | c \in \mathbb{R}\}$$

sau, mai simplu,

$$\int f(x)dx = F + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are primitive pe ℝ.

Intr-adevar, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ e derivabila pe ℝ si $F'(x) = x^2$.

2) Functia lui Heaviside nu are primitive pe ℝ.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Presupunem prin absurd ca H are primitive pe ℝ

$$\Rightarrow F' = H \Rightarrow F' = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Conform unei consecinte a teoremei lui Lagrange, rezulta ca

$$F(x) = \begin{cases} c_1 \,, & x < 0 \\ c_2 \,, & x = 0 \\ x + c_3 \,, & x > 0 \end{cases}.$$

Deoarece F e primitiva rezulta ca e continua in origine =>

$c_1 = c_2 = c_3 \overset{not}{=} c$.

Deci, $F(x) = \begin{cases} c\,, & x < 0 \\ x + c\,, & x \geq 0 \end{cases}$.

Dar $F_s'(0) = F_d'(0)$.

$F_s'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{c - c}{x} = 0$

$F_d'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x + c - c}{x} = 1$

rezulta F nu e derivabila in origine.

Se pun doua probleme importante in legatura cu primitivele:

I - existenta primitivei unei functii;

II – calculul primitivei unei functii.

In continuare tratam existenta.

I – <u>Existenta</u> – Incepem cu un rezultat fundamental.

<u>Teorema 1.1</u>

Orice functie continua pe un interval are primitive.

Reciproca nu este adevarata.

Consideram

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \,, & x \neq 0 \\ 0 \,, & x = 0 \end{cases}$$

f nu e continua, dar are primitive pe $\mathbb{R}$.

Fie functia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} \,, & x \neq 0 \\ 0 \,, & x = 0 \end{cases}$

F e continua pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, fiind compunere de functii elementare.

Deoarece $0 \leq \left| x^2\cos\frac{1}{x} \right| \leq x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0$ => F este continua in 0.

F e derivabila pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, fiind compunere de functii elementare.

Avem

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{ F e derivabila si in 0}$$

si $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2

Daca functia $f : I \to \mathbb{R}$ are primitive pe I si α e un numar real nenul , atunci functia αf are primitive pe I si are loc :

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Exemplu

$\int e^{7x}\, dx = \int \frac{1}{7}(e^{7x})'\, dx = \frac{1}{7} \int (e^{7x})'\, dx = \frac{1}{7} e^{7x} + c$.

Teorema 1.3

Daca functiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ au primitive pe I , atunci si functia $f + g$ are primitive pe I si are loc :

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx .$$

Exemplu

Sa se calculeze $\int (x^2 + e^{3x})dx$.

Avem $\int (x^2 + e^{3x})dx = \int x^2 dx + \int e^{3x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} e^{3x} + c$.

1.2. Calculul primitivelor

Avand in vedere un tablou al derivatelor functiilor elementare , se poate da urmatorul tablou al primitivelor imediate :

Primitive imediate

1). $\int 0dx = c$, pe $\mathbb{R}$;

2). $\int 1dx = x + c$, pe $\mathbb{R}$;

3). $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, pe $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$;

4). $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, pe $I \subset (0 , \infty)$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$;

5). $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, pe $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

6). $\int e^x dx = e^x + c$, pe $\mathbb{R}$;

7). $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, pe $\mathbb{R}$; $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$;

8). $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + c$, pe $\mathbb{R}$, $a \neq 0$;

9). $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$, pe $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$; $a \neq 0$;

10). $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$, pe $\mathbb{R}$;

11). $\int \cos x \, dx = \sin x +$, pe $\mathbb{R}$;

12). $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctgx} + c$, pe $I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

13). $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tgx} + c$, pe $I \subset \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

14). $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$, pe $I \subset \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

15). $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$, pe $I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

16). $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + c$, pe $\mathbb{R}$, $a \neq 0$;

17). $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$, pe $I \subset (-\infty,-a)$ sau pe $I \subset (a,\infty)$; $a > 0$;

18). $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$, pe $I \subset (-a,a)$; $a > 0$.

<u>**Remarca**</u>

1). In formulele anterioare, trebuie subinteles ca I este interval si ca numarul *c* parcurge multimea numerelor reale.

2). Pentru anume valori ale lui α, formula de la pct.4 are loc si pe intervale $I \subset (-\infty,0)$.

3). Combinand ultimele doua teoreme din sectiunea anterioara cu primitivele imediate de mai sus, se pot obtine cu usurinta numeroase alte primitive.

Exemplu

1). Sa calculam $\int \frac{3x^2+2}{x}dx$, atat pe intervalul (-∞,0), cat si pe intervalul (0,∞).

Avem $\frac{3x^2+2}{2}$ = 3x + $\frac{2}{x}$ si ca urmare,

$$\int \frac{3x^2+2}{x}dx = \int 3x dx + \int \frac{2}{x} dx =$$

$$= 3\int x dx + 2\int \frac{1}{x} dx = 3\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Asadar, pe intervalul (-∞,0)

$$\int \frac{3x^2+2}{x}dx = 3\frac{x^2}{2} + 2\ln(-x) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

iar pe intervalul (0,∞),

$$\int \frac{3x^2+2}{x}dx = 3\frac{x^2}{2} + 2\ln x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

2). Sa calculam $\int \sqrt[3]{x}dx$ pe $\mathbb{R}$.

Functia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = $\sqrt[3]{x}$, este continua pe $\mathbb{R}$ si ca urmare, are primitive pe $\mathbb{R}$.

Avand in vedere formula de la pct. 4 pentru α = $\frac{1}{3}$ si Remarca anterioara, o primitiva a functiei f este

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c_1, & x < 0 \\ c_2, & x = 0, \\ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c_3, & x > 0 \end{cases}$$

constantele reale c_1, c_2, c_3 determinandu-se din conditiile

a). F este continua pe $\mathbb{R}$,

b). F este derivabila pe $\mathbb{R}$,

c). F'(x) = f(x), oricare ar fi x ∈ $\mathbb{R}$.

Din constructia functiei F, aceste conditii se verifica in x ≠ 0.

Conditia de continuitate a lui F in 0 ne da $c_1 = c_2 = c_3 (= c)$. Astfel, functa F devine

$$F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c, x \in \mathbb{R}.$$

Se constata cu usurinta ca aceasta functie satisface conditiile b) si c) de mai sus pentru fiecare c ∈ $\mathbb{R}$.

Asadar, aceasta functie F este primitiva generala a functiei f pe $\mathbb{R}$.

Teorema 1.4 (Integrarea prin parti) Daca functiile f si g sunt de clasa C^1 pe intervalul I ⊂ ℝ, atunci are loc egalitatea

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(formula de integrare prin parti).

Remarca

Din punct de vedere practic, pentru a calcula primitiva $\int h(x)dx$ pe intervalul I, se procedeaza astfel: se cauta doua functii f si g astfel incat h = $f'g$ si primitiva $\int f'(x)g(x)dx$ sa se poata calcula.

Exemplu

Sa se calculeze $\int xe^x dx$.

Scriem h(x) = xe^x = x$(e^x)'$. Rezulta :

$\int xe^x\, dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c, c \in \mathbb{R}$.

Exemplu

Sa se calculeze $\int ln^2 x dx$, x ∈ (0,∞).

Scriem h(x) = $ln^2 x = x' ln^2 x$

Atunci avem:

$\int ln^2 x dx = x ln^2 x - \int x \cdot 2lnx \cdot \frac{1}{x} dx = x ln^2 x - 2\int lnx dx.$

Aplicand acelasi procedeu lui $h_1(x) = lnx = x' \cdot lnx$, obtinem :

$$\int ln^2 x dx = x ln^2 x - 2\int x' lnx dx = x ln^2 x - 2x lnx + 2\int x\frac{1}{x} dx = x ln^2 x - 2x lnx + 2x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.5 (Schimbarea de variabila I). Se considera functiile φ : I → J, f : J →ℝ, prima fiind derivabila pe intervalul I iar a doua are primtive pe intervalul J.

Atunci, functia (f o φ)φ' are primitive pe intervalul I. Pentru orice primitiva F a lui f, are loc egalitatea

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c, c \in \mathbb{R}.$$

(prima formula de schimbare de variabila)

Remarca Din Teorema, se deduce asa-numita *prima metoda de schimbare de variabila* pentru calculul primitivelor. Pentru a calcula primitva $\int h(x)dx$ pe intervalul I, se procedeaza astfel: se cauta doua functii f si φ astfel incat h(x) = f(φ(x))φ'(x), x ∈ I si primitiva F(t) = $\int f(t)dt$ sa se poata calcula. Atunci, conform cu Teorema, $\int h(x)dx$ = F(φ(x)) + c, c ∈ ℝ. Uneori, metoda trebuie aplicata de mai multe ori sau in combinatie cu metoda integrarii prin parti, pentru a se ajunge la o primitiva cunoscuta. Exemplele urmatoare sunt edificatoare in acest sens.

Exemplu

1). Sa calculam

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx, \;\; x \in (0,1).$$

Scriem

$$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2-1}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2-1}(\sqrt{1-x^2})'$$

si atunci,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2-1}(\sqrt{1-x^2})'dx = F\left(\sqrt{1-x^2}\right),$$

Unde,

$$F(t) = \int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}ln\frac{1-t}{1+t} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Asadar,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + c, \;\; c \in \mathbb{R},$$

pentru x ∈ (0,1).

2). Sa calculam $\int e^{-x^2}x^3dx$, pe $\mathbb{R}$.

Scriem $e^{-x^2} \cdot x^3 = \frac{1}{2}e^{-x^2}x^2(x^2)'$ si atunci,

$$\int e^{-x^2}x^3dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}x^2(x^2)'dx = F(x^2) + c, c \in \mathbb{R},$$

unde

$$F(t) = \frac{1}{2}\int te^{-1}dt = \frac{1}{2}\int t(-e^{-t})'dt =$$

$$= \frac{1}{2}(-te^{-t} + \int e^{-t}dt) = \frac{1}{2}(-te^{-t} - e^{-t}).$$

Asadar,

$$\int e^{-x^2}x^3dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.6 (Schimbarea de variabila II). Se considera functiile φ : I ⟶ J, f : J ⟶ $\mathbb{R}$, prima fiind bijectiva, derivabila si cu derivata nenula pe intervalul I, iar a doua este astfel incat functia (f o φ)φ' are primitive pe intervalul I (fie H o primitiva a sa).

Atunci, functia f are primitive pe intervalul J iar F = H o φ^{-1} este o primitiva a sa.

(a doua formula de schimbare de variabila)

Remarca Din Teorema, se deduce asa-numita a doua metoda de schimbare de variabila pentru calculul primitivelor. Pentru a calcula primitiva $\int f(x)dx$ pe intervalul J, se procedeaza astfel: se cauta mai intai o functie φ : I → J, cu proprietatile din Teorema si apoi se calculeaza primitiva H ∈ $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Ca urmare,

$$\int f(x)dx = H(\varphi^{-1}(x)) + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Se spune ca in calculul primitivei $\int f(x)dx$, s-a facut schimbarea de variabila x = φ(t). Uneori, de la variabila x se trece la variabila t prin substitutia ψ(x) = t sau chiar prin substitutia Φ(x,t) = 0. Este clar ca functiile φ si ψ sunt inverse una alteia.

Se vede de aici ca functia φ (sau ψ) este cheia problemei. Alegerea lui φ sau ψ se face dupa tipul functiei f (vezi Unitatea de invatare ”Calculul primitivelor unor tipuri de functii”).

Uneori, metoda se aplica de mai multe ori sau in combinatie cu metoda integrarii prin parti sau cu prima metoda de schimbare de variabila, pentru a se ajunge la o integrala cunoscuta.

Exista primitive ce se pot calcula prin diverse schimbari de variabile.

Exemplul urmator este edificator in acest sens.

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx, \ \ x \in (0,1)$.

a). Facem schimbarea de variabila x = $\sin t$, t ∈ (0, $\frac{\pi}{2}$). Asadar, consideram functia φ : (0, $\frac{\pi}{2}$) → (0,1), φ(t) = $\sin t$ si calculam H ∈ $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Avem

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

$$\int \frac{1}{\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt = \int \frac{1}{\sin t}dt = \int \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}dt = \int \frac{1}{2tg\frac{1}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}}dt = \int \left(\ln tg\,\frac{1}{2}\right)' dt = \ln\left(tg\,\frac{1}{2}\right) + c\ .$$

Ca urmare,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = H(\varphi^{-1}(x)) + c = \ln(tg\,\frac{\arcsin x}{2}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

b). Facem schimbarea de variabila x = $\cos t, \ \ t \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Asadar, consideram functia φ : (0,$\frac{\pi}{2}$) → (0,1), φ(t) = $\cos t$ si calculam H ∈ $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Avem

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \frac{1}{\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}}(-\sin t)dt = -\int \frac{1}{\cos t dt} = \int \frac{(\sin t)'}{\sin^2 t-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t} + c.$$

Ca urmare,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = H(\varphi^{-1}(x)) + c = \frac{1}{2}ln\frac{1-\sin(\arccos x)}{1+\sin(\arccos x)} + c =$$

$$= \frac{1}{2}ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

c). Facem schimbarea de variabila x = $\frac{1}{t}, t \in (1,\infty)$. Asadar, consideram functia

φ : (1,∞) → (0,1), φ(t) = $\frac{1}{t}$, cu care calculam H ∈ $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Avem

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt =$$

$$= -\ln(t + \sqrt{t^2-1}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Ca urmare,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = H(\varphi^{-1}(x)) + c = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

d). Facem substitutia $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t, t \in (0,1)$. Asadar, consideram functia ψ : (0,1) → (0,1),

ψ(x) = $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Se constata ca functia ψ este bijectiva. Din ψ(x) = t rezulta ca x = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ = φ(t).

Aceasta este functia cu care aplicam a doua metoda de schimbare de variabila pentru calculul primitivei considerate.Avem

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \frac{1}{\varphi(t)\sqrt{1-\varphi^2(t)}}\varphi'(t)dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-1}dt = ln\frac{1-t}{1+t} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Ca urmare,

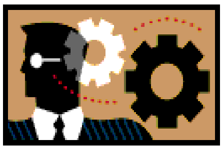
$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = H(\varphi^{-1}(x)) + c = \ln\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarca Cele patru rezultate obtinute pentru $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ pe intervalul (0,1) sunt doar aparent diferite. Calcule simple ne conduc de la o primitva la alta. Oricare doua dintre ele difera prin cate o constanta pe intervalul (0,1).

Corolar (Schimbarea de variabila) Se considera functiile φ : I → J, f : J → ℝ, prima fiind bijectiva, derivabila si cu derivata continua si nenula pe intervalul I, iar a doua este continua pe intervalul J. Atunci, are loc echivalenta

F este primitiva a lui f <=> F o φ este primitiva a lui (f o φ)φ'.

Deci in conditiile corolarului, cele doua metode de schimbare de variabila sunt echivalente.



Test de autoevaluare 1.

Sa se calculeze primitivele urmatoarelor functii :

a). $\int \frac{7x^4+2x+1}{x}\,dx$ **;**

b). $\int x^2 \sin x\,dx$;

c). $\int e^x \cos x\,dx$;

d). $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$;

e). $\int \frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}\,dx$;

f). $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$;

g). $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 1

a). $\int x e^{-x}\,dx$;

b). $\int x\sqrt{1-x}\,dx$;

c). $\int ln(x+x^2)\,dx$.

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

a). Calculul integralei se face direct folosind Teorema 1.2 si Teorema 1.3 si se obtine primitiva :

$\frac{7}{4}x^4 + 2x + lnx + 1 + c, c \in \mathbb{R}$;

b). Se foloseste Teorema de integrare prin parti si obtinem primitiva :

$-x^2cosx + 2xsinx + 2cosx + c, c \in \mathbb{R}$;

c). La fel ca la b). :

$\frac{e^x}{2}(cosx + sinx) + c, c \in \mathbb{R}$;

d). Se face schimbarea de variabila. Rezulta :

$ln(1 + e^x) + c, \ c \in \mathbb{R}$;

e). $\frac{1}{9}arcsin9x + c, c \in \mathbb{R}$;

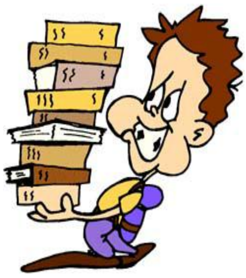
f). $\frac{2}{3}(lnx)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$;

g). $2sin(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}$.

Concluzii

Pentru calculul primitivelor unor functii se aplica fie teorema de integrare prin parti, fie una din metodele de schimbare de variabila. In cazul in care functia de integrat e elementara, se foloseste direct tabelul prezentat, cu primitivele functiilor elementare.

Bibliografie



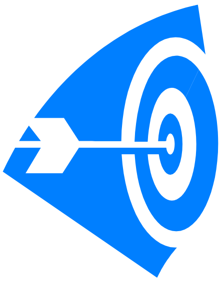
1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 2

CALCULUL PRIMITIVELOR UNOR TIPURI DE FUNCŢII

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 2



Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 2 sunt:

- Obiectiv 1 : Cunoaşterea calculului primitivelor funcţiilor raţionale, raţionale în sinx şi cosx, raţionale în e^x, raţionale în x şi $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$, raţionale în x şi $\sqrt{ax^2+bx+c}$
- Obiectiv 2 : Cunoaşterea calculului primitivelor funcţiilor binomiale

2.1 Calculul primitivelor functiilot rationale

Reamintim faptul ca o functie rationala este o functie de forma :

$$R : I \to \mathbb{R},\ R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

unde $I \subset \mathbb{R}$ este interval iar P si Q sunt functii polinominale cu coeficienti reali si $Q(x) \neq 0$, pentru $x \in I$.

Se poate demonstra :

<u>**Teorema 2.1**</u> Functia rationala $\frac{P(x)}{Q(x)}$, cu grad P < grad Q, se poate scrie intr-un singur mod ca o suma de fractii simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{n=1}^{q}\left[\frac{A_1^n}{x-a_n} + \frac{A_2^n}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_n}^n}{(x-a_n)^{\alpha_n}}\right] +$$

$$+\sum_{m=1}^{r}\left[\frac{B_1^m x + C_1^m}{x^2 + M_m x + N_m} + \frac{B_2^m x + C_2^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_m}^m x + C_{\beta_m}^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m}}\right]$$

daca descompunerea polinomului Q in factori primi este

$$Q_{(x)} = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_q)^{\alpha_q}\cdot$$

$$\cdot\,(x^2 + M_1x + N_1)^{\beta_1}(x^2 + M_2x + N_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + M_rx + N_r)^{\beta_r},$$

cu a_n, M_m, N_m, A_i^m, B_i^m, C_i^m constante reale si $M_m^2 - 4N_m < 0$.

Acum, avem :

<u>**Teorema 2.2**</u>

Primitivele oricarei functii rationale $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ definita pe un interval I sunt functii elementare care se pot efectiv determina daca se cunosc radacinile numitorului Q(x).

Deci, calculul primitivelor unei functii rationale se reduce la calculul primitivelor fractiilor simple:

$$\int x^n\,dx, \int \frac{1}{(x-a)^n}dx, \int \frac{Bx + C}{(x^2+Mx+N)^n}dx,$$

unde a, B, C, M, N $\in \mathbb{R}$ si M^2- 4N < 0, iar n $\in \mathbb{N}$.

Primele doua primitive sunt imediate si sunt din clasa functiilor elementare. Pentru calculul ultimei primitive, se procedeaza astfel: cu schimbarea de variabila $x + \frac{M}{2} = u$, primitiva se reduce la calculul primitivelor de forma

$$\int \frac{u}{(u^2 + k^2)^n}du$$

si

$$\int \frac{1}{(u^2 + k^2)^n}du.$$

Prima se calculeaza usor (cu substitutia $u^2 = v$) si este functie elementara. Pentru calculul lui

$$F_n = \int \frac{1}{(u^2 + k^2)^n}du,$$

se stabileste formula de recurenta

$$F_n = \frac{1}{k^2}\frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{u}{(u^2+k^2)^{n-1}} + (2n-3)F_{n-1}\right],\ n \geq 2$$

(plecand de la F_{n-1} si integrand prin parti), cu $F_1 = \frac{1}{k}\mathrm{arctg}\frac{u}{k}$.

Este clar ca fiecare F_n este functie elementara.

Exemplu Sa calculam

$$\int \frac{4}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx, \qquad x \in (-1, \infty).$$

Mai intai, cautam o descompunere in fractii simple de forma

$$\frac{4}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\ .$$

Aducand in membrul drept la acelasi numitor si punand conditia ca numaratorul fractiei obtinute sa coincida cu numaratorul fractiei din membrul stang, se obtine un sistem liniar cu necunoscutele A, B, C, D, E, F. Rezolvand acest sistem, se obtine:

A = 2, B = 1, C = -2, D = 1, E = -2, F = 0.

Primitivele primelor trei fractii simple sunt imediate:

$$\int \frac{A}{x+1}dx = A\ln(x+1) \int \frac{B}{(x+1)^2}dx = -\frac{B}{x+1},$$

$$\int \frac{C_x + D}{x^2+1}dx = \frac{C}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + D\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{C}{2}\ln(x^2+1) + \text{Darctg x.}$$

Apoi,

$$\int \frac{E_x + F}{(x^2+1)^2}dx = \frac{E}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx + F\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx =$$
$$= -\frac{E}{2}\frac{1}{x^2+1} + F\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

si ramane sa calculam ultima primitiva. Pentru aceasta, avem

$$arctg\ x = \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} +$$

$$+2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\left[\int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx\right]$$

de unde rezulta

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}arctg\ x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Inlocuind constantele A, B, ...F in cele stabilite mai sus, se obtine primitiva dorita:

$$\int \frac{4}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx = 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1) +$$

$$+arctgx - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R},$$

pe intervalul (-1, ∞).

2.2 Calculul primitivelor functiilor rationale in sinx si cosx

O astfel de primitiva este de forma

$$\int R(sinx, cosx)dx, unde\ R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

este o functie rationala in doua variabile.

variabile. Primitiva se calculeaza pe un interval I ⊂ $(-\pi, \pi)$ pe care Q(sinx, cosx) ≠ 0.

Cu substitutia t = $tg\ \frac{x}{2}$ si cu a doua metoda de schimbare de variabila, calculul

primitivei

$$\int R(sinx, cosx)dx$$

se reduce la calculul primitivei unei functii rationale.

Sunt utile formulele trigonometrice:

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 2} dx$, pe $(-\pi, \pi)$.

Cu substitutia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, adica cu schimbarea de variabila x =2arctgt, aplicam a doua metoda de schimbare de variabila. Avem:

$$H(t) = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{t^2+2t+3} dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{(t+1)^2+2} dt = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}$$

Si ca urmare,

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 2} dx = \sqrt{2} arctg \frac{tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + c, c \in \mathbb{R}, pe\ (-\pi, \pi).$$

Remarca In cazuri particulare ale functiei rationale R(u,v), se pot face substitutii mai convenabile pentru calculul primitivei $\int R(sinx, cosx)dx$.

In acest sens, avem situatiile:

a) Daca R(u,v) este functie impara in u, se face substitutia $\cos x = t$

b) Daca R(u,v) este functie impara in v, se face substitutia $\sin x = t$

c) Daca R(u,v) este functie impara in u si v, se face substitutia $\operatorname{tg} x = t$

Exemplele urmatoare sunt edificatoare in acest sens.

Exemplu

Sa calculam $\int sin^3 x\, cos^2 x dx, pe\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suntem in cazul particular a) de mai sus. Cu substitutia $\cos x = t$, calculam

$$H(t) = \int (\sqrt{1-t^2})^3 t^2 \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int (1-t^2)t^2 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}$$

A doua metoda de schimbare de variabila ne da

$$\int sin^3 x cos^2 x dx = \frac{cos^5 x}{5} + \frac{cos^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}, pe\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplu

Sa calculam $\int sin^2 x cos^3 x dx, pe \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suntem in cazul particular b) de mai sus. Cu substitutia $\sin x =$ t, calculam

$$H(t) = \int t^2 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int (1-t^2)t^2 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}$$

A doua metoda de schimbare de variabila ne da

$$\int sin^2 x cos^3 x dx = -\frac{sin^5 x}{5} + \frac{sin^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}, pe \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{1}{sin^4 x cos^2 x} dx, pe \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suntem in cazul particular c) de mai sus. Cu substitutia tg $x =$ t, calculam

$$H(t) = \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3}$$

si ca urmare,

$$\int \frac{1}{sin^4 x\, cos^2 x} dx = tgx - 2ctgx - \frac{1}{3} ctg^3 x + c, c \in \mathbb{R}, \text{pe } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

2.3 Calculul primitivelor functiilor rationale in e^x

O astfel de primitiva este de forma $\int R(e^x) dx$, unde $R(u)$ este o functie rationala in u.

Primitiva se calculeaza pe un interval I pe care R(e^x) are sens.

Cu substitutia $e^x = t$ si cu a doua metoda de schimbare de variabila,

calculul primitivei $\int R(e^x) dx$ se reduce la calculul primitivei unei functii rationale.

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$, pe $(-\infty, 0)$.

Cu substitutia $e^x = t$, calculam $H(t) = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t} dt = arcsint$ si ca urmare,

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = arcsine^x + c, c \in \mathbb{R}, pe\ (-\infty, 0).$$

Remarca

a). In cazul unei primitive de forma $\int R(e^{ax})\,dx, unde\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, este dat,

este clar ca se face substitutia $e^{ax} = t$.

b). In cazul mai general al unei primitive de forma $\int R\ (e^{ax}, e^{bx})dx$, unde

R(u,v) este o functie rationala in doua variabile iar a si b sunt numere rationale date, se face substitutia $e^{rx} = t$, unde *r* este numar rational convenabil ales.

Exemplu

Sa calculam :

$$\int \frac{e^{-x}}{1+\ e^{2x}}dx, \text{pentru } x > 0.$$

Cu substitutia $e^{x} = t$, calculam

$$H(t) = \int \frac{t^{-1}}{1+t^2}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2(1+t^2)}dt\ = -\frac{1}{t} - arctg\ t, \text{pentru } t > 1.$$

A doua metoda de schimbare de variabila ne da

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}dx\ = \ -e^{-x} - arctg\ e^{x} + c, c \in\ \mathbb{R}, \text{pe } (0,\infty).$$

2.4 Calculul primitivelor functiilor rationale in x și $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$

O astfel de primitiva este de forma

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q}\right)dx,$$

Unde R(x,u,v) este o functie rationala in trei variabile. Primitiva se calculeaza pe un interval I.

Cu substitutia $\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ = t, unde r este cmmmc al indicilor radicalilor m si n si cu *a doua* metoda de schimbare de variabila, calculul primitivei de mai sus se reduce la calculul primitivei unei functii rationale.

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$, pentru $x > 0$.

Facem substitutia $\sqrt[6]{x+1} = t$ si calculam

$$H(t) = 6\int \frac{t^8}{t^2-1}dt = 6\int \left(t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}ln\frac{t-1}{t+1}\right), \text{pentru } t > 1.$$

A doua metoda de schimbare de variabila ne da

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx = \frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^7 + \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^5 + 2\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 +$$

$$+ 6\sqrt[6]{x+1} + 3ln\frac{\sqrt[6]{x+1}-1}{\sqrt[6]{x+1}+1} + c, c \in \mathbb{R}, \text{pe } (0,\infty).$$

Remarca Uneori, primitiva de calculat poate contine mai mult de doi radicali.

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}dx$, pentru $x > 1$.

Facem substitutia $\sqrt[6]{x} = t$ si calculam $H(t) = 6\int \frac{t^3+t^2}{t-1}t^5dt$. In final, se obtine,

pentru x > 1:

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}dx = \frac{3}{4}\sqrt[6]{x^8} + \frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7} + 2x + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + 3\sqrt[6]{x^4} + 4\sqrt[6]{x^3} + 6\sqrt[6]{x^2} +$$

$$+12\sqrt[6]{x} + 12ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

2.5 Calculul primitivelor functiilor rationale in x și $\sqrt{ax^2+bx+c}$

O astfel de primitiva este de forma

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

unde R(x,u) este o functie rationala in doua variabile iar a,b,c $\in \mathbb{R}$, a $\neq$ 0

si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$. Primitiva se calculeaza pe un interval deschis I $\subset \mathbb{R}$ pe care

R(x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$) are sens.

Primitiva se calculeaza folosind *substitutiile lui Euler*:

a). daca $\Delta < 0$, se face substitutia $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$;

b). daca $\Delta > 0$, se face substitutia $\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}} = t$, unde x_1 si x_2 sunt radacinile trinomului ax^2 + bx + c.

In fiecare caz, prin ridicare la patrat, se obtine x = φ(t), functie cu care aplicam metoda a doua de schimbare de variabila.

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$, pe $\mathbb{R}$.

Suntem in cazul a) de mai sus. Facem substitutia $\sqrt{x^2+4x+5} = x + t$. De aici rezulta x

$= \frac{t^2-5}{2\,(2-t)} = \varphi(\mathrm{t})$, funtie cu care aplicam metoda a doua de schimbare de variabila. Pentru $\mathrm{t} > 2$, calculam

$$H(t) = \int \frac{\varphi(\mathrm{t})}{\varphi(\mathrm{t}) + t}\varphi'(t)dt = \int \frac{t^2-5}{2(2-t)^2}dt = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{4}{t-2} - \frac{1}{(t-2)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{t}{2} + 2\ln(t-2) + \frac{1}{2(t-2)}.$$

Ca urmare, pentru $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, avem

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x\right) + 2\ln\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2\right) + \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2\right)} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}dx$, pe $(-1,5)$.

Suntem in cazul b) de mai sus. Facem substitutia $\sqrt{-\frac{x-5}{x+1}} = t$, de unde rezulta $\mathrm{x} = \frac{5-t^2}{1+t^2} = \varphi(\mathrm{t})$, functie cu care aplicam metoda a doua de schimbare de variabila. Pentru $\mathrm{t} > 0$, calculam

$$H(t) = \int \frac{1}{\sqrt{-\left(\varphi(t)\right)^2 + 4\varphi(t) + 5}}\varphi'(t)dt = \int \frac{-2}{1+t^2}dt = -2arctg\ t.$$

Ca urmare, pentru $\mathrm{x} \in (-1, 5)$, avem

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = -2arctg\sqrt{-\frac{x-5}{x+1}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Remarca Se observa ca, pentru $\mathrm{x} \in (-1,5)$, avem

$$\sqrt{-x^2+4x+5} = \sqrt{-(x+1)(x-5)} =$$

$$\sqrt{-(x+1)^2\frac{x-5}{x+1}} = (x+1)\sqrt{-\frac{x-5}{x+1}},$$

Ceea ce justifica substitutia facuta.

Remarca Daca $\Delta = 0$, atunci trinomul ax^2+bx+c este un patrat perfect si ca urmare, radicalul nu mai este prezent. Apare in schimb functia modul si primitiva se calculeaza avand in vedere acest aspect.

Exemplu

Sa calculam $\int \sqrt{x^2+4x+4}\,dx$, pe $\mathbb{R}$.

Avem $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ si atunci,

$$F(x) = \int \sqrt{x^2+4x+4}dx = \int |x+2| dx =$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{(x+2)^2}{2} + c_1 & daca\ x < -2 \\ \dfrac{(x+2)^2}{2} + c_2 & daca\ x \geq -2 \end{cases},$$

constantele c_1 *si* c_2 determinandu-se din conditia ca F sa fie primitiva pe $\mathbb{R}$ a functiei f(x) $= |\ x+2\ |$. Se constata ca $c_1 = c_2 = c\ \in\ \mathbb{R}$, astfel ca avem

$$\int \sqrt{x^2+4x+4}dx = \begin{cases} -\dfrac{(x+2)^2}{2} + c & daca\ x < -2 \\ \dfrac{(x+2)^2}{2} + c & daca\ x \geq -2 \end{cases}.$$

2.6 Calculul primitivelor functiilor binomiale

O astfel de primitiva este de forma

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx,$$

unde a ≠ 0 si $ax^n + b > 0$ pe intervalul I pe care se calculeaza primitiva, iar m, n, p sunt numere rationale date.

Primitiva se calculeaza folosind *substitutiile lui Cebîșev*:

1). daca p ∈ $\mathbb{Z}$, se face substitutia x = t^r, unde r este numitorul comun al lui m si n;

2). daca $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, se face substitutia ax^n + b = t^r, unde r este numitorul lui p;

3). daca $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, se face substitutia $\frac{ax^n + b}{x^n} = t^r$, unde r este numitorul lui p.

<u>Exemplu</u>

Sa calculam $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\sqrt[4]{x}} dx$, pentru $x > 0$.

Primitiva se mai scrie $\int x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^2 dx$. Se constata ca suntem in cazul 1) de mai sus. Ca urmare, se impune substitutia x = t^{12}. Pentru t > 0, calculam

$$H(t) = 12\int t^{-3}(t^4-1)^2 t^{11}dt = 12\left(\frac{t^{17}}{17} - 2\frac{t^{13}}{13} + \frac{t^9}{9}\right).$$

Asadar, pentru x > 0 avem

$$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx = \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} - \frac{24}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu

Sa calculam $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$, pentru x > 0.

Se constata ca suntem in cazul 2) de mai sus. Ca urmare, se impune substitutia $x^2+1=t^2$, t >1, de unde rezulta x = $\sqrt{t^2-1}$.

Calculam

$$H(t) = \int \left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 t\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int (t^2-1)t^2dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}.$$

Asadar, pentru x > 0 avem

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}{5} - \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplu

Sa calculam $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$, pentru $x > 0$.

Primitiva se mai scrie $\int x^{-2}\sqrt{x^2+1}dx$. Se constata ca suntem in cazul 3) de mai sus.

Ca urmare, se impune substitutia $\frac{x^2+1}{x^2} = t^2$, t > 1, de unde rezulta x = $\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \varphi(t)$.

Calculam

$$H(t) = \int (\varphi(t))^{-2}\sqrt{(\varphi(t))^2+1}\varphi'(t)dt = -\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = -t - \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}.$$

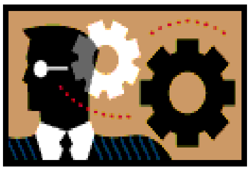
Asadar, pentru x > 0 avem

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}-1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+1} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Remarca In calculul unor primitive, se pot folosi diverse schimbari de variabile, fiecare urmarind simplificarea calculelor. Alegerea celei mai potrivite schimbari de variabile depinde de experienta. De exemplu, a). in calculul primitivei $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, se poate folosi oricare din schimbarile de variabile $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = t$, $x = asint$ sau $x = acost$ si, uneori, $\sqrt{a^2 - x^2} = t$;

b). in calculul primitivei $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, se poate folosi oricare din schimbarile de variabile $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = t$ sau $x = acht$ (urmata de schimbarea de variabila $e^t = u$) si, uneori, $\sqrt{x^2 - a^2} = t$;

c). in calculul primitivei $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$, se poate folosi oricare din schimbarile de variabile $\sqrt{x^2 + a^2} = x + t$, $x = atgt$ sau $x = asht$ (urmata de schimbarea de variabila $e^t = u$) si, uneori, $\sqrt{x^2 + a^2} = t$.



Test de autoevaluare 2

Sa se calculeze primitivele:

a). $\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$;

b). $\int \frac{cosx}{1 + cosx} dx$;

c). $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$;

d). $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

e). $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$;

f). $\int x^8 (x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}}$.

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare nr.2

b). $\int \frac{dx}{1+sin^2 x}$;

c). $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{x^3-1}}dx$;

d). $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Se observa ca fiecare primitiva de calculat corespunde unuia din tipurile de primitiva prezentate. Mai exact primitiva de la punctul a) corespunde tipului 2.1., b) corespunde tipului 2.2. s.a.m.d.

a). $2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + c$;

b). $x - tg\,\frac{x}{2} + c$;

c). $\ln(e^x+1) + c$;

d). $\frac{2}{7}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{7}{2}} + c$;

e). $2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t+1)} + c, \quad t = \sqrt{x^2-x+1} + x$; ;

f). $\frac{2}{3}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t\right) + c, t = \sqrt{x^3-1}.$

Concluzii

Este importanta cunoasterea calculului unei primitive. Asa cum vom vedea, in celelalte unitati de invatare, calculul integralelor curbilinii, duble, triple (care au aplicatii in tehnica) etc. , se vor reduce la calculul unor integrale definite, care la randul lor se reduc la calculul primitivelor.

Bibliografie

1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 3

INTEGRALA RIEMANN

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 3

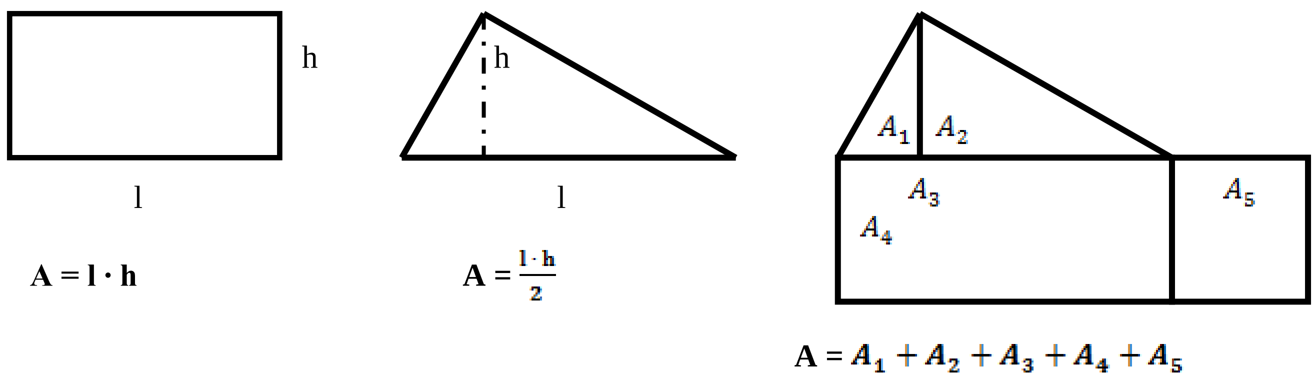
Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 3 sunt:

- Obiectiv 1 : Însușirea noțiunii de integrală Riemann și a principalelor proprietăţi ale acesteia
- Obiectiv 2 : Însușirea teoremei fundamentale a calculului integral și aplicarea acesteia în calculul integralei Riemann

3.1 Integrala Riemann. Definitie

In continuare vom analiza notiunea de arie, care ne va conduce la notiunea de integrala. Pentru multimile plane care au frontiera formata din reuniune de drepte este cunoscuta notiunea de arie (adica pentru poligoane).

De exemplu :



Vom defini si calcula aria subgraficului unei functii continue, positive. Mai precis vom calcula aria trapezului curbiliniu abBA, marginit de graficul functiei continue si pozitive f : [a,b] → ℝ, de axa 0x si dreptele x = a si x = b (vezi fig.1).

Definitia 3.1 Se numeste diviziune a intervalului [a,b] ⊂ ℝ o submultime finita de puncte

$\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ astfel incat :

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

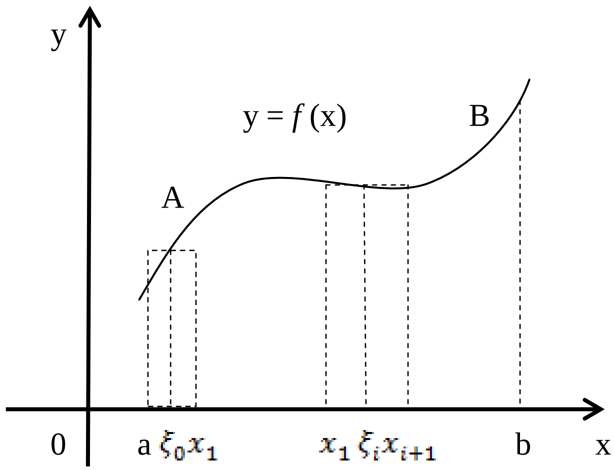
Se numeste norma diviziunii Δ, numarul

$$\|\Delta\| = \max_{0<i<n-1}(x_{i+1} - x_i).$$

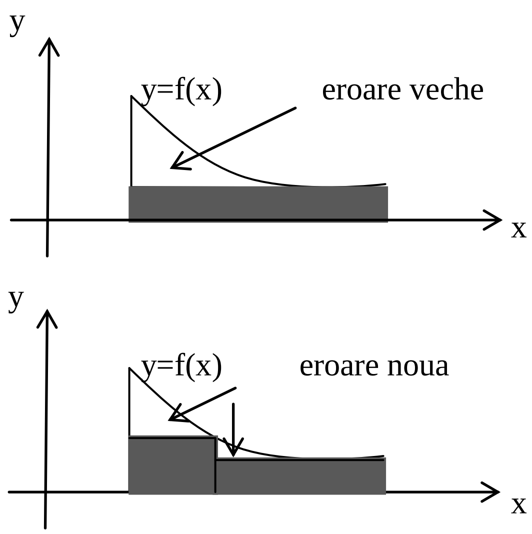
Pentru o diviziune data vom construi n dreptunghiuri avand bazele $[x_i, x_{i+1}]$ si inaltimile corespunzatoare f(ξ_i), unde ξ_i este un punct arbitrar din $[x_i, x_{i+1}]$. Aria σ_n a poligonului obtinut prin reuniunea acestor dreptunghiuri este :

$$\sigma_n = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-i} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$



Cu cat numarul intervalelor partiale $[x_i, x_{i+1}]$ este mai mare si cu cat lungimea fiecaruia este mai mica, cu atat mai bine poligonul construit aproximeaza trapezul curbiliniu (vezi fig.2).



(fig.2)

Fig.2 Folosind mai multe dreptunghiuri, obtinem o aproximare mai buna a ariei.

Definitie 3.2 Suma $\sigma_\Delta(f,\xi)$ definita prin

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

se numeste suma Riemann (suma integrala) a functiei f corespunzatoare diviziunii Δ si punctelor intermediare ξ_i.

Definitie 3.3 Se spune ca functia f este integrabila Riemann pe [a,b] , daca pentru orice sir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$

si pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i, sirurile sumelor $(\sigma_{\Delta_n}, (f,\xi))$ sunt convergente si au aceeasi limita, adica

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} \sigma_{\Delta_n}(f,\xi) = I$$

indiferent de alegerea punctelor intermediare ξ_i.

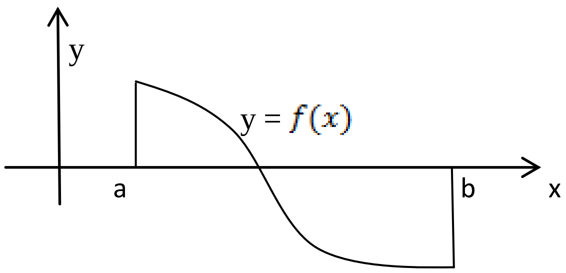
Numarul I se numeste integrala functiei f pe [a,b] si se noteaza

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Remarca

Din interpretarea geometrica a integralei definite rezulta ca aria suprafetei plane, marginita de graficul functiei continue f , axa Ox si dreptele de ecuatii x = a si x = b, este :

$$A^* = \int_a^b |f(x)|dx$$



(fig.3)

3.2 Proprietati

Teorema 3.1 (Proprietati ale integralei Riemann)

a). Proprietatea de liniaritate.

Daca functiile f_1 si f_2 sunt integrabile Riemann pe [a,b], atunci, pentru orice α, β ∈ ℝ, functia $\alpha f_1 + \beta f_2$ este integrabila pe [a,b] si

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)(x)dx = \alpha \int_a^b f_1(x)dx + \beta \int_a^b f_2(x)dx.$$

(liniaritatea integralei Riemann).

b). Proprietatea de ereditate.

Daca functia f este integrabila Riemann pe [a,b], atunci functia f este integrabila Riemann pe orice interval [c,d] ⊂ [a,b].

Reciproc, daca functia f este marginita pe [a,b] si este integrabila pe orice interval [c,d] ⊂ (a,b), atunci *f* este integrabila pe [a,b].

c). Proprietatea de aditivitate.

Fie f : [a,b] → ℝ si c ∈ (a,b). Functia f este integrabila Riemann pe [a,b] daca si numai daca f este integrabila Riemann pe [a,c] si [c,b].

In fiecare caz, are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(aditivitatea integralei Riemann).

d). Proprietatea de monotonie.

Daca functiile f_1 si f_2 sunt integrabile Riemann pe intervalul [a,b] si daca $f_1 \le f_2$, atunci

$$\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx.$$

e). Proprietatea de medie.

Daca functiile *f* si *g* sunt integrabile Riemann pe [a,b] si daca functia g este cu semn constant, atunci exista λ cuprins intre marginile m si M ale lui *f* astfel incat

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda \int_a^b g(x)dx.$$

(prima formula de medie pentru integrala Riemann).

In consecinta, daca f este continua, atunci exista c ∈ [a,b] astfel incat

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Daca functia *f* este integrabila si are primitive pe [a,b] iar functia g este monotona pe [a,b], atunci

exista ξ ∈ (a,b) astfel incat :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

(a doua formula de medie pentru integrala Riemann).

3.3 Existenta si calculul integralei Riemann. Aplicatii

I. Existenta

Teorema 3.2 Daca *f* e continua pe [a,b] atunci *f* e integrabila pe [a,b].

Teorema 3.3 *f* e integrabila pe [a,b] <=> e marginita si are un numar finit de puncte de discontinuitate.

Exemplu Fie *f* : [0,5] → ℝ, f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \in [0,1) \\ 2, & x \in (1,5] \end{cases}$.

Sa se arate ca f e integrabila Riemann pe [0,5].

Deoarece f e marginita pe [0,5] si are un singur punct de discontinuitate, rezulta conform Teoremei 3.3, ca este integrabila.

II. Calculul

Teorema 3.4 (teorema fundamentala a calculului integral)

Fie *f* : I → ℝ continua si a ∈ I, I interval.

$$Definim\ F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Atunci

i). F e derivabila pe I si F' = f pe I, i.e.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

ii). Daca G e o primitiva a lui f $(G' = f \text{ pe } I)$ si b ∈ I arbitrar, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \overset{not}{=} G \,\Big|_a^b$$

Teorema ne spune ca pentru a calcula integralam fara efort,

i.e. fara limite si sume Riemann, daca stim o primitiva.

Exemplu :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctg\ x\ \Big|_0^1 = arctg\ 1 - arctg\ 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Remarca

1). Exista functii integrabile, dar care nu au primitiva.

Functia f din Exemplul anterior este integrabila Riemann dar nu are primitiva pe intervalul [0,5]. Intr-adevar, daca F ar fi o primitiva pe intervalul [0,5] a functiei f din Exemplul anterior, atunci cu necesitate avem

$$F(x) = \begin{cases} arctgx + c_1, & x \in [0,1) \\ c_2, & x = 1 \\ 2x + c_3, & x \in (1,5] \end{cases}.$$

Continuitatea lui F in punctual x = 1 ne da $\frac{\pi}{4} + c_1 = c_2 = 2 + c_3.$

Cu aceasta, functia F devine

$$F(x) = \begin{cases} arctgx + c_1, & x \in [0,1) \\ \frac{\pi}{4} + c_1, & x = 1 \\ 2x + \frac{\pi}{4} - 2 + c_1, & x \in (1,5] \end{cases},$$

c_1 fiind o constanta reala arbitrara.

Acum, un calcul simplu ne da $F_s'(1) = \frac{1}{2}$ si $F_d'(1) = 2$, ceea ce arata ca functia F nu este derivabila in punctul x = 1 pentru nici o constanta c_1.

Aceasta contrazice faptul ca functia F este derivabila pe intervalul [0,5].

2). Exista functii care au primitiva, dar nu sunt integrabile.

Functia

$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

are primitiva pe [0,1], dar nu este integrabila pe [0,1].

Intr-adevar, fie functia

$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Se constata cu usurinta ca aceasta functie este derivabila si

$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Fie acum functia

$h : [0,1] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Se constata cu usurinta ca aceasta functie este continua. Fie H o primitiva a sa pe [0,1]. Din egalitatea $g'(x) = H'(x) - f(x)$, adevarata pentru x ∈ [0,1], rezulta ca functia f are primitive pe intervalul [0,1]. Pe de alta parte, din $f\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = 2\sqrt{2n\pi} \to \infty$ rezulta ca functia f este nemarginita pe [0,1].

Ca urmare, functia f nu este integrabila pe [0,1].

3). Exista functii care verifica conditiile din teorema Leibniz-Newton si nu sunt continue.

Intr-adevar, functia

$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

satisface aceste cerinte.

Pentru aceasta, se constata cu usurinta ca functia f este integrabila pe [0,1] (este continua pe

(0,1], discontinua in x = 0, marginita pe [0,1] si are ca primitiva pe F = H – g, unde H este o primitiva a functiei continue

h : [0,1] → ℝ, h(x) = $\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

iar *g* este functia derivabila

g : [0,1] → ℝ, g(x) = $\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Aplicatii ale integralei Riemann

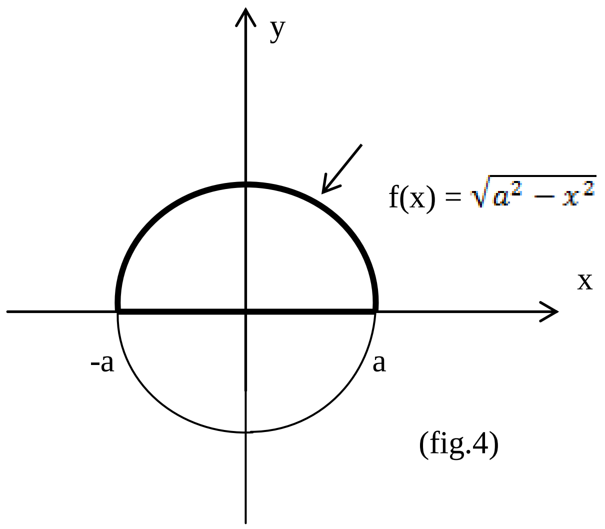
Consideram multimea plana, marginita de axa Ox, dreptele x = a, x = b si arcul de curba y = *f*(x), unde *f* e o functie pozitiva, continua pe [a,b).

Corpul generat prin rotatia trapezului curbiliniu abBA (fig.1) in jurul axei Ox are volumul

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Volumul sferei de raza a

Sfera se obtine prin rotatia semidiscului de raza a (fig.4).



(fig.4)

$-a \le x \le a$

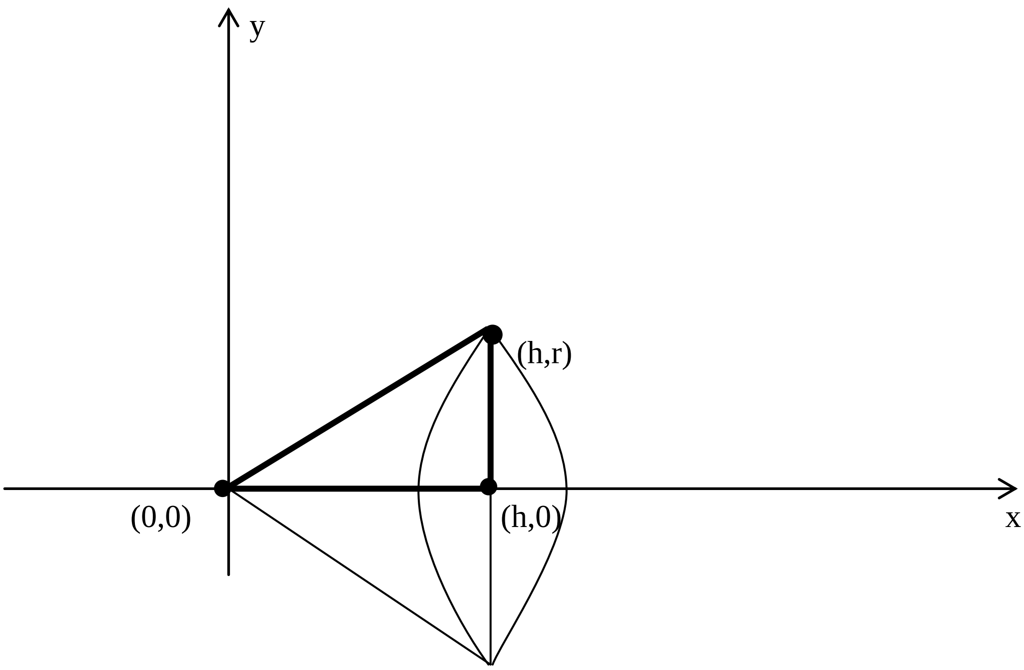
Deci

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (\sqrt{a^2 - x^2})^2\, dx = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a =$$

$$= 2\pi(a^3 - \frac{a^3}{3}) = \frac{4\pi a^3}{3}$$

- Volumul unui con circular cu raza bazei *r* si inaltimea *h*.

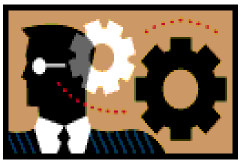
Conul se obtine prin rotirea unui triunghi cu varfurile in punctele (0,0), (h,0) si (h,r).



Scriem ecuatia dreptei ce uneste punctele (0,0) si (h,r) : $y = \frac{r}{h} \cdot x$

Deci

$$V = \pi \int_0^h (\frac{rx}{h})^2 dx = \pi(\frac{r}{h})^2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$



Test de autoevaluare 3

Sa se arate ca sunt indeplinite conditiile din Teorema fundamentala pentru $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Apoi sa se calculeze

$$I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 3

Sa se calculeze

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

$I = \ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$.

Concluzii

Pentru a calcula $\int_a^b f(x)dx$ se determina o primitive F a functiei f pe intervalul [a,b].

Se aplica apoi teorema fundamentala a analizei :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bibliografie

1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 4

INTEGRALA IMPROPRIE

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 4

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 4 sunt:

- Obiectiv 1 : Însușirea noțiunii de integrală improprie
- Obiectiv 2 : Însușirea și aplicarea principalelor criterii de convergenţă pentru integralele improprii

4.1 Integrala improprie. Definitie

Pana acum am considerat numai integrale pentru care :

1. domeniul de integrare era [a,b], un interval de lungime finita ;
2. *f* marginita pe [a,b].

Aceste integrale se mai numesc proprii.

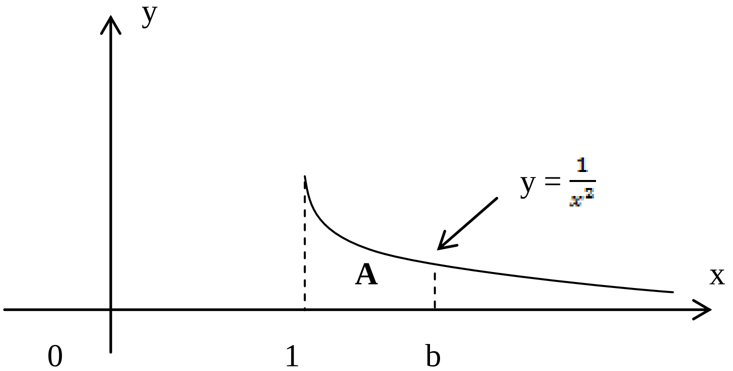
Vom da o extensie a integralei pentru intervale nemarginite, respectiv functii nemarginite.

Din punct de vedere geometric, aceasta extindere ne ofera posibilitatea de a da sens notiunii de arie pentru multimi plane, nemarginite.

Pentru o mai buna intelegere a notiunilor, vom indica cateva exemple.

<u>Exemplu</u> (cazul intervalului nemarginit)

Vrem sa calculam aria A a domeniului marginit de graficul functiei *f*(x) = $\frac{1}{x^2}$ $(x \geq 1)$, axa Ox si dreapta x = 1.



Alegem b > 1.

Pe intervalul [1,b), f(x) = $\frac{1}{x^2}$ e continua, deci e integrabila (vezi existenta integralei Riemann, Unitatea de invatare 3).

Evident ca aria subgraficului lui f (x), $1 \le x \le b$ este :

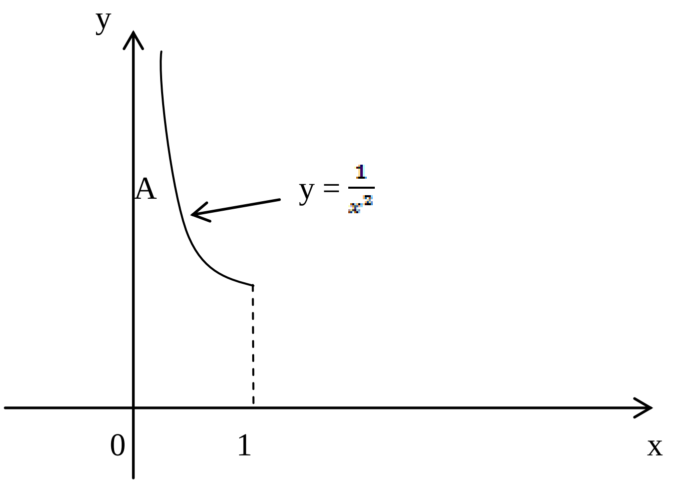
$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Pentru a calcula aria A e natural sa facem b → ∞.

$$=> A = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

<u>Exemplu</u> (cazul functiei nemarginite)

Vrem sa calculam aria A a domeniului marginit de graficul functiei f(x) = $\frac{1}{x^2}$ $(0<x\le1)$, axa Ox si dreptele x = 0 si x = 1.



Pentru aceasta alegem ε > 0.

Pe intervalul [ε,1], f(x) = $\frac{1}{x^2}$ e continua , deci e integrabila.

Evident ca aria subgraficului lui f, $\varepsilon \le x \le 1$, este :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Pentru a calcula aria A e natural sa facem ε → 0

$$\Rightarrow A = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty.$$

Fie a ∈ ℝ si b ∈ ℝ ∪ $\{+\infty\}$, $f:[a,c]\to\mathbb{R}$, f integrabila pentru toti c, cu $a<c<b$.

Definitia 4.1

$Daca\ \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}}|f(c)| = +\infty\ (cazul\ functiei\ nemarginite)\ sau\ b = +\infty$ (cazul intervalului nemarginit), atunci numim

$$\int_a^b f(x)dx - integrala\ improprie\ (in\ limita\ superioara).$$

La fel se defineste notiunea de integrala improprie in limita inferioara.

Exemplu

1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx\ e\ improprie\ in\ limita\ superioara.$

2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx\ e\ improprie\ in\ limita\ inferioara.$

Definitia 4.2

$Daca\ \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)dx\ exista\ si\ e\ finita\ atunci\ spunem\ ca\ \int_a^b f(x)dx\ converge\ (sau\ f\ e$ integrabila pe [a,b]).

In acest caz definim

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(x)dx.$$

Daca limita nu exista sau e infinita spunem ca integrala e divergenta(f nu e integrabila pe [a,b]).

Observatie

Daca $\int_a^b f(x)dx$ e improprie in ambele limite atunci integrala se descompune in 2 improprii numai intr-o limita.

Se alege un c, $a<c<b$ si spunem ca :

$$\int_a^b f(x)dx \; converge <=> \int_a^c f(x)dx \; si \int_c^b f(x)dx \; converg.$$

In acest caz definim :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u\to a\\ u>a}} \int_u^c f(x)dx + \lim_{\substack{v\to b\\ v<b}} \int_c^v f(x)dx.$$

Exemple :

Sa se studieze natura urmatoarelor integrale, folosind definitia.

1). $\int_0^\infty cosxdx$;

2). $\int_0^1 lnxdx$;

3). $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Integrala este improprie in limita inferioara (cazul intervalului nemarginit).

1). Conform definitiei avem :

$$\int_0^\infty cosxdx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a cosxdx = \lim_{a\to\infty}(sina).$$

Deoarece aceasta limita nu exista, rezulta ca integrala e divergenta.

2). Conform definitiei avem (mentionam ca integrala e improprie in limita inferioara, cazul functiei nemarginite) :

$$\int_0^1 lnxdx = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_a^1 lnxdx.$$

Functia $f(x) = lnx$ e integrabila pe [a,1] => conform teoremei de integrare prin parti pentru integralele proprii, obtinem :

$$\int_a^1 lnxdx = xlnx - x \Big|_a^1 = -1 - a \cdot lna + a.$$

In consecinta :

$$\int_0^1 lnx dx = -1 + \lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} (a - a \cdot lna) = -1 + \lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} \frac{lna}{\frac{1}{a}} = -1 + 0 = -1.$$

Deci integrala e convergenta si are valoarea -1.

3). Observam ca integrala e improprie in ambele limite.

Conform celor discutate anterior (vezi observatia) vom descompune integrala in 2 integrale improprii, alegand $c=0$.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\substack{b \to 1 \\ b < 1}} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Functia *arcsinx* este o primitiva pentru $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe orice compact $[a,b] \subset (-1,1)$. Rezulta ca:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} (+arcsin\, 0 - arcsin\, a) + \lim_{\substack{b \to 1 \\ b < 1}} (\arcsin b - \arcsin 0).$$

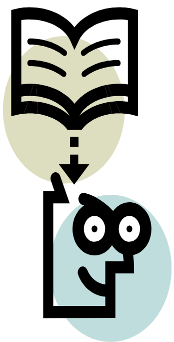
Deoarece

$$\lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} \arcsin a = -\frac{\pi}{2} \quad si \quad \lim_{\substack{b \to 1 \\ b < 1}} \arcsin b = \frac{\pi}{2},$$

obtinem

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Deci integrala e convergenta si are valoarea π.



De reţinut !

Adjectivul „impropriu” se atribuie, deci, numai acelor integrale pentru care una din limitele de integrare sau ambele sunt infinite, sau daca functia de ingrat este nemarginita pe intervalul considerat.

Proprietatile integralelor improprii se transpun fara dificultate de la integralele simple.
De asemenea se pot transpune teoremele de schimbare de variabila si integrare prin parti.

4.2 Criterii de convergenta pentru integrala improprie

Deoarece nu intotdeauna putem calcula o integrala improprie, e util sa cunoastem criterii de convergenta cu care putem stabili natura unei integrale improprii.

I. Criterii de comparatie

Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f, g: [a, b) \to \mathbb{R}$, integrabile pe fiecare compact [a,c] , $a < c < b$.

1. Criteriul de majorare

Presupunem ca $|f(x)| \leq g(x), \forall\, x \in [a, b)$, si ca $\int_b^a g(x)\, dx$ converge.

Atunci $\int_a^b f(t) dt$ converge.

2. Criteriul de minorare

Presupunem ca $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall\, x \in [a, b)$, si daca diverge integrala $\int_a^b f(t) dt$, atunci $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

3. Criteriul raportului

Fie *f,g>0* in [a,b) si presupunem ca exista

$$\lim_{\substack{t\to b \\ t<b}} \frac{f(t)}{g(t)} = L \in (0, \infty).$$

Atunci $\int_a^b f \;\; si \;\; \int_a^b g$ au aceeasi natura.

Pentru a putea aplica criteriile, e nevoie de „integrale de comparatie”, adica trebuiesc cunoscute integrale convergente sau divergente, cu care integralele de studiat sa fie comparate.

In multe cazuri se folosesc urmatoarele :

a). Pentru a > 0 se considera

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx.$$

Conform definitiei avem :

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-p}[b^{1-p} - a^{1-p}], & p \neq 1 \\ ln\frac{b}{a}, & p = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \le 1 \end{cases} .$$

Asadar, integrala improprie $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ e convergenta pentru p > 1 si divergenta pentru p ≤ 1.

b). O alta integrala utila este (a > 0)

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx.$$

Pentru a > 0, avem, conform cu definitia

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} [a^{1-p} - \varepsilon^{1-p}], & p \ne 1 \\ \ln \dfrac{a}{\varepsilon}, & p = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p < 1 \\ \infty, & p \ge 1 \end{cases} .$$

Asadar, integrala $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ e convergenta pentru p < 1 si divergenta pentru p ≥ 1.

Mai general, pentru a < b avem ca integralele

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ si } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx \text{ sunt convergente pentru } p < 1$$

si divergente pentru p ≥ *1*.

Exemple Sa se studieze, folosind criteriile de comparatie, natura urmatoarelor integrale :

1). $I = \int_1^\infty \frac{arctg\, x}{x^2} dx$;

2). $J = \int_1^\infty \frac{arctg\, x}{x} dx$;

3). $K = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < b$.

1). Pentru orice $x \in [1,\infty)$ avem inegalitatea

$$\frac{\pi}{4} \le arctg\, x < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

Rezulta ca

$$\frac{arctg\,x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2}, \qquad \forall\, x \in [1,\infty).$$

Folosind criteriul de majorare cu *f,g* :$[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{arctg\,x}{x^2}$, $g(x)=\frac{\pi}{2x^2}$ si faptul ca

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ *converge, obtinem ca I este convergenta.*

2). Din relatia (*) rezulta

$$\frac{\pi}{4x} \leq \frac{arctg\,x}{x}.$$

Folosind criteriul de minorare cu *f,g* : $[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\pi}{4x}$, $g(x) = \frac{arctg\,x}{x}$ si faptul ca

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge, obtinem ca J e divergenta.

3). Se descompune $K = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ in doua integrale :

$$K = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = K_1 + K_2, \quad a < c < b.$$

Convergenta integralei K_1, improprie in limita inferioara, rezulta imediat folosind criteriul raportului, alegand *f, g* : $(a,c] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{b-x}}.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f}{g} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \sqrt{b-x} = \sqrt{b-a} > 0$$

obtinem convergenta lui K_1.

La fel pentru K_2 (care e improprie in limita superioara).

II. Alte criterii

Criteriul lui Abel

Fie *f* continua si *g* derivabila cu derivata continua pe [a,b). Daca

i). $\int_a^b f(x)dx$ e convergenta ;

ii). *g* : $[a,b) \to \mathbb{R}$ monotona si marginita.

Atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx$ e convergenta.

Criteriul lui Dirichlet

Fie *f, g* : $[a,b) \to \mathbb{R}$, *f* continua si *g* monotona $\in C^1([a,b))$.

Daca

i). F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ e marginita in [a,b) ;

ii). $g(x) \xrightarrow{x \to b} 0$.

Atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx$ converge.

Criteriul integral

Fie f continua, $f \geq 0$ si descrescatoare pe $[k_0, \infty)$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k).$$

Cu alte cuvinte :

$$a). \quad \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx \ converge <=> \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \ converge \ ;$$

$$b). \quad \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx \ diverge <=> \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \ diverge \ .$$

Exemplu

1). Sa se studieze convergenta integralei improprii

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Observam ca

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2 \ .$$

Deoarece

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1,$$

integrala I_1 nu este improprie.

$Functia\ f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este continua pe [0,1), deci integrabila => I_1 este integrala proprie.

Pentru studiul convergentei lui I_2, aplicam criteriul lui Dirichlet cu $f,g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Evident f are o primitiva marginita pe (-*cos x*) pe $[1,\infty)$ si $g \to 0$ cand x → b = ∞.

Deci integrala e convergenta.

2). Sa se studieze natura seriei

$$\sum_{k>8}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln(\ln k)} \ .$$

Fie $f : [e^2, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(\ln x)}$$

Avem

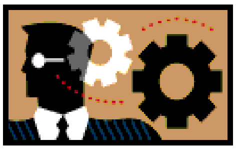
$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln(\ln x)} = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln t} \; cu\ substitutia\ \ln x = t.$$

Deoarece $\ln t < t$ pe $[2,\infty)$ =>

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\ln t}.$$

Folosind criteriul de minorare si faptul ca $\int_2^{\infty} \frac{1}{t} dt$ e divergenta => $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln t} dt$ e divergenta.

In final, folosind criteriul integral rezulta ca seria data e divergenta.



Test de autoevaluare 4

I. Sa se studieze, folosind definitia, convergenta urmatoarelor integrale :

1). $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$;

2). $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2} sin \frac{1}{x} dx$;

3). $I_3 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$.

II. Folosind un criteriu de comparatie stabiliti natura integralei :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \ .$$

III. Folosind criteriul lui Dirichlet stabiliti natura integralei :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \ .$$

IV. Folosind criteriul integral stabiliti natura seriei (armonice) in functie de *p* :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 4

Sa se stabileasca convergenta integralelor :

1). $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}$;

2). $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$;

3). $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$, $\alpha > 1$;

4). $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+1} dx$.

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

I. 1). Se aplica definitia rezultand :

$$I_1 = \lim_{\substack{b \to 1 \\ b<1}} \int_0^b \frac{1}{1-x} dx = +\infty$$

Deci I_1 e divergenta.

2). La fel obtinem ca $I_2 = \frac{1}{2}$, deci e convergenta.

3). $I_3 = \pi$.

II. Descompunem pe I astfel :

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Evident $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ e convergenta, fiind proprie.

Deoarece $x \le x^2$ pe $[1,\infty)$ =>

$-x^2 \le x$ pe $[1,\infty)$.

Rezulta ca $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ pentru $x \ge 1$.

Deoarece $\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$ e convergenta, rezulta conform criteriului de majorare, convergenta lui I.

III. Convergenta.

IV. $p > 1$ => convergenta ;

$P \le 1$ => divergenta.

Concluzii

1). Daca se cere sa se studieze natura integralei improprii $\int_a^b f(x)dx$ si sa se determine valoarea sa in caz de convergenta.

In problemele din aceasta categorie se poate determina o primitiva a functiei f cu metode elementare si se poate studia efectiv existenta limitei cu definitia.

Pentru rezolvare, se procedeaza astfel :

- se verifica daca functia f este integrabila pe orice interval compact inclus in [a,b) ;
- se determina o primitiva F a functiei f pe intervalul [a,b) ;
- se studiaza existenta limitei $\lim_{x \to b} F(x)$;
- daca aceasta limita este finita, se obtine valoarea integralei.

2). Se cere sa se studieze natura integralei improprii $\int_a^\beta f(x)dx.$

O asemenea problema apare in situatia in care nu este posibil sa se determine o primitiva pentru f si, prin urmare, aplicarea directa a definitiei nu este posibila.

Intr-o asemenea situatie nu se mai pretinde a se gasi valoarea integralei in caz de convergenta.

Pentru a preciza natura integralei, se incearca aplicarea unui criteriu de convergenta convenabil.

De exemplu criteriul de minorare / majorare sau raportului pentru a compara integrala cu una cunoscuta.

Utile sunt aici si integralele de comparatie $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$, $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$, discutate in cadrul unitatii de invatare de fata.

Bibliografie

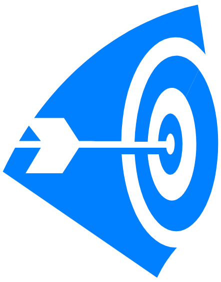
1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 5

INTEGRALA CURBILINIE

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 5



Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 5 sunt:

- Obiectiv 1 : Însușirea noțiunii de integrala curbilinie și aprincipalelor proprietăţi ale acesteia
- Obiectiv 2 : Însușirea modului de calcul al integralei curbilinii și al aplicațiilor acesteia.

5.1 Integrala curbilinie. Definitie

Fie I un interval.

Definitia 5.1. Numim curba plana multimea punctelor (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$ a.i.

$$C: \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{f(t)} \\ \mathrm{y} = \mathrm{g(t)} \end{cases}, \quad \mathrm{t} \in \mathrm{I}, \mathrm{I} = \text{interval}, \quad \mathrm{f,g} \text{ continue pe I.} \qquad (1)$$

Un interval I si o pereche (f,g) care genereaza punctele curbei C e numita parametrizare.

Este util sa introducem si notatia vectoriala a unei curbe.

$c : \vec{r} = \vec{r}\ t \quad ,t \in I,$

unde $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2$ e o functie vectoriala continua, definita prin

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath}$,t ∈ I.

In acest caz, $\vec{r}$(t) = $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, reprezinta vectorul de pozitie al punctului curent M(x,y).

Exemple :

1). Cercul centrat in origine de raza 1, $x^2 + y^2 = 1$.

Prezentam trei parametrizari:

a) x = cos t, y = sin t , 0 $\leq t \leq 2\pi$.

Vectorial

$\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{\imath} + \sin t\ \vec{\jmath} \quad ,t \in [0, 2\pi]$

b) $x = \sin s^2,\ y = \cos s^2,\ 0 \leq s \leq \sqrt{2\pi}$

c) $x = 1 - t, y = t\sqrt{2t^2}, -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

2). Fie f : I → $\mathbb{R}$ continua. Graficul ei este o curba plana, parametrizata astfel:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in I\ .$$

Definitia 5.2 Spunem ca C este neteda daca f si g sunt derivabile pe I , au derivatele continue si in plus $f' \neq 0$ pe I sau $g' \neq 0$ pe I, adica vrem ca vectorul viteza

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$$

sa fie continuu si diferit de vectorul nul.

Exemplu Curba plana $\vec{r} = t^5\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}$ nu este neteda in origine, caci

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 5t^4\vec{\imath} + 3t^2\vec{\jmath} = 0 \text{ in origine.}$$

Vom determina masa unui fir material neomogen, de grosime neglijabila, care are forma unei curbe *C* din plan, considerata neteda. Aceasta ne va conduce la notiunea de integrala curbilinie. Presupunem cunoscuta densitate a firului in fiecare punct $P \in C$ notata *f*(P).

Pentru a calcula masa firului, vom diviza curba C (avand punct initial pe A si punct terminal B) in n parti prin alegerea punctelor

$$A = P_0,\ P_1, \dots\ ,\ P_n = B\ .$$

In fiecare divizare P_kP_{k+1} consideram densitatea constanta si egala cu densitatea intr-un punct intermediar notat P_k' .

Deoarece masa firului omogen este produsul dintre densitate si lungime, rezulta ca o valoare aproximativa a masei firului P_kP_{k+1} este :

$$(\text{masa})_k = f\,(P_k') \cdot \Delta s_k,$$

unde Δs_k e lungimea firului P_kP_{k+1} .

Deci suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(P_k')\Delta s_k$$

reprezinta o aproximare a masei firului.

In consecinta suntem condusi la definitia .

Definitia 5.3

Fie $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k')\Delta s_k$.

Daca exista si e finita limita sumei σ, cand $n \to +\infty$ si

$$\Delta s = \max_{0<k<n-1} \Delta s_k \to 0,$$

indiferent de alegerea punctelor intermediare P_k' , spunem ca *f* este integrabila de-a lungul curbei C.

Limita se numeste integrala curbilinie a functiei f de-a lungul curbei C si se noteaza :

$$\int_C f(x,y)ds.$$

5.2 Proprietatile, calculul si aplicatiile integralei curbilinii

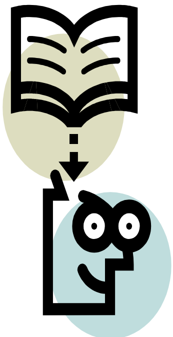
Urmatoarea teorema ne indica modul de calcul.

Teorema 5.1

Presupunem ca functia f e continua intr-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ care contine curba neteda C definita prin ecuatiile (1) .

Atunci integrala curbilinie $\int_C f(x,y)ds$ exista si

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt\,.$$



De reţinut !

Teorema ne spune ca pentru a calcula integrala curbilinie $\int_C f(x,y)ds$, avem nevoie de o parametrizare a lui C.

Proprietatile integralei curbilnii rezulta din cele ale integralei definite.

Toate rezultatele prezentate se adapteaza usor la curbele din spatiu.

De exemplu, daca avem o reprezentare parametrica a unei curbe netede din spatiu

$$C : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \lambda(t) \end{cases} ,\quad t \in [a,b]\,,$$

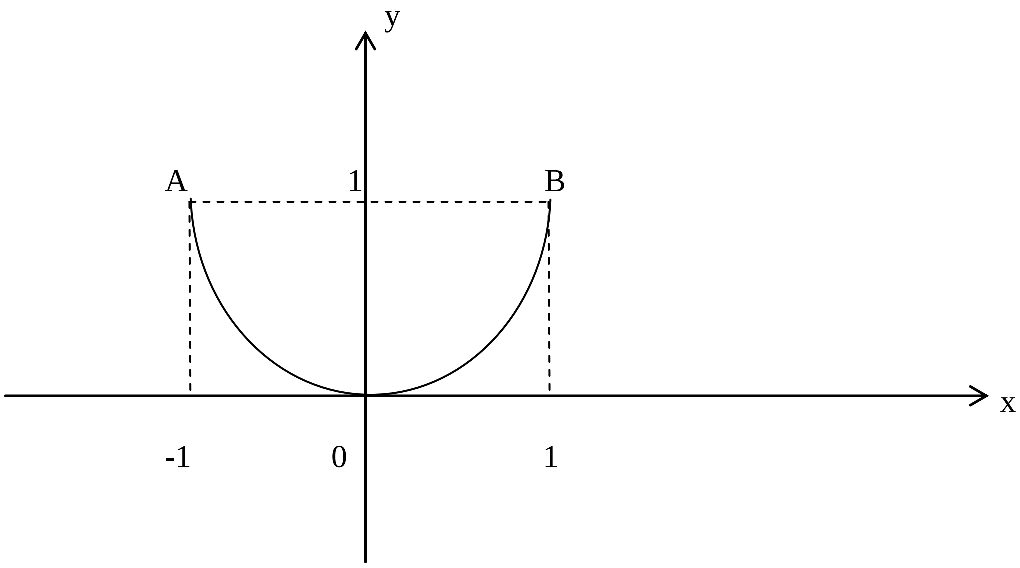
atunci integrala curbilinie

$$\int_C f(x,y,z)ds$$

se calculeaza astfel :

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt\,.$$

Exemplu Sa se calculeze $\int_C xyds$ unde C este data de $y = x^2$ (parabola), unde $x \in [-1,1]$.



Ecuatiile parametrice ale lui C sunt $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in [-1,1]$.

Conform teoremei avem :

$$\int_C xyds = \int_{-1}^{1} t^3 \cdot \sqrt{t^2 + (2t)^2}\,dt = 0$$

(deoarece se integreaza o functie impara pe un interval simetric fata de 0).

Exemplu Sa calculam integrala curbilinie

$$\int_C (x+y)ds\,,$$

curba C fiind linia franta OAB, unde A(1,0), B(2,1).

Integrala se descompune astfel :

$$\int_C (x+y)ds = \int_{[OA]} (x+y)ds + \int_{[AB]} (x+y)ds\,.$$

Reprezentarea parametrica a segmentului [OA] este

[OA] : x = t, y = 0, t ∈ [0,1] .

Asadar, conform teoremei de calcul

$$\int_{[OA]} (x+y)ds = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Reprezentarea parametrica a segmentului [AB] este

[AB] : x = t, y = t – 1, t ∈ [1,2].

Asadar,

$$\int_{[AB]} (x+y)ds = \int_1^2 (2t-1)\sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}.$$

In concluzie,

$$\int_C (x+y)ds = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}.$$

<u>Aplicatii ale integralei curbilinii de speta intai</u>

Fie un fir material *C* de grosime neglijabila care are forma unei curbe C din spatiu, considerata neteda. Presupunem ca firul material *C* are in fiecare punct (x,y,z) al sau densitatea ρ(x,y,z), presupusa a fi functie continua. In aceste conditii, se pot calcula:

1). **<u>Masa firului material *C*,</u>**

$$M = \int_C \rho(x,y,z)ds.$$

2). **<u>Coordonatele centrului de greutate G al firului material *C*,</u>**

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_C x\rho(x,y,z)ds \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_C y\rho(x,y,z)ds \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_C z\rho(x,y,z)ds \end{cases}.$$

3). **<u>Momentele de inertie ale firului material *C* fata de planele de coordonate ale sistemului de coordonate carteziene ortogonale considerat,</u>**

$$I_{xOy} = \int_C z^2\rho(x,y,z)\mathrm{ds}, I_{xOz} = \int_C y^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{ds}, I_{yOz} = \int_C x^2\rho(x,y,z)\mathrm{ds}.$$

4). **<u>Momentele de inertie ale firului material *C* fata de axele de coordonate si originea sistemului de coordonate si originea sistemului de coordonate carteziene ortogonale considerat,</u>**

$$I_{Ox} = \int_C (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{ds}, I_{Oy} = \int_C (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{ds},$$

$$I_{Oz} = \int_C (x^2+y^2)\ \rho(x,y,z)\mathrm{ds}, I_O = \int_C (x^2+y^2+z^2)\ \rho(x,y,z)\mathrm{ds}.$$

5). **<u>Atractia exercitata asupra unui punct material de catre un fir material</u>**

Punctul material M(x_0,y_0,z_0), avand masa m_0, este atras de firul material C cu densitatea $\rho(x,y,z)$ in punctul (x,y,z), cu o forta ale carei componente sunt:

$$F_x = km_0\cdot\int_\gamma \frac{(x-x_0)\rho(x,y,z)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{ds};$$

$$F_y = km_0\cdot\int_\gamma \frac{(y-y_0)\rho(x,y,z)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{ds};$$

$$F_z = km_0\cdot\int_\gamma \frac{(z-z_0)\rho(x,y,z)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\mathrm{ds}.$$

Aici k este o constanta ce depinde de alegerea unitatilor de masura.

<u>Remarca</u>

Se observa legaturile

$$I_{Ox} = I_{xOy} + I_{xOz}, I_{Oy} = I_{yOz} + I_{xOy}, I_{Oz} = I_{yOz} + I_{xOz}$$

$$I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{1}{2}\left(I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}\right),$$

care reduc calculul momentelor de inertie ale firului material *C* fata de axele de coordonate si originea sistemului de coordonate la calculul momentelor de inertie ale firului material *C* fata de planele de coordonate.

Remarca

Daca firul material *C* este omogen, atunci in formulele de mai sus trebuie luat ρ (x,y,z) = ρ_0 = constant. Apare necesar calculul lungimii firului material *C* cu formula $l_C = \int_C ds$ si atunci M = $\rho_0 l_C$. In formulele ce dau coordonatele centrului de greutate G al firului material *C* se poate lua $\rho_0 = 1$.

Remarca

Daca firul material *C* are forma unei curbe plane C (din planul xOy) si are densitatea ρ(x,y) presupusa a fi functie continua, atunci, cu aceleasi semnificatii ca mai sus,

$$M = \int_C \rho(x,y)ds, x_G = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y)ds, y_G = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y)ds,$$

$$I_{Ox} = \int_C y^2\rho(x,y)ds, I_{Oy} = \int_C x^2\rho(x,y)ds, I_O = \int_C (x^2+y^2)\rho(x,y)ds$$

Exemplu

Sa se determine coordonatele centrului de greutate al firului material omogen de forma unui semicerc de raza R.

Fie deci reprezentarea parametrica

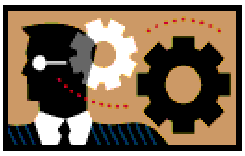
$\gamma: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}, t \in [0,\pi]$ a curbei C, ce da forma firului material *C* considerat.

Cum ds = $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = Rdt,$

formulele de mai sus ne dau

$$x_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R^2\cos t\,dt = 0, \qquad y_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R^2\sin t\,dt = \frac{2R}{\pi}.$$

Asadar, centrul de greutate G al firului material *C* este G$\left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$.



Test de autoevaluare 5

1). Sa se calculeze urmatoarea integrala

$$\int_C y^2\,\mathrm{ds}\ \text{,unde } C_1 \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t)\text{ ,}t \in [0,2\pi], \end{cases} \qquad a>0$$

2). Sa se calculeze masa si coordonatele centrului de greutate ale firului material care are reprezentarile si densitatea urmatoare

$\mathrm{x} = \mathrm{a}\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = \ln t,\quad a,b>0,\quad t\in [0,2\pi],\qquad p=1.$

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 5

Sa se calculeze :

$$\int_C ds\,,\qquad C\colon \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

<u>Indicatie:</u> C este o elipsa, care are reprezentarea parametrica

$$\begin{matrix} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{matrix}\ ,\qquad t\in[0,2\pi].$$

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

1). Se aplica teorema de calcul si se obtine :

$$\int_C y^2 ds = \frac{160}{3}a^3.$$

2). $M = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

$x_G = 0$

$y_G = 0$

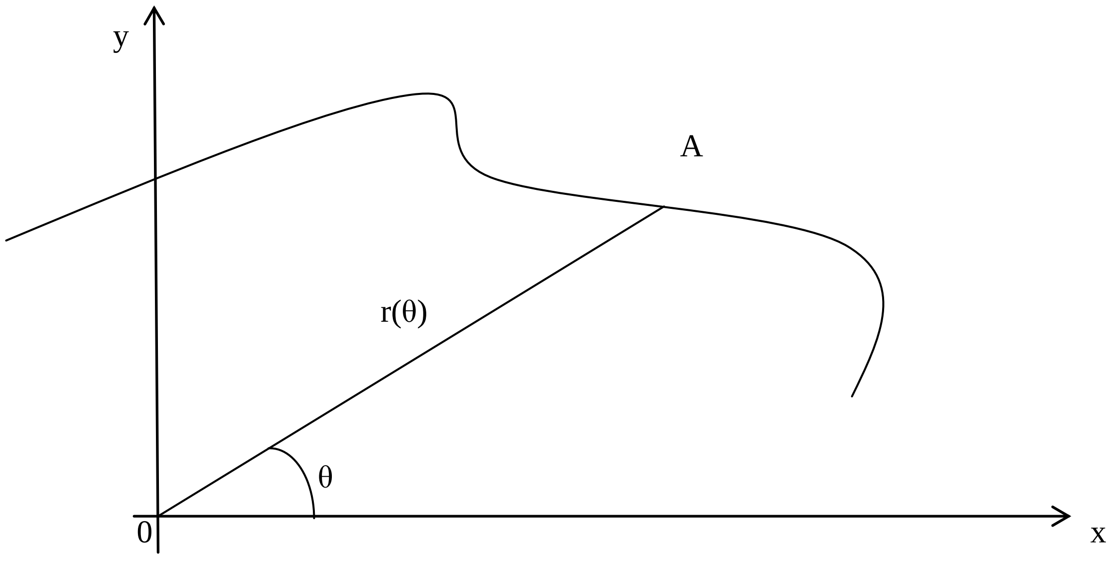
$$z_G = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ .$$

Concluzii

Pentru a calcula $\int_C f(x,y,z)\, ds$

• se scriu ecuatiile parametrice ale lui C: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t), t \in [a,b] \end{cases}$.

Daca C este o curba din $\boldsymbol{R}^2$, data prin ecuatia implicita F(x,y)=0, se poate incerca folosirea coordonatelor polare astfel: inlocuind x = r · cos θ, y = r · sin θ in ecuatia F(x,y) = 0, se obtine o relatie ce evidentiaza legatura intre raza polara r si unghiul polar θ.



Rezolvand ecuatia obtinuta se obtine r = r(θ), cu $\theta \in [a,b] \subset [0,2\pi]$ si deci

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cdot\cos\theta \\ y = r(\theta)\cdot\sin\theta \end{cases}, \theta \in [a,b]$$

care reprezinta ecuatiile parametrice ale curbei.

In unele probleme se precizeaza direct legatura dintre r si θ si de aici se obtin, ca mai inainte, ecuatiile parametrice.

• se transforma integrala curbilinie in integrala definita prin formula

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}dt.$$

• se calculeaza integrala definita.

Daca se cere sa se determine masa firului material care este curba de ecuatii ...., cu densitatea in fiecare punct $\rho(x,y,z)$ = ...

• se scriu ecuatiile parametrice ale curbei;

• se aplica formula pentru calculul masei;

• se calculeaza integrala curbilinie rezultata.

Daca se cere sa se determine coordonatele centrului de greutate al firului material care este imaginea curbei de ecuatii ...., cu densitatea sa in fiecare punct $\rho(x,y,z) =$ .... .

• se scriu scriu ecuatiile parametrice ale curbei;

• se aplica formula pentru calculul coordonatelor;

• se calculeaza integralele curbilinii rezultate.

Daca se cere sa se determine momentul de inertie in raport cu axa Ox (sau Oy sau Oz) al firului material care este imaginea curbei de ecuatii ...., cu densitatea sa in fiecare punct $\rho(x,y,z) =$ .... .

• se scriu ecuatiile parametrice ale curbei;

• se aplica formula pentru calculul momentului de inertie;

• se calculeaza integrala curbilinie rezultata.

Daca se cere sa se determine atractia exarcitata asupra punctului material M(x_0,y_0,z_0) cu masa m_0, de catre firul material, ..., avand densitatea in fiecare punct $\rho(x,y,z) =$ ..... .

• se scriu ecuatiile parametrice ale curbei;

• se aplica formula;

• se calculeaza integrala curbilinie rezultata.

Bibliografie

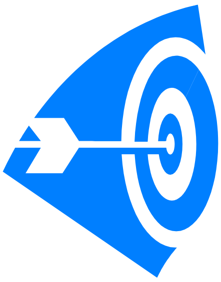
1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 6

INTEGRALA DUBLĂ

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 6



Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 6 sunt:

- Obiectiv 1 : Însușirea noțiunii de integrala dublă și a principalelor proprietăţi ale acesteia
- Obiectiv 2 : Însușirea modului de calcul al integralei duble (calculul în cazul domeniului dreptunghiular, simplu în raport cu o axă și calculul folosind metoda schimbării de variabilă) și al aplicațiilor acesteia

6.1 Integrala dubla. Definitie. Proprietati

Vom incerca sa determinam volumul solidului S, delimitat inferior de domeniul compact D din xOy, lateral de suprafata cilindrica a carei generatoare e paralela cu axa Oz si se sprijina pe frontiera lui D, iar superior de suprafata de ecuatie z = f(x,y), $f : D \to \mathbb{R}$, pozitiva si continua. In plus impunem conditia de regularitate lui D : frontiera lui D e formata dintr-un numar finit de curbe netede.

In aceasta ipoteza vom lucra in continuare, fara a mai specifica.

Definiti 6.1

Numim diviziune a domeniului D compact, $\Delta = \{D_1, \dots, D_n\}$, o familie finita de submultimi D_k , k = 1,2, ... , n, ale lui D , care

a) nu au puncte interioare comune ;

b) satisfac $D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.

Numim norma diviziunii $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, numarul $\nu(\Delta) = \max\{\text{diam}(D_1), \dots, \text{diam}(D_n)\}$, unde diam(A) e diametrul domeniului A, care se defineste ca fiind marginea superioara a distantelor dintre doua puncte oarecare ale lui A.

Obtinem astfel o divizare a solidului S in *n* solide $S_1, \dots, S_n$, avand bazele D_1, respectiv D_n .

Volumul fiecarui solid S_k il vom aproxima cu volumul V_k al unui cilindru drept cu baza D_k avand inaltimea $z_k = f(x_k^*, y_k^*)$, unde (x_k^*, y_k^*) e un punct arbitrar din D_k .

Avem $V_k = f(x_k^*, y_k^*) \cdot aria(D_k)$.

$$Evident\ ca\ \sum_{k=1}^{n} V_k\ aproximeaza\ volumul\ solidului\ S\ .$$

Aproximarea e cu atat mai buna cu cat v(Δ) e mai mic.

Rezulta :

$$Vol(S) = \lim_{v(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \cdot aria(D_k)\ .$$

Cele discutate mai sus ne conduc la urmatoarea :

Definitia 6.2 Fie f : D → ℝ, marginita.

$$Daca\ \lim_{v(\Delta)\to 0} \sigma_s(f) = \lim_{v(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \cdot aria(D_k)\ ,$$

exista si e finita, oricare ar fi alegerea punctelor intermediare (x_k^*, y_k^*) , atunci spunem ca f e integrabila pe D.

Aceasta limita se numeste integrala dubla a lui f pe D si se noteaza

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ .$$

Deci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{v(\Delta)\to 0} \sigma_s(f)\ .$$

O clasa de functii integrabile pe domeniul D (neted) este clasa functiilor continue.

Teorema Orice functie continua f pe D compact (inchis si marginit) ⊂ $\mathbb{R}^2$ e integrabila pe D.

Se poate arata ca daca int(D) e interiorul compactului D (e o multime deschisa) si ca daca f e integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{int(D)} f(x,y)dxdy\ .$$

Proprietati ale integralei duble

Daca f si g sunt functii integrabile pe D, atunci :

1) pentru orice α, β ∈ ℝ avem (liniaritate)

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)dxdy = \alpha \iint_D fdxdy + \beta \iint_D gdxdy\,;$$

2) daca $f \geq 0$ pe D rezulta (pozitivitate)

$$\iint_D fdxdy \geq 0\,;$$

3) daca D = $D_1 \cup D_2$, unde D_1 si D_2 sunt domenii compacte fara puncte interioare comune, avem (aditivitate fata de domeniu)

$$\iint_D fdxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy\,;$$

4) are loc inegalitatea

$$\left|\iint_D fdxdy\right| \leq \iint_D |f|dxdy\,.$$

6.2 Calculul integralelor duble

<u>6.2.1. Cazul domeniului dreptunghiular</u>

Consideram in rolul domeniului D un interval D_2 = [a,b] x [c,d] care reprezinta intr-un plan raportat la un sistem cartezian ortogonal de coordonate Oxy un dreptunghi cu laturile paralele cu axele Ox si Oy.

Se stie ca D_2 este o multime compacta avand aria(D_2) = (b-a)(d-c) .

<u>Teorema 6.2</u> Fie $f : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Daca :

a) f este integrabila pe D_2 = [a,b] x [c,d] ,

b) exista integrala cu parametru F : [a,b] $\to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy\,,$$

atunci F este integrabila pe [a,b] si are loc egalitatea

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\,.$$

(formula de calcul a integralei duble pe un dreptunghi) .

<u>Remarca</u> De obicei, se scrie

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \,,$$

integrala numindu-se integrala iterata in ordinea y, x a functiei f pe domeniul considerat.
Asadar, Teorema 6.2 transforma integrala dubla intr-o integrala iterata in ordinea y, x a functiei f pe domeniul considerat.

In mod asemanator, se demonstreaza

<u>Teorema 6.3</u> Fie $f : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Daca :

a). f este integrabila pe D_2 = [a,b] x [c,d] ,

b). exista integrala cu parametru G : [c,d] → ℝ, G(y) = $\int_a^b f(x,y)dx$,

atunci G este integrabila pe [c,d] si are loc egalitatea

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

(formula de calcul a integralei duble pe un dreptunghi).

<u>Remarca</u> De obicei, se scrie

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \,,$$

integrala numindu-se integrala iterata in ordinea x, y a functiei f pe domeniul considerat.
Asadar, Teorema 6.3 transforma integrala dubla intr-o integrala iterata in ordinea x,y a functiei f pe domeniul considerat.

<u>Corolar</u> Daca $f : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continua, atunci

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \,.$$

\

<u>Remarca</u> Din cele spuse anterior, rezulta ca in calculul integralei duble pe un domeniu dreptunghiular a unei functii continue ; nu conteaza ordinea de integrare.
Aceasta are importanta in ceea ce priveste complexitatea calculului.

<u>Exemplu</u> Sa se calculeze

$$\iint_{[0,1]\, x\, [-1,1]} x^2 y \sqrt{x^4 y^2 + 1}\, dxdy \,.$$

Conform Corolarului de mai sus, avem una din posibilitatile :

a).

$$\iint\limits_{[0,1]\,x\,[-1,1]} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dxdy \;=\; \int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{1} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dx\,.$$

Se constata ca in calculul integralei interioare $\int_{0}^{1} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dx$ apar unele probleme.

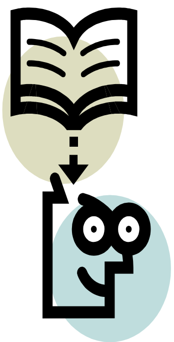
b).

$$\iint\limits_{[0,1]\,x\,[-1,1]} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dxdy \;=\; \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dy\,.$$

Acum, integrala interioara este imediata : $\int_{0}^{1} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dy = 0$

Deci

$$\iint\limits_{[0,1]\,x\,[-1,1]} x^2y\sqrt{x^4y^2+1}dxdy = 0\,.$$



De reţinut !

Calculul integralei duble pe un domeniu dreptunghiular al unei functii continue se reduce la calculul unei integrale iterate.

6.2.2. Cazul domeniului simplu in raport cu o axa

Definitie 6.3 Se spune ca un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ este simplu in raport cu una din axele de coordonate daca orice paralela la axa respectiva intersecteaza frontiera sa cel mult in doua puncte, cu exceptia situatiei in care aceasta contine segmente de dreapta paralele cu axa respectiva.

Propozitia 6.1 Fie functiile $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel incat :

a). sunt continue pe intervalul [a,b] ,

b). sunt derivabile pe intervalul (a,b) , c). φ(x) ≤ ψ(x), pentru orice x ∈ [a,b].

Atunci, multimea

D = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

este un domeniu compact care are arie in $\mathbb{R}^2$, simplu in raport cu axa Oy.

Teorema 6.4 Fie functia f : D ⊂ $\mathbb{R}^2$ → ℝ, D fiind un domeniu compact, simplu in raport cu axa Oy, definit ca in Propozitia 6.1. Daca :

a). f este integrabila pe D ,

b). exista integrala cu parametru F : [a,b] → ℝ,

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\ ,$$

atunci F este integrabila pe [a,b] si are loc egalitatea

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx\ .$$

(formula de calcul a integralei duble pe un domeniu simplu in raport cu axa Oy) .

Exemplu

Sa se calculeze $\iint_D (x+2y)dxdy\ ,$

unde D este compactul plan limitat de curbele de ecuatii y = x^2, $y^2 = $ x.

Se constata ca

D = {(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | 0 ≤ x ≤ 1, x^2 ≤ y ≤ $\sqrt{x}$ },

adica D este simplu in raport cu axa Oy.

Ca urmare,

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 (x\sqrt{x} - x^3 + x - x^4)dx = \frac{9}{20}\,.$$

Tratam in mod asemanator acum cazul domeniului simplu in raport cu axa Ox .

Propozitia 6.2 Fie functiile u, v : [c,d] → ℝ astfel incat :

a). sunt continue pe intervalul [c,d] ,

b). sunt derivabile pe intervalul (c,d) ,

c). u(y) ≤ v(y), pentru orice y ∈ [c,d] .

Atunci multimea

D = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(y) \le x \le v(y),\ c \le y \le d\}$

este un domeniu compact care are arie in $\mathbb{R}^2$, simplu in raport cu axa Ox.

Teorema 6.5 Fie functia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D fiind un domeniu compact, simplu in raport cu axa Ox, definit ca in Propozitia 6.2. Daca :

a). f este integrabila pe D ,

b). exista integrala cu parametru G : [a,b] $\to \mathbb{R}$,

$$G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx\,,$$

atunci G este integrabila pe [c,d] si are loc egalitatea

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx \right) dy\,.$$

(formula de calcul a integralei duble pe un domeniu simplu in raport cu axa Ox) .

Exemplu Reluam integrala din exemplul anterior.

Se constata ca D = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le y \le 1\}$, adica D este simplu si in raport cu axa Ox. Ca urmare,

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x+2y)dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right) \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y - y^4) + 2y(\sqrt{y} - y^2)\right) dy = \frac{9}{20}\,.$$

Remarca Daca domeniul compact D pe care se cere sa se calculeze

integrala $\iint_D f(x,y)dxdy$ nu este simplu in raport cu nici una

din axele de coordonate, atunci, prin paralele la axele de coordonate, se descompune D intr-un numar finit de subdomenii compacte masurabile Jordan

$D_1, D_2, \dots, D_m,$ avand interioarele disjuncte doua cate doua, fiecare fiind simplu in raport cu una din axele de coordonate :

$$D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i\,.$$

Folosind apoi proprietatea de ereditate si aditivitate de domeniu a integralei duble, avem :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy \,.$$

Exemplu

Sa se calculeze $\iint_D |\, xy \,| dxdy$,

unde D este domeniul compact din plan limitat de curbele de ecuatii

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, x^2 + y^2 - 4x = 0 \,.$$

Se constata ca D este discul plan limitat de cercul cu centrul in punctul (2,0) si raza 2 din care este scos discul plan limitat de cercul cu centrul in punctul (1,0) si raza 1. Se constata ca D nu este simplu nici in raport cu Ox, nici in raport cu Oy. Ducand dreapta x = 2, domeniul D se descompune in subdomeniile :

$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, \sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{4x - x^2}\right\}$,

$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, -\sqrt{4x - x^2} \le y \le -\sqrt{2x - x^2}\right\}$,

$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x \le 4, -\sqrt{4x - x^2} \le y \le \sqrt{4x - x^2}\right\}$,

fiecare dintre ele fiind simplu in raport cu axa Ox.

Deci, avem :

$$\iint_D |xy| dxdy = \iint_{D_1} xydxdy - \iint_{D_2} xydxdy + \iint_{D_3} |xy| dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} xydy - \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} xydy + \int_2^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} |xy| dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} xy^2 \Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}\right) dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2} xy^2 \Big|_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}}\right) dx +$$

$$+ \int_2^4 \left(xy^2 \Big|_0^{\sqrt{4x-x^2}}\right) dx = 2\int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 x(4x - x^2) dx = 20 \,.$$

Remarca Daca se doreste o descompunere a lui D in subdomenii simple in raport cu axa Ox, atunci, ducand dreptele de ecuatii y = -1 si y = 1, domeniul D se descompune in 5 subdomenii simple in raport cu axa Ox .

Exemplu Sa se calculeze :

$$\iint_{[0,1]x[-1,2]} (x^2y+2xy)dxdy\,.$$

Evident, domeniul dreptunghiular D = [0,1] x [-1,2] este simplu in raport cu fiecare din axele de coordonate. Consideram pe D ca fiind simplu in raport cu axa Oy. Ca urmare, din cele spuse mai sus, avem :

$$\iint_{[0,1]x[-1,2]} (x^2y+2xy)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-1}^2 (x^2y+2xy)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2y^2+xy^2\right)\Big|_{-1}^{2} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2+3x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = 2\,.$$

Exemplu Sa se calculeze integrala :

$$I = \iint_D e^{y^5}dxdy\,,\ \text{unde D este domeniul delimitata de curbele}$$

$y = \sqrt[4]{x}$, y = 1, x = 0 si x = 1.

Evident D este simplu in raport cu ambele axe.

Daca consideram D simplu in raport cu Oy obtinem

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt[4]{x}}^1 e^{y^5}dy\right)dx\,.$$

Functia e^{y^5} nu admite primitiva exprimabila cu ajutorul unor combinatii finite de functii elementare . De aceea vom calcula integrala considerand pe D simplu in raport cu Ox, ceea ce permite schimbarea ordinii de integrare.

Obtinem :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{y^4} e^{y^5}dx\right)dy = \int_0^1 y^4\cdot e^{y^5}dy = \frac{e^{y^5}}{5}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{5}\,.$$

6.2.3. Calculul integralei duble cu ajutorul schimbarii de variabila

Teorema 6.6 Fie Δ, D $\subset \mathbb{R}^2$ domenii compacte avand frontierele formate din reuniune de curbe inchise, netede, si fie transformarea regulata :

$$T : \Delta \to D,\ T(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} .$$

Daca T(Δ) = D iar f : D $\to \mathbb{R}$ este continua, atunci are loc egalitatea

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| dudv$$

(formula de schimbare de variabila in integrala dubla) .

Am notat $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$, iacobianul transformarii T,

adica $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Remarca

1). Se poate arata ca este suficient ca iacobianul transformarii sa fie diferit de zero in interiorul lui Δ .

2). Se vede analogia dintre formula de mai sus si formula de schimbare de variabila de la integrala definita :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt .$$

Aici „ iacobianul ” este φ', φ[a,b] = Δ, [φ(a),φ(b)] = D, $\Delta \xrightarrow{\varphi}$ D .

3). In cazul integralei simple se foloseste schimbarea de variabila cu scopul de a inlocui functia de integrat printr-o functie mai simpla, careia sa i se poata gasi mai usor o primitiva.

In cazul integralei duble, scopul principal al schimbarii de variabile este acela de a inlocui domeniul de integrare printr-un alt domeniu mai simplu, pentru care sa se aplice metodele de calcul de la cazul domeniului dreptunghiular.

4). Gasirea transformarii T este dictata in general de ecuatiile curbelor care formeaza frontiera lui D.

5). Una din cele mai frecvent intalnite transformari ce se folosesc in calculul integralei duble sunt cele ce permit trecerea de la coordonatele carteziene la cele polare.

Forma ei este :

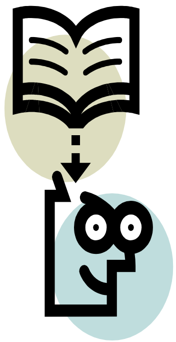
$$T: \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \quad \rho > 0,\ \theta \in [0,2\pi), \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho,$$

si permite trecerea de la coordonatele carteziene x si y la coordnatele polare ρ si θ.

De asemenea, pentru a si b numere pozitive si diferite, se foloseste transformarea regulata in plan

$$T: \begin{cases} x = a\rho \cos\theta \\ y = b\rho \sin\theta \end{cases}, \quad \rho > 0,\ \theta \in [0,2\pi), \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho,$$

permite trecerea de la coordonatele carteziene x si y la coordonatele polare generalizate ρ si θ, pentru care $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho$.



De reţinut !

In calculul unei integrale duble cu formula de schimbare de variabila, gasirea lui T constituie problema esentiala. Gasirea transformarii T urmareste ca integrala dubla pe Δ sa poata fi calculata cu una din formulele din teoremele anterioare, adica Δ trebuie sa fie simplu in raport cu una din axele de coordonate.

Exemplu Sa se calculeze

$$\iint_D (x+y)\,dxdy,$$

unde D este domeniul compact din plan limitat de curbele de ecuatii x + y = 1, x + y = 3, y = x, y = 5x.

Se constata ca prin fiecare punct al domeniului D trece o singura dreapta de ecuatie x + y = u cu u ∈ [1,3] si o singura dreapta de ecuatie y = vx, cu v ∈ [1,5]. Ca urmare, transformarea

$$(x,y) \to (u,v),\ \ u = x + y,\ v = \frac{y}{x}$$

este bijectiva de la D la $\Delta = [1,3] \times [1,5]$.

Transformarea inversa

$$T: \Delta \to D,\ T(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{v+1} \\ y = \frac{uv}{v+1} \end{cases}$$

are iacobianul $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{u}{(v+1)^2}$ si ca urmare este regulata pe Δ .

Folosind aceasta transformare regulata, formula de schimbare de variabila in integrala dubla ne conduce la

$$\iint_D (x+y)dxdy = \iint_\Delta \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 dudv = \int_1^3 du \int_1^5 \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 dv =$$

$$= \int_1^3 \left(-\frac{u^2}{v+1}\Big|_1^5\right) du = \frac{1}{3}\int_1^3 u^2 du = \frac{26}{9}.$$

<u>**Exemplu**</u> Sa se calculeze

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$$

unde D este domeniul compact din plan limitat de curbele de ecuatii

$$y = \sqrt{4-x^2}\ , \ y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Cele doua curbe sunt un semicerc respectiv o semielipsa. Axa Ox imparte domeniul D in doua subdomenii compacte, avand interioarele disjuncte, D_1 si D_2 :

$$D = D_1 \cup D_2\ ,$$

unde

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \le y \le 0\right\}.$$

Ca urmare, avem

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy + \iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy\,.$$

Pentru calculul integralei $\iint_D (x^2+y^2)dxdy\,,$

trecem la coordonate polare, prin formulele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}.$$

Pentru determinarea domeniului de variatie al coordonatelor polare ρ si θ, inlocuim aceste expresii ale lui x si y in inecuatiile ce definesc domeniul D_1 :

$$\rho\ sin\theta \ge 0\ si\ \ \rho^2 cos^2\theta + \ \rho^2 sin^2\theta \le 4\ ,$$

de unde rezulta $\theta \in [0,\pi]$, $\rho \in [0,2]$.

Exact vorbind, transformarea

$T_1: \Delta_1 = [0,2]x[0,\pi] \rightarrow D_1$, $T_1(\rho,\theta) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

este regulata pe Δ_1 . Avem $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$.

Ca urmare,

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy = \iint_{\Delta_1} (\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sin^2\theta)\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^\pi \rho^3 d\theta = 4\pi \, .$$

Pentru calculul integralei $\iint_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy$,

trecem la coordonate polare generalizate, prin formulele

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} .$$

Pentru determinarea domeniului de variatie al coordonatelor polare generalizate ρ si θ, inlocuim aceste expresii ale lui x si y in inecuatiile ce definesc domeniul D_2 :

$$\rho\sin\theta \le 0 \; si \; \frac{(2\rho\cos\theta)^2}{4} + (\rho\sin\theta)^2 \le 1$$

de unde rezulta θ ∈ [π,2π], ρ ∈ [0,1].

Exact vorbind, transformarea

$$T_2: \Delta_2 = [0,1]x[\pi, 2\pi] \rightarrow D_2 ,$$

$$T_2(\rho,\theta) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} ,$$

este regulata pe Δ_2 .

Ca urmare,

$$\iint_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy = \iint_{\Delta_2} (4\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sin^2\theta)2\rho d\rho d\theta =$$

$$= 2\int_0^1 d\rho \int_\pi^{2\pi} \rho^3 \, (4cos^2\theta + sin^2\theta)d\theta = \frac{5\pi}{4} .$$

In concluzie,

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = 4\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{21\pi}{4} .$$

<u>Exemplu</u> Sa se calculeze aria domeniului compact plan D limitat de curbele de ecuatii $y = x^2$, $2y = x^2$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

Se constata ca prin fiecare punct al domeniului D trece o singura parabola de ecuatie $x^2 = uy$ cu u ∈ [1,2] si o singura parabola de ecuatie y^2 = vx, cu v ∈ [1,2]. Ca urmare, transformarea

$$(x,y) \to (u,v),\ u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}$$

este bijectiva de la D la Δ = [1,2] x [1,2] .
Transformarea inversa

$$T : \Delta \to D,\ T(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{u^2 v} \\ y = \sqrt[3]{u v^2} \end{cases}$$

are iacobianul $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{3}$ si ca urmare este regulata pe Δ .
Folosind aceasta transformare regulata, formula de schimbare de variabila in integrala dubla ne conduce la

$$aria\ D = \iint_D dxdy = \iint_\Delta \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{3} aria\ \Delta = \frac{1}{3}.$$

6.3 Aplicatii ale integralelei duble

I. Aria unui domeniu compact din $\mathbb{R}^2$

Fie D ⊂ $\mathbb{R}^2$ un domeniu compact a carui frontiera este o curba inchisa, neteda pe portiuni (sau o reuniune finita de curbe inchise, netede pe portiuni). Atunci,

$$aria\ (D) = \iint_D dxdy\ .$$

II. Volumul subgraficului unei functii f : D ⊂ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Fie functia f : D ⊂ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua si nenegativa. Multimea

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

se numeste subgraficul functiei f si reprezinta un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, limitat de suprafata

S : z = $f(x,y)$, (x,y) ∈ D, (graficul lui f), de cilindrul proiectant al suprafetei S pe planul xOy (cu generatoarele paralele cu axa Oz) si de planul xOy. Atunci,

$$vol\ (\Gamma_f) = \iint_D f(x,y)dxdy\ .$$

III. Masa, coordonatele centrului de greutate si momentele de inertie ale unei placi materiale plane

Fie $\mathcal{P}$ o placa materiala plana neomogena, de grosime neglijabila, de forma domeniului compact $D \subset \mathbb{R}^2$. Presupunem ca placa $\mathcal{P}$ are in fiecare punct (x,y) al sau densitatea superficiala ρ(x,y), presupusa a fi functie continua. In aceste conditii, se pot calcula :

a). masa M a placii materiale $\mathcal{P}$,

$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy \,,$$

b). coordonatele centrului de greutate G al placii materiale $\mathcal{P}$,

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D x\rho(x,y)dxdy \,, \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D y\rho(x,y)dxdy \,, \end{cases}$$

c). momentele de inertie ale placii materiale $\mathcal{P}$ fata de axele de coordonate Ox si Oy si fata de originea O a sistemului de referinta,

$$I_{Ox} = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy, \qquad I_{Oy} = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy,$$

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy \,.$$

Remarca Daca placa materiala $\mathcal{P}$ este omogena, atunci in formulele de mai sus trebuie luat ρ(x,y) = ρ_0 = constant.

Ca urmare,

$$M = \rho_0 \iint_D dxdy = \rho_0 aria(\mathcal{P}).$$

In formulele ce dau coordonatele centrului de greutate G al placii materiale $\mathcal{P}$, se poate lua $\rho_0 = 1$.

Exemplu Sa se calculeze masa, coordonatele centrului de greutate si momentele de inertie ale unei placi plane de forma unui sfert de cerc de raza R si de densitate 1 + ρ^2 , unde ρ este distanta de la punctul curent al placii la centrul cercului din care provine placa.

Asadar, putem considera ca placa $\mathcal{P}$ are forma domeniului

D = {(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | x ≥ 0, y ≥ 0, $x^2 + y^2 \leq R^2$} ,

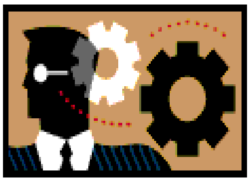
iar densitatea in punctul (x,y) este $\rho(x,y)$ = 1 + $x^2 + y^2$.

Utilizand coordonatele polare, obtinem

$$M = \frac{\pi}{8} R^2(2 + R^2),$$

$$x_G = y_G = \frac{8R(5+3R^2)}{15\pi(2+R^2)},$$

$$I_O = 2I_{Ox} = 2I_{Oy} = \frac{\pi}{24} R^4(3 + 2R^2).$$



Test de autoevaluare 6.1

Sa se calculeze urmatoarele integrale duble pe domeniile indicate :

1). $\iint\limits_D \ln(x+y)\, dxdy, \quad D = [0,1]\ x\ [1,2]$;

2). $\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$;

3). $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2 dxdy}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

1). Deoarece domeniul de integrare este dreptunghiular se aplica formula de calcul a integralei duble pentru domenii dreptunghiulare.

Se obtine :

$$\iint_D \ln(x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 \ln(x+y)\,dy \right) dx = \frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

2). Domeniul de integrare este simplu in raport cu ambele axe. El este simplu si in raport cu axa Oy si se poate scrie :

D = { (x,y) | $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ } .

Acum se poate aplica formula de calcul a integralei duble pentru domeniile simple in raport cu axa Oy si se obtine :

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}dy \right) dx = \frac{2}{3}.$$

3). Domeniul D este discul unitate. Este convenabil sa alegem pe T ca fiind

T : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ (coordonate polare) .

Pentru determinarea domeniului de variatie al coordonatelor polare ρ, θ, inlocuim expresiile lui x si y in inecuatiile ce definesc domeniul :

$$\rho^2(cos^2\theta + sin^2\theta) \le 1,$$

rezulta $\theta \in [0,2\pi]$, $\rho \in [0,1]$.

Reamintim ca $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$.

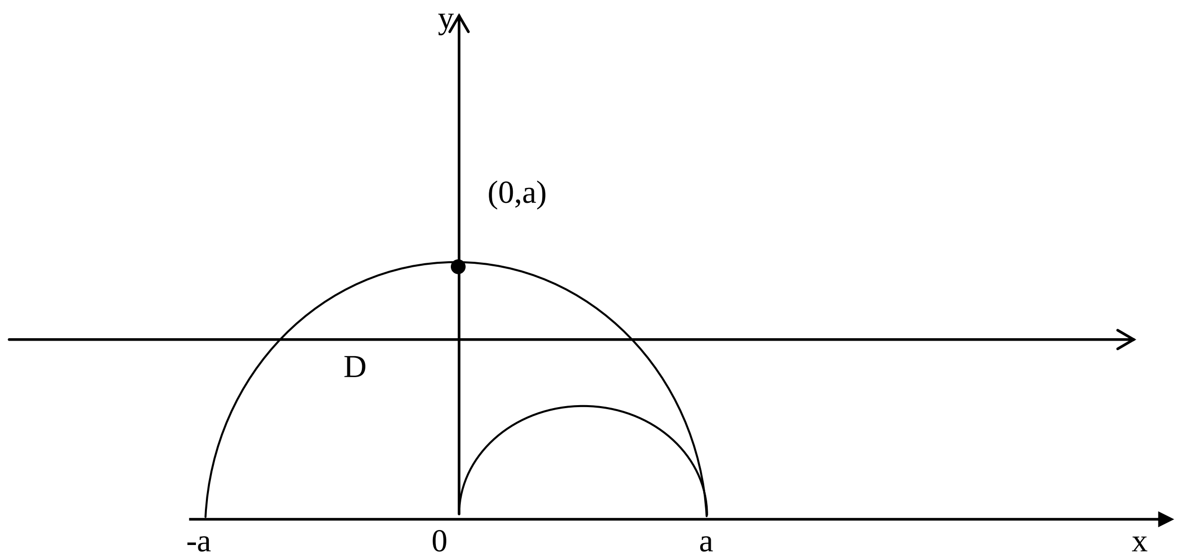
Ca urmare, folosind formula de schimbare de variabila avem :

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} .$$

4). Sa se calculeze masa si coordonatele centrului de greutate a placii omogene de densitate 1, reprezentata de domeniul

D = { (x,y) | $x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2+y^2 \geq ax,\ y \geq 0$ }, $a > 0$.

Forma placii (vezi figura), impune trecerea la coordonate polare .



Obtinem, folosind formula de schimbare de variabila :

M = $\frac{3a^2\pi}{8}$,

$x_G = -\frac{a}{6}$, $y_G = \frac{14a}{\pi}$.

6.4 Integrale duble improprii

In subcapitolele anterioare am considerat numai integrale duble pe domenii D marginite. In plus, am presupus f marginita pe D.

La fel ca in cazul integralei simple, se poate vorbi de integrale improprii, fie in cazul in care D e nemarginit, fie in cazul in care f e nemarginita in vecinatatea unui punct din D, sau a unui punct de pe frontiera lui D.

<u>6.4.1. Cazul domeniilor nemarginite</u>

Fie D $\subset \mathbb{R}^2$ o multime nemarginita si pentru fiecare r > 0, fie $D_r = \{x \in D \mid \|x\| < r\}$.

Fie f : D $\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, integrabila pe orice sectiune D_r a lui D.

<u>Definitia 6.4</u> Se spune ca functia f este integrabila in sens impropriu (sau generalizat) pe multimea nemarginita D daca limita $\lim\limits_{r\to\infty} \iint\limits_{D_r} f(x,y)dxdy$ exista si este finita .

Valoarea limitei se noteaza $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ si se numeste integrala improprie

(integrala Riemann generalizata) a functiei f pe multimea D .

Despre integrala improprie $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ se spune ca este :

- convergenta, cand limita este finita,
- divergenta, cand limita este infinita .

Prin abuz de limbaj, cand limita nu exista se spune tot ca integrala improprie

$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ este divergenta .

Exemplu Sa se stabileasca convergenta integralei improprii

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dxdy \ .$$

Pentru fiecare r > 0 consideram sirul de domenii $D_r = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \le r \}$.

Pentru fiecare r > 0, D_r e imaginea prin transformare in coordonate polare a domeniului D_r^*,

$D_r^* = \{ (\theta,\rho) \mid 0 \le \theta \le 2\pi , 0 \le \rho < r \}$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dxdy = \lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dxdy =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} e^{-\rho^2} \cos\rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\rho^2} \cos\rho^2 \cdot \rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\rho^2} \cos\rho^2 \cdot \rho\, d\rho = 2\pi \cdot I \ .$$

Calculam ultima integrala facand schimbarea de variabila t = ρ^2 . Avem astfel :

$$I = \frac{1}{2} \cdot \lim_{r\to\infty} \int_0^{r^2} e^{-t} \cos t\, dt = \frac{1}{4} .$$

In consecinta, integrala e convergenta si $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dxdy = \frac{\pi}{2}$.

6.4.2. Cazul functiilor nemarginite

Fie functia f : D ⊂ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nemarginita pe o vecinatate a unui punct $x_0 \in D$, integrabila pe orice submultime $D_r = D \setminus S(x_0, r) = \{ x \mid \|x - x_0\| < r \}$, r > 0, a domeniului compact D.

Definitia 6.5

Se spune ca functia f este integrabila in sens impropriu (sau generalizat) pe

multimea D daca limita $\lim_{r\to 0}\iint_{D_r} f(x,y)dxdy$ exista si este finita .

Valoarea limitei se noteaza $\iint_D f(x,y)dxdy$ si se numeste integrala improprie

(integrala Riemann generalizata) a functiei f pe multimea (marginita) D .

Despre integrala improprie $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ se spune ca este :

- convergenta, cand limita este finita,
- divergenta, cand limita este infinita .

Prin abuz de limbaj, cand limita nu exista se spune tot ca integrala improprie

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ este divergenta .

Exemplu Sa se calculeze

$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}dxdy$, unde D este domeniul compact $[-1,1]$ x $[-1,1]$.

Integrala trebuie inteleasa ca $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$ unde

f : D → ℝ, $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$ pentru (x,y) ∈ D, x ≠ y si in rest f ia valori arbitrare .

Fie punctele A(-1,1), B(-1,-1), C(1,-1), D(1,1) . Pentru λ ∈ (0,1), dreapta de ecuatie y = x + λ intersecteaza segmentele AD si AB in punctele E(1-λ,-1) si respectiv F(-1,λ-1), iar dreapta de ecuatie y = x – λ intersecteaza segmentele CB si CD in punctele G(λ-1,-1) si respectiv

H(1,1-λ).

Luam drept multime M domeniul hexagonal BGHDEF si atunci

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \iint_{D\setminus M} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}dxdy =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\int_{-1}^{1-\lambda} dx \int_{x+\lambda}^{1} (x-y)^{-\frac{2}{3}}dy + \int_{\lambda-1}^{1} dx \int_{-1}^{x-\lambda} (x-y)^{-\frac{2}{3}}dy\right] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\int_{-1}^{1-\lambda} -3\sqrt[3]{x-y}\,\Big|_{x+\lambda}^{1} dx + \int_{\lambda-1}^{1} -3\sqrt[3]{x-y}\,\Big|_{-1}^{x-\lambda} dx\right] =$$

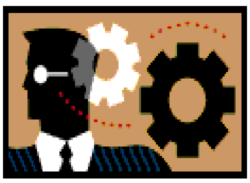
$$= 3\lim_{\lambda\to 0}\left[\int_{-1}^{1-\lambda} \left(-\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{\lambda}\right) dx + \int_{\lambda-1}^{1} \left(-\sqrt[3]{\lambda}+\sqrt[3]{x-1}\right) dx\right] =$$

$$= \frac{9}{4}\lim_{\lambda\to 0}\left[-\sqrt[3]{(x-1)^4}\,\Big|_{-1}^{1-\lambda} - 2\sqrt[3]{\lambda}(2-\lambda) + \sqrt[3]{(x+1)^4}\,\Big|_{\lambda-1}^{1}\right] =$$

$$= \frac{9}{4}\lim_{\lambda\to 0}\left[-2\sqrt[3]{\lambda^4} + 2\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{\lambda}(2-\lambda)\right] = 9\sqrt[3]{2}\ .$$

Asadar, integrala dubla improprie $\iint_{[-1,1]^2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}dxdy$ este convergenta si are

valoarea $9\sqrt[3]{2}$.



Test de autoevaluare 6.2

Sa se studieze convergenta integralei

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\text{unde}$$

D = { (x,y) | $x^2 + y^2 \le a$ } .

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Integrala este convergenta si trecand la coordonate polare, obtinem valoarea integralei 2πa .

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 6

Sa se calculeze integralele

1). $\iint_D \frac{1}{(1+y)^3} dxdy$, $D = [0,3]x\ [2,4]$.

2). $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$, D fiind compactul din plan delimitat de curbele de ecuatii

$y^2 = x,\ x = 0,\ y = 1$.

3). $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

4). $\iint_D ln(x^2 + y^2) dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Concluzii

In general, pentru calculul unei integrale duble se urmareste tipul domeniului

(dreptunghiular simplu in raport cu una din axe) . Apoi se foloseste formula de calcul corespunzatoare tipului de domeniu.

De asemenea se pot folosi si schimbari de variabile adecvate, pentru inlocuirea domeniului de integrare printr-un alt domeniu mai simplu.

Forma domeniului D impune alegerea schimbarii de variabile.

Daca domeniul e un disc, coroana circulara, sector de cerc, delimitat de o elipsa, se trece la coordonate polare (generalizate) :

$$T : \begin{cases} x = (a)\rho\cos\theta \\ y = (b)\rho\sin\theta \end{cases} .$$

Bibliografie

1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 7

INTEGRALA TRIPLĂ

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 7

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 7 sunt:

- Obiectiv 1 : Însușirea noțiunii de integrală triplă și a principalelor proprietăţi ale acesteia
- Obiectiv 2 : Însușirea modului de calcul al integralei triple (calculul în cazul domeniului paralelipipedic, simplu în raport cu o axă și calculul folosind metoda schimbării de variabilă) și al aplicațiilor acesteia

7.1 Integrala tripla. Definitie. Proprietati

Notiunea de integrala tripla se introduce in mod analog celei de integrala dubla.

Consideram $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o functie marginita pe compactul D, a carui frontiera e o reuniune finita de suprafete netede, inchise. In aceste ipoteze vom lucra in continuare, fara sa mai specificam.

Notiunea de diviziune a compactului D, de norma a diviziunii sunt absolut identice cu cele prezentate la integrala dubla, de aceea vor fi omise.

Definitia 7.1

Daca suma

$\sigma_s(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \text{volumul } (D_k)$, are limita finita cand $\nu(\Delta) \to 0$, oricare

ar fi diviziunea aleasa si oricare ar fi alegerea punctelor intermediare (x_k^*, y_k^*, z_k^*) din D_k , spunem ca functia f este integrabila pe D. Aceasta limita se numeste integrala tripla a functiei f pe D si se noteaza

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz.$$

La fel ca la integrala dubla o clasa de functii integrabile este clasa functiilor continue pe D.

Proprietatile integralei triple sunt asemanatoare cu cele ale integralei duble si vor fi omise.

7.2 Calculul integralei triple

7.2.1. Cazul domeniului paralelipipedic

Consideram in rolul domeniului D un interval tridimensional

$P_3 = [a,b] \times [c,d] \times [h,k] \subset \mathbb{R}^3$

care reprezinta in spatiul raportat la un sistem cartezian ortogonal de coordonate Oxyz un paralelipiped cu fetele paralele cu planele de coordonate xOy, xOz, yOz. Se stie ca P_3 este o multime compacta si $vol(P_3) = (b-a)(d-c)(k-h)$.

Teorema 7.1 Fie $f: P_3 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Daca:

a). f este integrabila pe $P_3 = [a,b] \times [c,d] \times [h,k]$,

b). exista integrala cu parametri

$$F: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \int_h^k f(x,y,z)dz,$$

Atunci F este integrabila pe $D_2 = [a,b] \times [c,d]$ si are loc egaliatea

$$\iiint_{P_3} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_2} \left(\int_h^k f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

(formula de calcul a integralei triple pe un paralelipiped).

Remarca De obicei, se scrie

$$\iint_{D_2} \left(\int_h^k f(x,y,z)dz \right) dxdy = \iint_{D_2} dxdy \int_h^k f(x,y,z)dz,$$

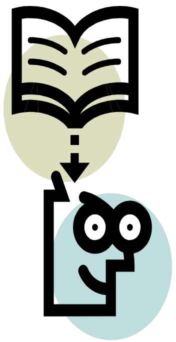
integrala numindu-se integrala iterata a functiei f pe domeniul considerat.

Corolar

Daca $f: P_3 = [a,b] \times [c,d] \times [h,k] \to R$ este continua, atunci:

$$\iiint_{P_3} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_h^k f(x,y,z)dz.$$

Alte cinci formule analoage sunt valabile. Ele se obtin prin permutarea variabilelor x,y si z. Schimband pe z cu x si apoi cu y, se pot demonstra alte doua teoreme pentru calculul integralei triple pe un paralelipied.



De reţinut !

O integrala tripla pe un domeniu paralelipipedic se poate transforma (cazul f continua) intr-o succesiune de integrale simple.

In calculul integralei triple a unei functii continue pe un domeniu paralelipipedic nu conteaza ordinea de integrare. Aceasta are importanta in ceea ce priveste complexitatea calculului.

<u>**Exemplu**</u>

Sa se calculeze

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[2,5]\times[1,3]} (x+yz)dxdydz.$$

Conform corolarului,

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[2,5]\times[1,3]} (x+yz)dxdydz = \int_0^1 dx \int_2^5 dy \int_1^3 (x+yz)dx.$$

Calculam prima integrala interioara:

$$\int_1^3 (x+yz)dz = \left(xz + y\frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^3 = 2x+4y \quad .$$

Calculam a doua integrala interioara:

$$\int_2^5 (2x+4y)dy = (2xy+2y^2)\Big|_2^5 = 6x+42.$$

In sfarsit, calculam integrala exterioara:

$$\int_0^1 (6x+42)dx = (3x^2+42x)\Big|_0^1 = 45.$$

Asadar,

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[2,5]\times[1,3]} (x+yz)dxdydz = 45.$$

Exemplu

Sa se calculeze

$$\iiint\limits_{[-1,1]\times[1,4]\times[-2,2]} xy^2z^4\sqrt{x^4y^4z^4+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz.$$

Avand in vedere Corolarul, una din cele mai bune iterari a integralei triple (in sensul simplitatii calculelor) este :

$$\iiint\limits_{[-1,1]\times[1,4]\times[-2,2]} xy^2z^4\sqrt{x^4y^4z^4+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz =$$

$$\int_{-2}^{2} dz \int_{1}^{4} dy \int_{-1}^{1} xy^2z^4\sqrt{x^4y^4z^4+x^2+y^2+z^2}\,dx.$$

Deoarece

$$\int_{-1}^{1} xy^2z^4\sqrt{x^4y^4z^4+x^2+y^2+z^2}\,dx = 0,$$

(functia e impara) este clar ca

$$\iiint\limits_{[-1,1]\times[1,4]\times[-2,2]} xy^2z^4\sqrt{x^4y^4z^4+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = 0.$$

7.2.2. Cazul domeniului simplu in raport cu axa

Definitia 7.2 Se spune ca un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ este simplu in raport cu una din axele de coordonate daca orice paralela la axa respectiva intersecteaza frontiera sa cel mult in doua puncte, cu exceptia situatiei in care aceasta contine segmente de dreapta paralele cu axa respectiva.

Propozitia 7.1 Fie functiile $\varphi, \psi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel incat:

a). sunt continue pe domeniul compact D a carui frontiera este o curba inchisa, neteda pe portiuni,

b).sunt de clasa C^1 pe interiorul lui D,

c). $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$, pentru orice (x,y)∈ D.

Atunci, multimea

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in D, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$

este un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, simplu in raport cu axa Oz.

Teorema 7.2 Fie functia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \Omega$ fiind un domeniu compact, simplu in raport cu axa Oz, definit ca in Propozitia 7.1 de mai sus. Daca:

a). f este integrabila pe Ω,

b). exista integrala cu parametru $F: D \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

atunci F este integrabila pe D si are loc egalitatea

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

(formula de calcul a integralei triple pe un domeniu simplu in raport cu axa *Oz*).

Exemplu Sa se calculeze integrala tripla

$$\iiint_{\Omega} xyzdxdydz,$$

unde Ω este domeniul compact din spatiu limitat de suprafetele de ecuatii y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0.

Se constata ca

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \le z \le xy\}$,

unde D este proiectia lui Ω pe planul xOy:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

Se constata ca Ω verifica conditiile din Propozitia 7.1 de mai sus, iar functia f(x,y,z) = xyz este continua pe Ω.

Conform teoremei, integrala tripla $\iiint_{\Omega} xyzdxdydz$ exista si are loc formula de calcul

$$\iiint_{\Omega} xyzdxdydz = \iint_{D} \left(\int_{0}^{xy} xyzdz \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D} (xy)^3 dxdy.$$

Deoarece D este simplu in raport cu axa Oy, avem :

$$\iint_{D} (xy)^3 dxdy = \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy)^3 dy = \frac{1}{4} \int_{0}^{1} x^3(x^2 - x^8)dx = \frac{1}{48}.$$

In concluzie,

$$\iiint_{\Omega} xyzdxdydz = \frac{1}{96}.$$

Remarca Se pot enunta teoreme asemanatoare pentru calculul unei integrale triple pe un domeniu simplu in raport cu axa Ox sau Oy.

Exemplu Sa se calculeze integrala tripla

$$\iiint_{\Omega} xdxdydz,$$

unde Ω este domeniul compact din spatiu limitat de suprafetele de ecuatii

$$x = \frac{y^2 + 2z^2}{4}, x = 2.$$

Se constata ca

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (y, z) \in D, \frac{y^2 + 2z^2}{4} \leq x \leq 2\right\},$$

unde D este proiectia lui Ω pe planul yOz:

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | y^2 + 2z^2 \leq 8\}.$$

Se observa ca Ω este un domeniu compact simplu in raport cu axa Ox. Domeniul D este proiectia lui Ω pe planul yOz si este un domeniu compact limitat de elipsa de ecuatie

$$\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Se constata ca Ω verifica conditii similare cu cele din Propozitia 7.1 de mai sus iar functia f(x,y,z) = x este continua pe Ω. Conform celor spuse mai sus,

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{xdxdydz},$$

exista si are loc formula de calcul

$$\iiint_{\Omega} xdxdydz = \iint_{D} \left(\int_{\frac{y^2+2z^2}{4}}^{2} xdx \right) dydz = \frac{1}{2} \iint_{D} \left(x^2 \Big|_{\frac{y^2+2z^2}{4}}^{2} \right) dydz =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D} \left(4 - \left(\frac{y^2 + 2z^2}{4} \right)^2 \right) dydz.$$

Pentru calculul acestei integrale duble, trecem la coordonate polare generalizate prin formulele

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta \\ z = 2\rho\sin\theta \end{cases}, (\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi] = \Delta .$$

Integrala dubla este egala cu

$$16\sqrt{2}\iint_{\Delta}(1-\rho^4)\rho d\rho d\theta = 16\sqrt{2}\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}(1-\rho^4)\rho d\theta = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

In concluzie,

$$\iiint_{\Omega} x dxdydz = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Remarca Daca domeniul compact Ω pe care se cere sa se calculeze integrala

$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ nu este simplu in raport cu nici una din axele de coordonate, atunci, prin suprafete cilindrice cu generatoarele paralele cu planele de coordonate, se descompune Ω intr-un numar finit de subdomenii compacte $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, avand interioarele disjuncte doua cate doua,

fiecare fiind simplu in raport cu una din axele de coordonate:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m}\Omega_1.$$

Folosind apoi proprietatea de ereditare si aditivitate de domeniu a integralei triple, avem

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \sum_{i=1}^{m}\iiint_{\Omega_i} f(x,y,z)dxdydz.$$

Exemplu Sa se calculeze integrala tripla

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz,$$

unde

$\Omega = [0,3] \times [0,3] \times [0,3] \setminus (1,2) \times (1,2) \times (1,2).$

Se observa ca Ω nu este simplu in raport cu nici una din axele de coordonate. Daca ducem prin punctele de coordonate (1,0,0) si (2,0,0) plane paralele la planul yOz, prin punctele de coordonate (0,1,0) si (0,2,0) plane paralele la planul xOz si prin punctele de coordonate

(0,0,1) si (0,0,2) plane paralele la planul xOy, domeniul Ω se divizeaza in 26 cuburi ce au fetele paralele cu planele de coordonate.

Cu formula din Teorema 7.1 se calculeaza

$$\iiint (x+y+z)dxdydz$$

pe fiecare dintre aceste 26 de cuburi si se aduna rezultatele, obtinandu-se integrala ceruta.

Mai simplu, fie $\omega = [1,2] \times [1,2] \times [1,2]$. Are loc egalitatea :

$\Omega \cup \omega = [0,3] \times [0,3] \times [0,3]$.

Deoarece Ω si ω au interioarele disjuncte, se poate scrie :

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)dxdydz + \iiint_{\omega} (x+y+z)dxdydz = \iiint_{[0,3]^3} (x+y+z)dxdydz,$$

de unde rezulta

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)dxdydz = \iiint_{[0,3]^3} (x+y+z)dxdydz - \iiint_{\omega} (x+y+z)dxdydz.$$

Calculam aceste integrale triple:

$$\iiint_{[0,3]^3} (x+y+z)dxdydz = \iiint_{[0,3]^3} xdxdydz + \iiint_{[0,3]^3} ydxdydz + \iiint_{[0,3]^3} zdxdydz =$$

$$= \iint_{[0,3]^2} dydz \int_0^3 xdx + \iint_{[0,3]^2} dxdz \int_0^3 ydy + \iint_{[0,3]^2} dxdy \int_0^3 zdz = 3 \iint_{[0,3]^2} dxdy \int_0^3 zdz =$$

$$= 3 \iint_{[0,3]^2} \frac{9}{2} dxdy = \frac{243}{2}$$

si analog,

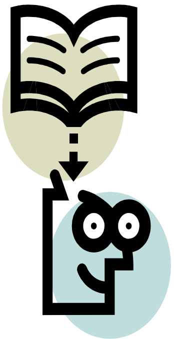
$$\iiint_{\omega} (x+y+z)dxdydz = \iiint_{[1,2]^3} (x+y+z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{[1,2]^3} xdxdydz + \iiint_{[1,2]^3} ydxdydz + \iiint_{[1,2]^3} zdxdydz =$$

$$= \iint_{[1,2]^2} dydz \int_1^2 xdx + \iint_{[1,2]^2} dxdz \int_1^2 ydy + \iint_{[1,2]^2} dxdy \int_1^2 zdz = 3 \iint_{[1,2]^2} dxdy \int_1^2 zdz = \frac{9}{2}.$$

In concluzie,

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)\,dxdydz = 117.$$



De reţinut !

Calculul unei integrale triple pe un domeniu Ω simplu in raport cu una din axe se poate reduce la calculul unei integrale simple si la calculul unei integraleduble pe domeniul D. D este proiectia lui Ω pe planul xOy in cazul cand Ω e simplu in raport cu axa Oz s.a.m.d.

7.2.3. Schimbarea de variabila

<u>Teorema 7.3</u> Fie Ω_0 si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ doua domenii compacte avand frontierele suprafete inchise si netede pe portiuni si fie transformarea regulata

$$T:\Omega_0 \to \Omega, \mathrm{T(u,v,w)} = (\mathrm{x,y,z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}.$$

Daca $T: \Omega_0 = \Omega$ iar $f:\Omega \to \mathbb{R}$ este continua, atunci are loc egalitatea

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_{\Omega_0} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)) \left|\frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

(formula de schimbare de variabila in integrala tripla).

Am notat $\dfrac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)}$ iacobianul transformarii T, adica

$$\frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Remarca

1). In cazul integralei simple se foloseste schimbarea de variabila cu scopul de a inlocui functia de integrat printr-o functie mai simpla, careia sa i se poata gasi mai usor o primitiva. In cazul integralei triple, scopul principal al schimbarii de variabile este acela de a inlocui domeniul de integrare printr-un alt domeniu mai simplu, pentru care sa se aplice metodele de calcul de la cazul domeniului paralelipipedic.

2). Gasirea transformarii T e dictata in general de ecuatiile suprafetelor care formeaza frontiera lui Ω. Cele mai frecvente transformari regulate ce se folosesc in calculul integralei triple sunt cele ce permit trecerea de la coordonatele carteziene la cele sferice (polare in spatiu), sferice generalizate (polare in spatiu generalizate) sau cilindrice.

Acestea sunt prezentate in continuare.

Transformarea :

$$T:\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

$$\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi), \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\varphi$$

permite trecerea de la coordonatele carteziene x, y si z la coordonatele sferice (polare in spatiu) ρ, θ si φ.

De asemenea , transformarea regulata in spatiu

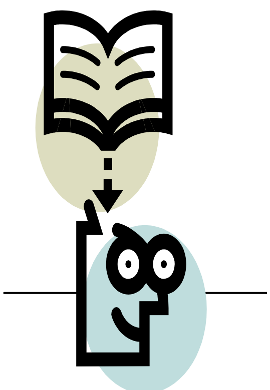
$$T:\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}, \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho$$

permite trecerea de la coordonatele carteziene x, y si z la coordonatele cilindrice ρ, θ si z.

In sfarsit, pentru a, b, c numere pozitive si cel putin doua diferite, transformarea regulata in spatiu

$$T:\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi), \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \mathrm{abc}\rho^2\sin\varphi$$

permite trecerea de la coordonatele carteziene x,y si z la coordonatele sferice generalizate (polare in spatiu generalizate) ρ, θ si φ.



De reţinut !

In calculul unei integrale triple cu formula de schimbare de variabila, gasirea lui T constituie problema esentiala. Gasirea lui T urmareste ca integrala tripla pe Ω_0 sa poate fi calculata cu ajutorul rezultatelor anterior prezentate, (Subcapitolul 7.2.), adica Ω_0 sa fie simplu in raport cu una din axele de coordonate.

Exemplu

Sa se calculeze $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$

unde Ω este portiunea din corpul sferic cu centrul in origine si raza egala cu R pentru care $0 \leq \frac{\sqrt{3}}{3} x \leq y \leq x.$

Asadar,

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{3} x \leq y \leq x. \right\}$$

Trecem la coordonate sferice, adica consideram transformarea punctual

$T: [0, \infty) \times [0,2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,$

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z), unde \begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}.$$

Se stie ca $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\varphi.$

Pentru a determina domeniul

$\Omega_0 \subset [0, \infty) \times [0,2\pi] \times [0, \pi]$

pentru care $T(\Omega_0) = \Omega$, introducem expresiile lui x, y, z in inecuatiile ce definesc pe Ω.

Obtinem

$$\rho^2 \leq R^2, 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \sin\theta \sin\varphi \leq\uparrow \rho \cos\theta \sin\varphi$$

de unde rezulta $\rho \in [0, R], \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right], \varphi \in [0, \pi].$

Lunand $\Omega_0 = [0, R] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, \pi]$, se constata ca $T(\Omega_0) = \Omega$ si ca T este transformare regulata pe Ω_0 (de fapt,pe interiorul lui Ω_0).

Conform formulei de schimbare de variabila in integrala tripla, avem :

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \iiint_{\Omega_0} \rho^4 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^R d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\pi} \rho^4 \sin\varphi d\varphi = \frac{\pi}{30} R^5.$$

Exemplu

Sa se calculeze $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,$ unde Ω este compactul limitat de elipsoidul de ecuatie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$
$= 1.$

Asadar,

$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}.$

Trecem la coordonate sferice generalizate, adica consideram transformarea punctuala

$T:[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3,$

$T(\rho,\theta,\varphi)=(x,y,z), unde \begin{cases} x=a\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases}.$

Se stie ca

$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=abc\rho^2\sin\varphi.$

Pentru a determina domeniul

$\Omega_0\subset[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$

pentru care $\mathrm{T}(\Omega_0)=\Omega$,

introducem expresiile lui x,y,z in inecuatiile ce defines pe Ω.

Obtinem $\rho^2\le 1$, de unde rezulta p $\in[0,1], \theta\in[0,2\pi], \varphi\in[0,\pi]$.

Luand $\Omega_0=[0,1)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$, se constata ca $\mathrm{T}(\Omega_0)=\Omega$ si ca T este transformare regulata pe Ω_0 (de fapt, pe interiorul lui Ω_0).

Conform formulei de schimbare de variabila in integrala tripla, avem :

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_0}abc\rho^4\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi=$$

$$=abc\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\rho^4\sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi}{5}abc.$$

Exemplu Sa se calculeze integrala tripla

$$\iiint\limits_{\Omega}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+z^2)dxdydz,$$

unde Ω este compactul limitat de suprafata cilindrica $x^2 + y^2 = R^2$ si de planele z = 0, z = h > 0.

Asadar,

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

Trecem la coordonate cilindrice, adica consideram transformarea punctuala

$T: [0, \infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$T(\rho, \theta, z) = (x, y, z), unde \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

Se stie ca

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2 \sin\varphi.$$

Pentru a determina domeniul

$\Omega_0 \subset [0, \infty) \times [0,2\pi] \times [0, \pi]$

pentru care $T(\Omega_0) = \Omega$, introducem expresiile lui x,y,z in inecuatiile ce definesc pe Ω.

Obtinem $\rho^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$, de unde rezulta $p \in [0, R], \theta \in [0,2\pi], z \in [0, h]$.

Luand $\Omega_0 = [0, R] \times [0,2\pi] \times [0, h]$, se constata ca $T(\Omega_0) = \Omega$ si ca T este transformare regulata pe Ω_0 (de fapt, pe interiorul lui Ω_0).

Conform formulei de schimbare de variabila in integrala tripla, avem :

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \iiint_{\Omega_0} (\rho^2 + z^2) \rho d\rho d\theta dz =$$

$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (\rho^2 + z^2) \rho dz = \pi R^2 h \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right).$$

Altfel, integrala se poate calcula direct:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dxdy \int_0^h (x^2 + y^2 + z^2) dz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left[(x^2 + y^2)h + \frac{h^3}{3}\right] dxdy =$$

$$= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} \left[\rho^2 h + \frac{h^3}{3}\right] \rho d\rho d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[\rho^2 h + \frac{h^3}{3}\right] d\rho d = \pi R^2 h \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right).$$

7.3 Aplicatii ale integralei triple

I. Volumul unui domeniu compact din $\mathbb{R}^3$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact a carui frontiera este o suprafata inchisa, neteda pe portiuni (sau o reuniune finita de suprafete inchise, netede pe portiuni). Atunci,

$$vol(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz.$$

II. Masa, coordonatele centrului de greutate si momentele de inertie ale unui corp material C

Fie C un corp material neomogen de forma domeniului compact $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Presupunem ca *C* are in fiecare punct (x,y,z) al sau densitatea $\rho(x, y, z)$, presupusa a fi functie continua. In aceste conditii, se pot calcula:

a). masa M a corpului,

$$M = \iiint_\Omega \rho(x, y, z) dxdydz;$$

b). coordonatele centrului de greutate G al corpului,

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \iiint_\Omega y\rho(x, y, z)dxdydz, \\ z_G = \dfrac{1}{M} \iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz, \end{cases}$$

c). momentele de inertie ale corpului

1). fata de axele de coordonate,

$$\begin{cases} I_{Ox} = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_{Oy} = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_{Oz} = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \end{cases}$$

2). fata de planele de coordonate,

$$\begin{cases} I_{xOy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_{xOz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\rho(x,y,z)dxdydz, \\ I_{yOz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)dxdydz, \end{cases}$$

3). fata de originea sistemului de referinta,

$$\mathrm{I_O} = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

III. Atractia exercitata de un corp asupra unui punct material

In conditiile de mai sus, corpul material *C atrage* punctul material A(x_0, y_0, z_0) de masa m cu o forta $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$ (indreptata spre corpul C) ale carei proiectii pe axele de coordonate sunt date de

$$\begin{cases} F_x = Km \iiint\limits_{\Omega} \frac{x - x_0}{r^3}\rho(x,y,z)dxdydz, \\ F_y = Km \iiint\limits_{\Omega} \frac{y - y_0}{r^3}\rho(x,y,z)dxdydz, \\ F_z = Km \iiint\limits_{\Omega} \frac{z - z_0}{r^3}\rho(x,y,z)dxdydz, \end{cases}$$

unde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, iar K este constanta atractiei universale.

IV. Potentialul newtonian

In conditiile de mai sus, *potentialul* corpului *C* asupra punctului A este

$$W = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)}{r} dxdydz.$$

Remarca Daca corpul material *C* este omogen, atunci in formulele de mai sus trebuie luat $\rho(x,y,z) = \rho_0 = \text{constant}$.

Ca urmare,

$$M = \rho_0 \iiint_{\Omega} dxdydz = \rho_0 \cdot \text{vol } (\Omega).$$

In formulele ce dau coordonatele centrului de greutate G ale corpului material *C*, se poate lua $\rho_0 = 1$.

Exemplu Fie *C* un corp material omogen de forma unui con circular drept de raza R si inaltime h, asezat cu varful in origine si cu baza in planul z = h. Sa se calculeze coordonatele centrului de greutate, atractia exercitata de corp asupra varfului conului precum si potentialul corpului asupra varfului conului.

Suprafata conului are ecuatia $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, astfel ca domeniul compact Ω ce da forma corpului *C* este

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le h \right.\right\}.$$

Fie ρ_0 densitatea constanta a corpului si G = $\sqrt{R^2+h^2}$ generatoarea conului.

Ca urmare, M = $\frac{\pi}{3}\rho_0 R^2 h$ si apoi,

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz = \frac{3}{\pi R^2 h}\iiint_{\Omega} zdxdydz =$$

$$= \frac{3}{\pi R^2 h}\iint_{x^2+y^2\le \mathbb{R}^2} dxdy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz =$$

$$= \frac{3h}{2\pi R^4}\iint_{x^2+y^2\le \mathbb{R}^2} (\mathbb{R}^2 - x^2 - y^2)dxdy =$$

$$= \frac{3h}{R^4}\int_0^R (R^2-\rho^2)\rho d\rho = \frac{3h}{4}.$$

Din motive de simetrie, $x_G = y_G = 0$ si ca urmare, centrul de greutate al corpului *C* este $G\left(0,0,\frac{3h}{4}\right)$.

Mai departe,

$$F_z = Km \iiint\limits_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \rho_0 dxdydz =$$

$$= Km\rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2\le\mathbb{R}^2} dxdy \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dz =$$

$$= Km\rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2\le\mathbb{R}^2} -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dxdy =$$

$$= Km\rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2\le\mathbb{R}^2} \left(\frac{R}{G}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right) dxdy =$$

$$= Km\rho_0 \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} \left(\frac{R}{G}\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right) \rho d\rho d\theta =$$

$$= 2Km\rho_0\pi \int\limits_{0}^{R} \left(\frac{R}{G} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right) d\rho = \frac{2Km\rho_0\pi h(G-h)}{G}.$$

In mod asemanator, se calculeaza

$$F_x = Km \iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \rho_0 dxdydz = 0,$$

$$F_y = Km \iiint\limits_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \rho_0 dxdydz = 0$$

si ca urmare,

$$\vec{F} = F_z\vec{k} = \frac{2Km\rho_0\pi h(G-h)}{G}\vec{k}.$$

In sfarsit, potentialul corpului asupra varfului conului este :

$$W = \rho_0 \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz =$$

$$= \rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} dxdy \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz =$$

$$= \rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} \left[\ln \frac{R\left(h+\sqrt{x^2+y^2+h^2}\right)}{(h+G)\sqrt{x^2+y^2}} \right] dxdy =$$

$$= \rho_0 \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} \left[\ln \frac{R\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)}{(h+G)\rho} \right] \rho d\rho d\theta =$$

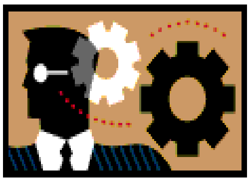
$$= 2\pi\rho_0 \int\limits_0^R \rho \left[\ln \frac{R\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)}{(h+G)\rho} \right] d\rho =$$

$$= -\pi\rho_0 \int\limits_0^R \left[\frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2+h^2}\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)} - \rho \right] d\rho =$$

$$= \pi\rho_0 \left[\frac{R^2}{2} - h^2 \int\limits_0^{arctg\frac{R}{h}} \frac{tg^3\, t}{1+\cos t} dt \right] =$$

$$= \pi\rho_0 h(G-h).$$

Test de autoevaluare 7.1



1). Sa se calculeze urmatoarele integrale triple:

a). $\iiint\limits_{\Omega} \sin x \, dxdydz, \quad \Omega = \{(x,y,z) | 0 \le x \le \pi, 2 \le y \le 3, -1 \le z \le 1\}.$

b). $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}, \quad \Omega = \{(x,y,z) | x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}.$

c). $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz, \quad \Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le z\}.$

2). Sa se calculeze masa si centrul de greutate al corpului limitat de semisfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, z ≥ 0 si a carui densitate in fiecare punct variaza proportional cu distanta de la acel punct la centrul sferei.

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

1. a) Ω este un domeniu paralelipipedic. Pentru calculul integralei se aplica formula de calcul in cazul domeniului paralelipipedic. Obtinem

$$\iiint_{\Omega} \sin x dxdydz = \int_0^{\pi}\int_2^3\int_{-1}^1 \sin x dxdydz = 4 .$$

b). Ω este limitat de planele x+y+z= 1, z=o, x=0, y=0 si este simplu in raport cu alte trei axe de coordonate. Considerand Ω simplu in raport cu Oz si notand cu D proiectia lui xOy avem $D=\{(x,y)|x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

Deci

$$\iiint_{\Omega} \frac{-dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right) dxdy$$

Se obtine in final valoarea

$$-\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

c). Trecem la coordonate sferice

$$Obtinem\ \Omega_0 = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\middle| 0\le\rho\le\cos\varphi,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

Aplicam formula de schimbare la integrala tripla si avem

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \iiint_{\Omega_0} \rho^3 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi = \frac{\pi}{6} .$$

2). Densitatea corpului este $\rho(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ iar masa M este

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dxdydz = K \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

Trecem la coordonate sferice si obtinem

$$\Omega_0 = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \,\middle|\, 0 \le \rho \le \mathrm{R},\ \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Obtinem in final

$$M = K\frac{\pi}{2}R^4.$$

Evident, datorita simetriei $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\, f(x,y,z)dxdydz = \frac{2R}{5}.$$

7.4 Integrale triple improprii

In subcapitolele anterioare am considerat numai integrale triple pe domenii D marginite. In plus, am presupus f marginita pe D.

La fel ca in cazul integralei simple si duble, se poate vorbi de integrale improprii fie in cazul in care D e nemarginit fie in cazul in care f e nemarginita in vecinatatea unui punct din D, sau a unui punct de pe frontiera lui D.

7.4.1. Cazul domeniilor nemarginite

Fie $D \in \mathbb{R}^3$ o multime nemarginita si pentru fiecare r > 0 fie $D_r = \{x \in D \mid \|x\| < r\}$.

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, integrabila pe orice sectiune D_r a lui D.

Definitia7.3 Se spune ca functia f este integrabila in sens impropriu (sau generalizat) pe multimea nemarginita D daca limita $\lim\limits_{r\to\infty} \iiint_{D_r} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\mathrm{dxdydz}$ exista si este finita.

Valoarea limitei se noteaza $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ *si se numeste integrala impropriе (integrala* Riemann generalizata) a functiei *f* pe multimea D.

Despre integrala improprie $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ se spune ca este :

-convergenta, cand limita este finita,

-divergenta, cand limita este infinita.

Prin abuz de limbaj, cand limita nu exista se spune tot ca integrala improprie

$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ este divergenta.

Exemplu

$Fie\ \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \geq \mathbb{R}^2\}\quad si$

$f: \Omega \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}, \alpha > 0.$

Sa se studieze integrabilitatea in sens impropriu a functiei f.

Pentru r > R, fie $\Omega_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | R^2 \leq x^2 + y^2 = z^2 \leq r^2\}$ si f este continua pe Ω_r.

Trecand la coordonate sferice, avem :

$$\iiint\limits_{\Omega_r} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz = \iiint\limits_{[R,r]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int_R^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\varphi}{(1+\rho^2)^\alpha} d\varphi = 4\pi \int_R^r \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho\,.$$

Se constata ca

$$\lim_{r\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_r} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz = 4\pi \int_R^\infty \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho$$

si aceasta ultima integrala improprie este convergenta daca si numai daca $\alpha > \frac{3}{2}$.

Asadar, functia f este integrabila in sens impropriu daca si numai daca $\alpha > \frac{3}{2}$. In acest caz,

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz = 4\pi \int_R^\infty \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho.$$

Facem precizarea ca integrala improprie $\displaystyle\int_R^\infty \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho\ se\ poate\ calcula\ in\ cazul\ particular$

$\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$

Pentru aceasta se stabileste mai intai o relatie de recuenta pentru

$$I_n = \int_R^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, n \geq 1 .$$

7.4.2. Cazul functiilor nemarginite

Fie functia $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, nemarginita pe o vecinatate a unui punct $x_0 \in D$ integrabila pe orice submultime $D_r = D \setminus S(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| < r,\ r > 0$, a domeniului compact D.

Definitia7.4 Se spune ca functia f este integrabila in sens impropriu (sau generalizat) pe multimea D daca limita $\lim\limits_{r \to 0} \iiint\limits_{D_r} f(x,y,z) dxdydz$ exista si este finita.

Valoarea limitei se noteaza $\iiint\limits_{D} f(x,y,z) dxdydz$ si se numeste integrala improprie (integrala Riemann generalizata) a functiei f pe multimea (marginita) D.

Despre integrala improprie $\iiint\limits_{D} f(x,y,z) dxdydz$ se spune ca este

-convergenta, cand limita este finita,

-divergenta, cand limita este infinita.

Prin abuz de limbaj, cand limita nu exista se spune tot ca integrala improprie

$\iiint\limits_{D} f(x,y,z) dxdydz$ este divergenta.

Exemplu Sa se studieze integrala tripla improprie

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz,$$

Ω fiind compactul limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ iar $\alpha > 0$.

Integrala trebuie inteleasa ca $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dxdydz$, *unde*

$$f: \Omega \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, & daca\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ a, & daca\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases},$$

a fiind o constanta reala (oarecare).

Se constata ca $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ este un domeniu compact, iar f este continua pe $\Omega \setminus \{(0,0,0)\}$ si nemarginita pe o vecinatate a originii.

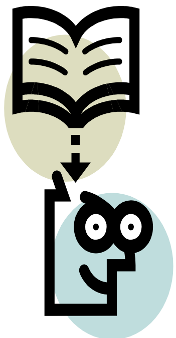
Pentru r ∈ (0,1), $\Omega_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ si ca urmare,

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} dxdydz = \lim_{r\to 0} \iiint_{\Omega_r} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} dxdydz =$$

$$= \lim_{r\to 0} \iiint_{[r,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho^{2\alpha}} d\rho d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3-2\alpha}, \alpha < \frac{3}{2}.$$

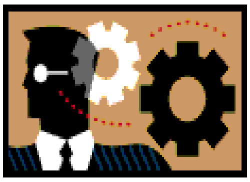
Asadar, integrala tripla improprie data este convergenta numai pentru

$\alpha < \frac{3}{2}$ si are valoarea $\frac{4\pi}{3-2\alpha}$.



De reţinut !

Adjectivul „impropriu” se atribuie numai acelor integrale pentru care domeniul de integrare e nemarginit, sau pentru care functia e nemarginita pe o vecinatate a unui punct din D.



Test de autoevaluare 7.2

Sa se studieze convergenta integralei improprii

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\alpha\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)} |z| dxdydz, \qquad \alpha > 0 .$$

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 7

Sa se studieze convergenta integralei improprii

$$\iiint_{\Omega} \ln(x^2+y^2+z^2) dxdydz, \qquad \Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

Convergenta .

Concluzii

In general, pentru calculul unei integrale triple se urmareste tipul domeniului (paralelipipedic, simplu in raport cu una din axe). Apoi se aplica formula de calcul corespunzatoare tipului domeniului.

De asemenea se pot folosi si schimbari de variabile adecvate, pentru inlocuirea domeniului de integrare printr-un alt domeniu mai simplu.

Forma domeniului D impune alegerea schimbarii de variabile.

Cele mai frecvent intalnite sunt:

$$T:\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

$$\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi), \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin\varphi$$

permite trecerea de la coordonatele carteziene x, y si z la coordonatele sferice (polare in spatiu) $\rho, \theta\ si\ \varphi$, si transformarea

$$T:\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}, \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$$

permite trecerea de la coordonatele carteziene x, y si z la coordonatele cilindrice ρ, θ si z.

Bibliografie

1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential și integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003

Unitatea de învăţare nr. 8

INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ

Cuprins **Pagina**

OBIECTIVELE unităţii de învăţare nr. 8

Principalele obiective ale Unităţii de învăţare nr. 8 sunt:

- Obiectiv 1 : Însușirea noțiunii de suprafaţă și de arie a unei suprafaţe. Calculul ariei unei suprafeţe
- Obiectiv 2 : Însușirea noțiunii de integrală de suprafaţă și a principalelor proprietăţi ale acesteia
- Obiectiv 3 : Însușirea modului de calcul al integralei de suprafaţă și al aplicațiilor acesteia

8.1 Notiunile de suprafata, arie a unei suprafete si calculul ei

Inainte de a calcula aria unei suprafete, definim notiunea de suprafata.

Definitia 8.1 O suprafata S in spatiu este multimea punctelor M(x,y,z) ale caror coordonate verifica una din conditiile :

1) $z = f(x,y)$, $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua ;
2) $F(x,y,z) = 0$, $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua ;
3) $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$, $f, g, h : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue .

In primul caz spunem ca suprafata e data explicit, in al doilea caz implicit, iar in al treilea caz parametric.

Notam ca in cazul al treilea se mai foloseste o notare echivalenta (vectoriala) :

$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Delta$,

unde $\vec{r} : \Delta \to \mathbb{R}^3$ e o functie vectoriala continua definita prin :

$\vec{r}(u,v) = f(u,v)\vec{i} + g(u,v)\vec{j} + h(u,v)\vec{k}$.

In acest caz, $\vec{r}(u,v) = \overrightarrow{OM}$ reprezinta vectorul de pozitie al punctului curent M(x,y,z) $\in$ S, coordonatele x, y si z fiind date de $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$.

Definitia 8.2 Suprafata S este neteda daca functiile f, F, respectiv x, y, z au derivatele partiale continue, derivate partiale ce nu se anuleaza simultan in nici un punct din domeniile lor de definitie, adica :

a. $f_x'^2 + f_y'^2 \neq 0$;

b. $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$;

c. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

unde A, B, C, sunt (in cazul reprezentarii parametrice) determinantii functionali :

A = $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, B = $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, C = $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$,

unde $\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$, etc.

Exemple :

1). Sfera de raza 1, centrata in origine, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ are reprezentarea parametrica :

$\vec{r}(\theta, \varphi) = sin\varphi cos\theta \vec{\imath} + sin\varphi sin\theta \vec{\jmath} + cos\varphi \vec{k}$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Sfera este o suprafata neteda .

2). Conul z = $\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ are reprezentarea parametrica :

$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho cos\theta \vec{\imath} + \rho sin\theta \vec{\jmath} + \rho \vec{k}$,

$0 \leq r \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Conul este o suprafata neteda, cu exceptia punctului (0,0,0) .

3). Cilindrul $x^2 + (y-1)^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$.

Pentru a determina o parametrizare a cilindrului folosim coordonate cilindrice .

Un punct (x,y,z) va avea coordonatele :

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases} .$$

Deci pentru punctele de pe cilindrul $x^2 + (y-1)^2 = 1$, avem

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 <=> r^2 - 2rsin\theta + 1 = 1.$

Rezulta $r = 2sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$.

Obtinem astfel coordonatele :

$$\begin{cases} x = \cos\theta \cdot 2\sin\theta = 2\sin 2\theta \\ y = \sin\theta \cdot 2\sin\theta = 2sin^2\theta \\ z = z \end{cases} .$$

Obtinem parametrizarea :

$\vec{r}(\theta, z) = (2sin2\theta)\vec{\imath} + 2sin^2\theta \vec{\jmath} + z\vec{k},$

$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq z \leq 1$.

Fie S o suprafata avand ecuatiile parametrice :

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \quad , (u,v) \in \Delta$$

sau echivalent, ecuatia vectoriala :

$$`\vec{r} = \vec{r}(u,v) = f(u,v)\vec{i} + g(u,v)\vec{j} + h(u,v)\vec{k}\,, (u,v) \in \Delta\,,$$

unde $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact neted.

Presupunem ca functiile *f*, *g*, *h* admit derivate partiale pe Δ .

Fie vectorii :

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\vec{k}\,,$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\vec{k}\,.$$

Definitia 8.3 Se spune ca suprafata S are arie daca integrala dubla

$$\iint_{\Delta} \|\vec{r}_u \; x \; \vec{r}_v\| \, dudv$$

exista si este finita .

In acest caz, valoarea integralei duble reprezinta aria suprafetei S .

Aici am notat cu $u \; x \; v$ produsul vectorial a doi vectori

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\,;$$

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\,.$$

$$\vec{u} \; x \; \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

sau mai concis

$$\vec{u} \; x \; \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\,.$$

Pentru calculul ariei avem urmatoarele rezultate.

Teorema 8.1 Orice suprafata neteda sau neteda pe portiuni (formata dintr-un numar finit de suprafete netede) are arie.

In plus, daca suprafata are reprezentarea parametrica

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \quad , (u,v) \in D\,,$$

are loc formula de calcul :

$$Aria(S) = \iint_D \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, dudv \,,$$

unde

$$A = \frac{D(g,h)}{D(u,v)},\ B = \frac{D(h,f)}{D(u,v)},\ C = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}.$$

Definitia 8.4 Expresia diferentiala

$$d\sigma = \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}dudv$$

se numeste element de arie al suprafetei S (suprafata data prin ecuatii parametrice) .

Exemplu Sa se determine aria portiunii din emisfera de ecuatie $x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$, $z \geq 0$, cuprinsa in interiorul cilindrului de ecuatie $x^2 + y^2 = \mathrm{R}y$.

O reprezentare parametrica a emisferei date este :

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}cos\theta sin\varphi \\ y = \mathrm{R}sin\theta sin\varphi \\ z = \mathrm{R}cos\varphi \end{cases} \quad , (\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\tfrac{\pi}{2}] .$$

Pentru a determina domeniul de variatie Δ pentru θ si φ corespunzator interiorului cilindrului, punem conditia :

$$(\mathrm{R}cos\theta sin\varphi)^2 + (\mathrm{R}sin\theta sin\varphi)^2 \leq \mathrm{R}^2 sin\theta sin\varphi \,,$$

de unde obtinem $sin\varphi \leq sin\theta$ si ca urmare,

$$\Delta = \{(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} - |\tfrac{\pi}{2} - \theta| \,,\, \theta \in [0,\pi]\} .$$

Calcule simple ne conduc la :

$$A = \frac{D(g,h)}{D(\theta,\varphi)} = -\mathrm{R}^2 cos\theta sin^2\varphi$$

$$B = \frac{D(h,f)}{D(\theta,\varphi)} = -\mathrm{R}^2 sin\theta sin^2\varphi$$

$$C = \frac{D(f,g)}{D(\theta,\varphi)} = -\mathrm{R}^2 sin\varphi cos\varphi \,.$$

Ca urmare, elementul de arie pentru emisfera considerata, in coordonate sferice, este

$$d\sigma = \sqrt{A^2(\theta,\varphi) + B^2(\theta,\varphi) + C^2(\theta,\varphi)}d\theta d\varphi = \mathrm{R}^2 sin\varphi d\theta d\varphi \,.$$

Acestea fiind zise, aria ceruta este :

$$A = \iint_\Delta \mathrm{R}^2 sin\varphi d\theta d\varphi =$$

$$= \mathrm{R}^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\theta} sin\varphi d\varphi \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{\pi-\theta} sin\varphi d\varphi \right) d\theta \right] =$$

$$= \mathrm{R}^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+cos\theta)\,d\theta\right]=\mathrm{R}^2(\pi-2).$$

Remarca In formula care da aria suprafetei S, determinantii functionali A, B, C depind in mod evident de functiile *f, g, h,* adica de reprezentarea parametrica a suprafetei S . In legatura cu aria unei suprafete netede, se poate arata ca este independenta de reprezentarea parametrica.

Remarca Daca se introduc notatiile :

$$\mathrm{E} = \vec{r_u}\cdot\vec{r_u} = \|\vec{r_u}\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2,$$

$$\mathrm{F} = \vec{r_u}\cdot\vec{r_v} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}\ ,$$

$$\mathrm{G} = \vec{r_v}\cdot\vec{r_v} = \|\vec{r_v}\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2,$$

si se foloseste identitatea lui Lagrange

$$(ay - xb)^2 + (bz - yc)^2 + (cx - za)^2 =$$

$$= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2,$$

atunci se obtin egalitatile

$$\|\vec{r_u}\ x\ \vec{r_v}\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2}$$

si ca urmare, pentru aria unei suprafete netede mai avem si formula

$$Aria(S) = \iint_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}\,dudv\ .$$

Propozitia 8.1 O suprafata proiectabila pe planul xOy,

$$\Sigma : z = f(x,y),\ f : \mathrm{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f\ \in C^1(D)\,,$$

D fiind un domeniu compact, are arie, data de formula :

$$Aria(\Sigma) = \iint_D\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\ dxdy\,,$$

unde

$$\mathrm{p} = \frac{\partial f}{\partial x},\ \ \mathrm{q} = \frac{\partial f}{\partial y}\ \ (\text{ notatiile lui Monge }) .$$

Definitia 8.5 Expresia diferentiala

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}dxdy$$

se numeste element de arie al suprafetei Σ (suprafata proiectabila pe planul xOy) .

Exemplu Reluam Exemplul de mai sus . Portiunea din emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$, $z \geq 0$, cuprinsa in interiorul cilindrului de ecuatie $x^2 + y^2 = \mathrm{R}y$ este suprafata proiectabila pe planul xOy

$$\Sigma : z = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}\,, (x, y) \in D\,,$$

unde D $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \mathrm{R}y\}$.

Avem

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}\,,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}$$

si ca urmare, aria suprafetei Σ este

$$Aria(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dxdy =$$

$$= \iint_D \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}} dxdy \quad .$$

Pentru calculul acestei integrale duble, se trece la coordonate polare, adica se considera transformarea

$$\mathrm{T} : \Delta \to \mathrm{D},\ \mathrm{T}(\rho,\theta) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} .$$

Pentru determinarea domeniului Δ, inlocuim pe x si y cu expresiile lor in functie de ρ si θ in inecuatia ce defineste pe D ; se obtine astfel $\rho^2 \leq \mathrm{R}\rho\sin\theta$. Rezulta de aici ca $\sin\theta \geq 0$ si $0 \leq \rho \leq \mathrm{R}\sin\theta$. Asadar,

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \mid \theta \in [0,\pi],\ 0 \leq \rho \leq \mathrm{R}\sin\theta\} .$$

Ca urmare

$$\iint_D \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \iint_\Delta \frac{\mathrm{R}\rho}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2}} d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\mathrm{R}\sin\theta} \frac{\mathrm{R}\rho}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2}} d\rho = -\mathrm{R}\int_0^\pi \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2}\ \Big|_0^{\mathrm{R}\sin\theta} d\theta =$$

$$= \mathrm{R}^2 \int_0^\pi (1 - |\cos\theta|) d\theta = (\pi - 2)\mathrm{R}^2.$$

Asadar, Aria(Σ) = $(\pi - 2)\mathrm{R}^2$.

8.2 Integrala de suprafata. Proprietati, calculul si aplicatiile integralei de suprafata

Fie S o suprafata neteda cu reprezentarea parametrica

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \quad , \ (u,v) \in \Delta ,$$

$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ fiind un domeniu compact neted .

Fie $\delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m\}$ o diviziune a lui Δ. Fie S_i portiunea din suprafata S corespunzatoarea subdomeniului compact Δ_i. Astfel, diviziunea δ a lui Δ induce diviziunea $d = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ a lui S. Fiecare suprafata S_i este continuta intr-o sfera cu raza minim posibila; cel mai mare dintre diametrele acestor sfere se numeste norma diviziunii d, notata $\|d\|$.

Este clar ca $\|d\| \to 0 \Leftrightarrow \|\delta\| \to 0$. In fiecare suprafata S_i consideram punctele oarecare $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ multimea lor o notam (ξ,η,ς) si o numim sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d.

Fie o functie $F : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, G fiind o multime deschisa ce contine suprafata S.

Definitia 8.6

Numarul

$$\sigma_d(F,\xi,\eta,\varsigma) = \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i) aria(S_i)$$

se numeste suma integral Riemann asociata functiei F, diviziunii d si sistemului de puncte intermediare (ξ,η,ς) asociat diviziunii d.

Definitia 8.7 Se spune ca functia F este integrabila pe suprafata S daca exista un numar real I (care depinde de F) cu proprietatea ca pentru orice sir de diviziuni (d_n) ale suprafetei S cu $\|d_n\| \to 0$ si pentru orice alegere a unui sistem de puncte intermediare $(\xi_n, \eta_n, \varsigma_n)$ asociat diviziunii d_n sa avem $\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(F, \xi_n, \eta_n, \varsigma_n) = I$. Numarul I se noteaza :

$$I = \iint_S F(x,y,z)\, d\sigma$$

si se numeste integrala de suprafata de speta intai (sau integrala de suprafata in raport cu aria) a functiei F pe suprafata S.

Pentru calculul integralei de speta intai avem urmatoarele rezultate.

Teorema 8.2 Orice functie continua $F : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este integrabila pe orice suprafata neteda $S \subset G$. Daca S este data prin reprezentarea parametrica de mai sus, are loc egalitatea\

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\Delta} F\big(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv.$$

Exemplu Sa se calculeze

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)d\sigma \quad ,$$

unde S are reprezentarea parametrica :

$$S:\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases} ,\ (\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \text{ x } [0,\tfrac{\pi}{2}] = \Delta .$$

Aplicand formula din Teorema 8.2 si tinand cont ca $d\sigma = R^2\sin\varphi d\theta d\varphi$,

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)d\sigma = \iint\limits_{\Delta} R^4\sin\varphi d\theta d\varphi = 2\pi R^4 .$$

Remarca In formula de calcul a integralei de suprafata din teorema de mai sus, functia care apare in integrala dubla depinde in mod evident de functiile *f*, *g*, *h*, adica de reprezentarea parametrica a suprafetei S. In legatura cu aceasta, se poate arata ca integrala de suprafata a unei functii continue pe o suprafata neteda e independenta de reprezentarea parametrica.

Teorema 8.3 Fie o suprafata proiectabila pe planul xOy,

$$\Sigma : z = f(x,y),\ f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f \in C^1(D) ,$$

D fiind un domeniu compact .

Orice functie continua $F : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este integrabila pe suprafata neteda $\Sigma \subset G$ si are loc egalitatea :

$$\iint\limits_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dxdy .$$

Exemplu Reluam calculul integralei din Exemplul de mai inainte.

Suprafata S are ecuatia :

$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $(x,y) \in D$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$.

Avem :

$p = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

si ca urmare

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)d\sigma = \iint\limits_{D}\frac{R^3}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = 2\pi R^4 .$$

Remarca Mai simplu,

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)d\sigma = \iint_S \mathrm{R}^2 d\sigma = \mathrm{R}^2 aria(S) = 2\pi \mathrm{R}^4 .$$

In ceea ce priveste proprietatile integralei de suprafata, precizam ca ele sunt asemanatoare cu cele ale integralei duble.

De exemplu, Proprietatea de ereditate si aditivitate de domeniu a integralei de suprafata poate fi formulata astfel :

Fie suprafata S care admite descompunerea S = $S_1 \cup S_2$, S_1 si S_2 fiind suprafete netede avand in comun cel mult puncte ale bordurilor lor. Atunci, functia $F : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este integrabila pe suprafata S ⊂ G daca si numai daca ea este integrabila pe fiecare din suprafetele S_1 si S_2.

In fiecare caz, are loc egalitatea :

$$\iint_S F(x,y,z)d\sigma = \iint_{S_1} F(x,y,z)d\sigma + \iint_{S_2} F(x,y,z)d\sigma .$$

Exemplu Sa se calculeze

$$\iint_S xyzd\sigma ,$$

unde S este frontiera tetraedrului OABC, A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) .

Suprafata S este formata din patru suprafete netede - fetele tetraedrului.

Ca urmare, $\iint_S xyzd\sigma$ este egala cu suma a patru integrale de suprafata .

Dintre acestea, trei integrale sunt nule, deoarece integrantul f = xyz se anuleaza pe trei fete ale tetraedrului. Asadar ,

$$\iint_S xyzd\sigma = \iint_{(ABC)} xyzd\sigma = \iint_{(OAB)} xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy = \frac{\sqrt{3}}{120},$$

dupa cum usor se poate constata .

Aplicatii ale integralei de suprafata de speta intai

I. Aria unei suprafete S, neteda sau neteda pe portiuni este

$$aria\ (S) = \iint_S d\sigma\ .$$

II. Masa, coordonatele centrului de greutate si momentele de inertie ale unei placi materiale curbe

Fie $\mathcal{P}$ o placa materiala curba neomogena, de grosime neglijabila, de forma unei suprafete S, neteda sau neteda pe portiuni. Presupunem ca placa $\mathcal{P}$ are in fiecare punct (x,y,z) al sau densitatea superficiala ρ(x,y,z), presupusa a fi functie continua.

In aceste conditii, se pot calcula :

a). masa M a placii,

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)d\sigma\ ;$$

b). coordonatele centrului de greutate G al placii,

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_S x\rho(x,y,z)d\sigma \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_S y\rho(x,y,z)d\sigma \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_S z\rho(x,y,z)d\sigma \end{cases} ;$$

c). momentele de inertie ale placii

1). fata de axele de coordonate,

$$\begin{cases} I_{Ox} = \displaystyle\iint_S (y^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma \\ I_{Oy} = \displaystyle\iint_S (x^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma \\ I_{Oz} = \displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)d\sigma \end{cases} ;$$

2). fata de planele de coordonate,

$$\begin{cases} I_{xOy} = \iint\limits_S z^2 \rho(x,y,z)d\sigma \\ I_{xOz} = \iint\limits_S y^2 \rho(x,y,z)d\sigma \quad ; \\ I_{yOz} = \iint\limits_S x^2 \rho(x,y,z)d\sigma \end{cases}$$

3). fata de origine,

$$I_O = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)d\sigma \; .$$

III. Atractia exercitata de o placa curba asupra unui punct material

In conditiile de mai sus, placa materiala $\mathcal{P}$ atrage punctul material A(x_0, y_0, z_0) de masa m cu o forta $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$ (indreptata spre placa $\mathcal{P}$) ale carei proiectii pe axele de coordonate sunt date de :

$$\begin{cases} F_x = Km \iint\limits_S \frac{x - x_0}{r^3} \rho(x,y,z)d\sigma \\ F_y = Km \iint\limits_S \frac{y - y_0}{r^3} \rho(x,y,z)d\sigma \quad , \\ F_z = Km \iint\limits_S \frac{z - z_0}{r^3} \rho(x,y,z)d\sigma \end{cases}$$

unde r = $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, iar K este constanta atractiei universale.

IV. Potentialul newtonian

In conditiile de mai sus, potentialul placii $\mathcal{P}$ asupra punctului A este :

$$W = \iint\limits_S \frac{\rho(x,y,z)}{r} d\sigma \; .$$

Remarca Daca placa materiala $\mathcal{P}$ este omogena, atunci in formulele de mai sus trebuie luat $\rho(x,y,z) = \rho_0 = constant$.

Ca urmare, $M = \iint\limits_S \rho_0 d\sigma = \rho_0 \cdot aria(P)$.

In formulele ce dau coordonatele centrului de greutate G ale placii materiale $\mathcal{P}$, se poate lua $\rho_0 = 1$.

Exemplu Se da o placa materiala $\mathcal{P}$ de forma suprafetei conice z = $\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \le 1$ si avand densitatea superficiala $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Sa se determine coordonatele centrului de greutate, momentele de inertie fata de axe, fata de planele de coordonate si fata de origine precum si potentialul placii asupra varfului si atractia suferita de varf din partea placii (varful se considera de masa m) .

Se aplica formulele de mai sus. Pentru suprafata conica data, elementul de arie este $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$, pentru ca suprafata se proiecteaza in domeniul compact D = {(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$ | $x^2+y^2 \le 1$} pe planul xOy.

Obtinem :

$$M = \iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = 2\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{4\pi}{3},$$

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_S x\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = \frac{2}{M}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 0,$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_S y\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = \frac{2}{M}\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 0,$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = \frac{2}{M}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \frac{3}{4},$$

$$I_{xOy} = \iint_S z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = 2\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy = \frac{4\pi}{5},$$

$$I_{xOz} = \iint_S y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = 2\iint_D y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{2\pi}{5},$$

$$I_{yOz} = \iint_S x^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = 2\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{2\pi}{5},$$

$$I_{Ox} = \iint_S (y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = I_{xOy} + I_{xOz} = \frac{6\pi}{5},$$

$$I_{Oy} = \iint_S (x^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}d\sigma = I_{xOy} + I_{yOz} = \frac{6\pi}{5},$$

$$I_{Oz} = \iint_S (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma = I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{4\pi}{5}\,,$$

$$I_O = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{8\pi}{5}\,.$$

In sfarsit, potentialul placii asupra varfului este :

$$W = \iint_S \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,d\sigma = \iint_S d\sigma = \pi RG\,,$$

iar atractia suferita de varf din partea placii este data de :

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\,,$$

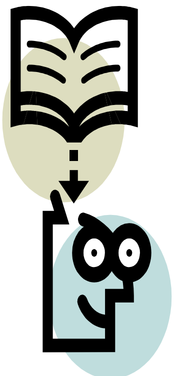
unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$F_x = Km\iint_S \frac{x}{r^3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma = 0\,,$$

$$F_y = Km\iint_S \frac{y}{r^3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma = 0\,,$$

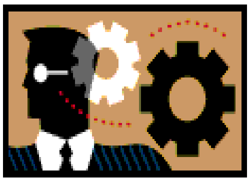
$$F_z = Km\iint_S \frac{z}{r^3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma = Km\iint_S \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma =$$

$$= \frac{Km}{2}\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma = Km\pi\sqrt{2}\,.$$



De reţinut !

Calculul integralei de suprafata de speta intai se reduce la calculul unei integrale duble in cazul in care cunoastem reprezentarea parametrica a suprafetei sau in cazul in care cunoastem reprezentarea explicita a suprafetei (suprafata proiectabila) .



Test de autoevaluare 8

1). Sa se calculeze aria regiunii de pe suprafata Pamantului (identificat cu o sfera de raza R = 6400 km) situata intre longitudinile $\varphi = 30^0$, $\varphi = 60^0$, latitudinile $\lambda = 45^0$, $\lambda = 60^0$.

2). Sa se calculeze

$$\iint_S (x+y+z)d\sigma ,$$

unde S este portiunea planului $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, situat in primul octant .

3). Calculati

$$\iint_S (x+z)d\sigma ,$$

unde S este portiunea situata in primul octant a cilindrului $y^2+z^2=9$, intre x = 0 si x = 4 .

4). Sa se determine momentul de inertie, in raport cu planul xOy, al portiunii de suprafata $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$, stiind ca densitatea in fiecare punct este $\rho(x,y,z) = 1+xy$.

Lucrare de verificare la Unitatea de învăţare 8

1). Sa se calculeze ariile urmatoarelor suprafete :

a) $z = x^2+y^2$, $z \in [0,R]$;

b) $(x^2+y^2+z^2)^2 = xy$.

2). Sa se calculeze urmatoarele integrale de suprafata :

a) $$\iint_S (x+y+z)d\sigma \, ,$$

unde S este suprafata cubului $[0,1]^3$;

b) $$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d\sigma \, ,$$

unde S este portiunea din suprafata de ecuatie $x^2+y^2=z^2$, cuprinsa intre planele z = 0 si z = 1 ;

c) $$\iint_S \frac{1}{1+z} d\sigma \, ,$$

unde S este portiunea din suprafata paraboloidului 2z = x^2+y^2 , cuprinsa in interiorul cilindrului $x^2+y^2=1$;

d) $$\iint_S z^2 d\sigma \, ,$$

unde S e definita de ecuatiile parametrice x = $u\cos v$, y = $u\sin v$, z = hu, u ∈ [0,1], v ∈ [0,2π] .

3). Se da o placa materiala $\mathcal{P}$ de forma suprafetei cilindrice $x^2+y^2=1, \; z \in [0,1]$ si avand densitatea superficiala ρ(x,y,z) = 1 + z. Sa se determine coordonatele centrului de greutate, momentele de inertie fata de axe, fata de planele de coordonate si fata de origine precum si potentialul placii asupra centrelor bazelor si atractia suferita de fiecare din aceste puncte (presupuse de masa m) din partea placii.

Răspunsuri şi comentarii la întrebările din testele de autoevaluare

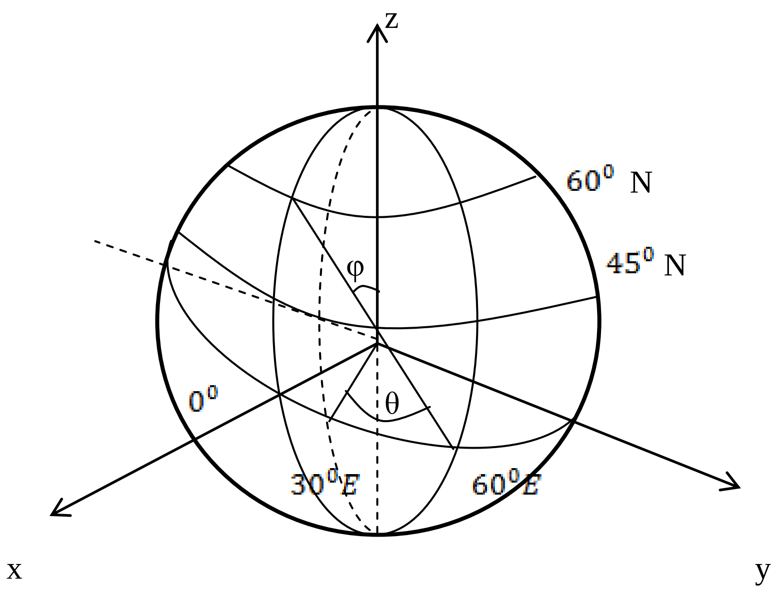
1). Consideram Pamantul reprezentat geometric de sfera de ecuatie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

care admite parametrizarea :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \sin\varphi \\ y = R\sin\theta \sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi .$$

Considerand planul Oxz ca fiind planul meridianal ce trece prin meridianul Greenwich (corespunzator longitudinii de 0 grade), iar planul Oxy ca planul ecuatorial, regiunea geografica a carei arie se cere, corespunde domeniului :

D = $\{(\theta,\varphi) \mid \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$.



Aplicand formula de calcul a ariei in cazul in care suprafata e data parametric, avem :

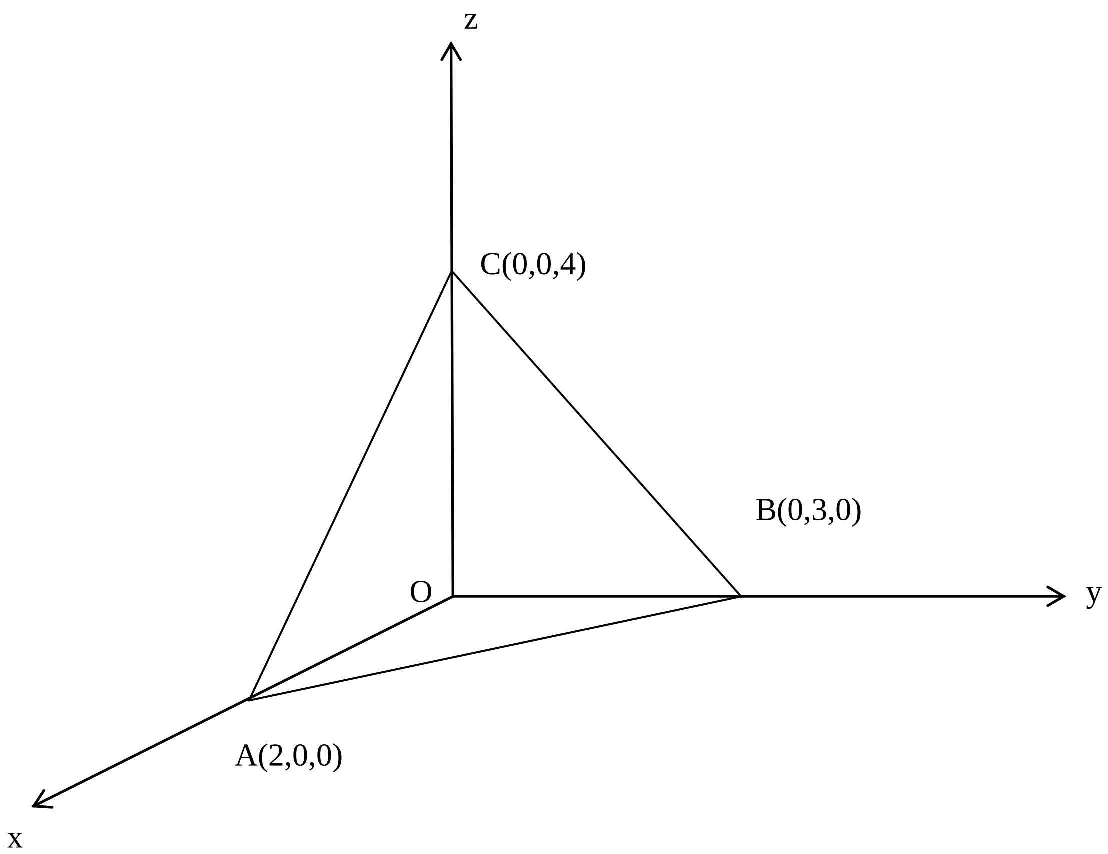
$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\varphi = \iint_D R^2 sin\varphi d\theta d\varphi =$$

$$= R^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} sin\varphi d\varphi \right) d\theta = \frac{R^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{12} \approx 1\,092\,300\ km^2 .$$

2). Avem de calculat integrala de suprafata ABC, care are reprezentarea explicita

$$z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \ , \ (x, y) \in D ,$$

unde D este proiectia suprafetei ABC pe planul xOy, adica triunghiul AOC .



Aplicand formula de calcul a integralei de suprafata in cazul in care suprafata e reprezentata explicit, obtinem, folosind faptul ca

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy \ ,$$

$$\iint_S (x+y+z)d\sigma = \iint_{AOB} \left(x+y+4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy.$$

In final, avem valoarea $3\sqrt{61}$.

3). Suprafata are reprezentarea parametrica :

$$\vec{r}(x,\theta) = x\vec{i} + 3\cos\theta\vec{j} + 3\sin\theta\vec{k}\ , 0 \le x \le 4, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Se foloseste formula de calcul a integralei in cazul in care suprafata e reprezentata parametric si se obtine valoarea $12\pi + 36$.

4). Momentul de inertie, in raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iint_S z^2\rho(x,y,z)d\sigma = \iint_D (x^2+y^2)(1+xy)\sqrt{2}\,dxdy,$$

unde D $= \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

Se trece apoi la coordonate polare si se obtine :

$$I_{xOy} = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^2(1+r^2\sin\theta\cos\theta)r\,dr\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2},$$

unde $D^* = [0,1]\ x\ [0,2\pi]$.

Concluzii

Daca se cere sa se calculeze

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma,$$

se procedeaza astfel :

- Daca S este data parametric, se aplica formula corespunzatoare pentru calculul in cazul cand suprafata e data parametric si se calculeaza integrala dubla obtinuta.

- Daca S este data explicit, se aplica formula corespunzatoare pentru calculul in cazul cand suprafata e data explicit si se calculeaza integrala dubla obtinuta.
- Daca S este data implicit, se cauta o parametrizare, dupa care se aplica cele discutate mai sus, sau se incearca o descompunere a suprafetei (S) intr-un numar finit de parti fara puncte interioare comune, explicitabile in raport cu cate o variabila, apoi se calculeaza integralele duble obtinute si se aduna rezultatele.

Bibliografie

1. Adams, R., Calculus: A complete course, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003
2. Diamandescu A., Analiză Matematică (vol. II), Ed. Universitaria Craiova, 2006
3. Fihtenholz, G.M., Curs de calcul diferential şi integral, vol I, II si III, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1963
4. Predoi M., Analiză matematică pentru ingineri, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
5. Predoi M, Racila M, Constantinescu D, Teme de analiză matematică. Teorie si aplicații, Ed. Universitaria Craiova, 2008
6. Stewart J., Calculus, Brooks/Cole, Belmont, 2003