Dr. Aurel Diamandescu

ANALIZĂ MATEMATICĂ

PROBLEME REZOLVATE

Pentru studenţii anului I,
cursuri cu frecvenţă redusă,
Facultatea de Electromecanică.

2006

Prefaţă

Această lucrare tratează teme referitoare la capitole importante din Analiza matematică

Spaţii normate (problemele 1 - 5),
Funcţii continue (problemele 6 - 11)
Funcţii diferenţiabile (problemele 12 - 22)
Funcţii integrabile (problemele 23 - 41)
Teoria câmpurilor (problemele 42 - 46)

Metoda folosită: fiecare problemă este complet rezolvată, indicându-se aspectele teoretice folosite. Unele rezolvări sunt însoţite de comentarii.

Dorinţa autorului este ca lucrarea să fie de un real ajutor studenţilor Facultăţii de electromecanică, anul I (F.R) în străduinţele lor de înţelegere şi însuşire a unor cunoştinţe de Analiză matematică. Trimiterile de forma "vezi Teorema 7.2.5" se referă la Cursul de Analiză matematică, vol. I, II, Ed. Universitaria, Craiova, 2005, al autorului. Această teoremă este Teorema 5 din capitolul 7, paragraful 2. Volumul I al acestui Curs conţine capitolele 1 - 6, iar volumul II, capitolele 7 - 12. Consultarea acestei cărţi apare astfel absolut necesară.

Menţionăm că sfârşitul rezolvării unei probleme este marcat cu semnul ■.

Autorul precizează faptul că această lucrare este o parte dintr-o lucrare mai amplă ce va apare în curând la Editura Universitaria din Craiova.

Craiova, Februarie 2006 Dr. Aurel Diamandescu

Problema 1

Să se arate că pe spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^2$, fiecare din aplicaţiile
a). $\|\cdot\|_e$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|(x_1,x_2)\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
(norma euclidiană),
b). $\|\cdot\|_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|(x_1,x_2)\|_s = | x_1 | + | x_2 |$
(sum – norma),
c). $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|(x_1,x_2)\| = \max \{| x_1 |,| x_2 |\}$
(sup – norma),
este o normă. Să se arate că aceste norme sunt echivalente două câte două. Să se arate că numai una dintre ele este indusă de un produs scalar. Să se precizeze sferele corespunzătoare. Să se precizeze topologiile acestor norme. Să se dea exemple concrete de mulţimi deschise, închise, compacte, necompacte, conexe, neconexe, mărginite, nemărginite, convexe, neconvexe, în topologia indusă de aceste norme.

Rezolvare. Verificăm că fiecare aplicaţie satisface axiomele normei din Definiţia 2.3.2.
a). 1. Pentru orice $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|x\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$;
apoi, $\|x\|_e = 0 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = \theta$;
2. Pentru orice $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem (Propoziţia 2.3.2) $\alpha x = (\alpha x_1,\alpha x_2)$ şi atunci,

$$\| \alpha x\|_e = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2)} = | \alpha |\|x\|_e;$$

3. Pentru orice $x = (x_1,x_2)$ şi $y = (y_1,y_2)$ din $\mathbb{R}^2$, avem (Propoziţia 2.3.2) $x + y = (x_1 + y_1,x_2 + y_2)$ şi ca urmare,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_e^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \leq \\ &\leq x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \\ &= (\| x \|_e + \| y \|_e)^2 .\end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\|x + y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e .$$

Aşadar, aplicaţia de la pc. a) este o normă pe $\mathbb{R}^2$.
b). 1. Pentru $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|x\|_s = | x_1 | + | x_2 | \geq 0$; apoi, $\|x\|_s = 0 \iff | x_1 | + | x_2 | = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = (0,0) = \theta$;
2. Pentru orice $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$\| \alpha x\|_s = | \alpha x_1 |+| \alpha x_2 | = | \alpha | (| x_1 | + | x_2 |) = | \alpha |\|x\|_s$$

3. Pentru orice $x = (x_1,x_2)$ şi $y = (y_1,y_2)$ din $\mathbb{R}^2$, avem

$$\|x + y\|_s = | x_1 + y_1 | + | x_2 + y_2 | \leq$$

$\leq | x_1 | + | y_1 | + | x_2 | + | y_2 | = \|x\|_s + \|y\|_s$.
Aşadar, aplicaţia de la pc. b) este o normă pe $\mathbb{R}^2$.
c). 1. Pentru orice $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem în mod evident, $\| x \| = \max \{| x_1 |,| x_2 |\} \geq 0$; apoi, $\| x \| = 0 \iff | x_1 | = | x_2 | = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = (0,0) = \theta$;
2. Pentru orice $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, avem

$$\| \alpha x \| = \max \{| \alpha x_1 |,| \alpha x_2 |\} =$$
$$=| \alpha | \max \{| x_1 |,| x_2 |\} = | \alpha | \| x \|;$$

3. Pentru orice $x = (x_1,x_2)$ şi $y = (y_1,y_2)$ din $\mathbb{R}^2$, avem

$$\| x + y \| = \max \{| x_1 + y_1 |,| x_2 + y_2 |\} \leq$$
$$\leq \max \{| x_1 | + | y_1 |,| x_2 | + | y_2 |\} \leq \| x \| + \| y \|,$$

pentru că, în mod evident,

$$| x_1 | + | y_1 | \leq \| x \| + \| y \| \text{ şi } | x_2 | + | y_2 | \leq \| x \| + \| y \| .$$

Aşadar, aplicaţia de la pc. c) este o normă pe $\mathbb{R}^2$.
Se constată cu uşurinţă că pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^2$ au loc inegalităţile

$$\| x \| \leq \| x \|_e \leq \| x \|_s \leq \sqrt{2} \| x \|_e \leq 2\| x \|,$$

ceea ce arată că cele trei norme sunt echivalente două câte două.
Aplicând Teorema 2.3.6, se constată cu uşurinţă că norma euclidiană $\| \cdot \|_e$ este indusă de un produs scalar, şi anume de produsul scalar euclidian (sau canonic) definit prin $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. Aceasta înseamnă că $\| x \|_e = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.
Celelalte două norme de mai sus nu satisfac condiţia din Teorema 2.3.6 (se pot avea în vedere vectorii $x = (-1,2)$ şi $y = (2,1)$) şi ca urmare, ele nu sunt induse de un produs scalar
Având în vedere Teorema 2.3.1, sfera deschisă cu centrul în punctul $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ şi de rază $r > 0$, corespunzătoare unei norme $\| \cdot \|$ este $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x - a \| < r\}$. Concret,

- corespunzător normei euclidiene, avem

$$S(a,r) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

şi este formată din toate punctele planului situate în interiorul cercului de de rază r cu centrul în punctul $A(a_1,a_2)$;
- corespunzător sum – normei, avem

$$S(a,r) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid | x_1 - a_1 | + | x_2 - a_2 | < r\}$$

şi este formată din toate punctele planului situate în interiorul pătratului cu centrul în punctul $A(a_1,a_2)$ şi care are diagonalele paralele cu axele de coordonate, lungimea lor fiind 2r;
- corespunzător sup – normei, avem

$$S(a,r) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid | x_1 - a_1 | < r, | x_2 - a_2 | < r\}$$

şi este formată din toate punctele planului situate în interiorul pătratului cu centrul în punctul A(a_1,a_2) şi care are laturile paralele cu axele de coordonate, lungimea lor fiind 2r; cu alte cuvinte,

$$S(a,r) = (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r).$$

Conform cu Teorema 2.3.1, Definiţia 2.3.3 şi Teorema 2.3.2, cele trei norme de mai sus definesc topologia euclidiană a spaţiului $\mathbb{R}^2$.

Se poate demonstra că orice două norme pe $\mathbb{R}^2$ sunt echivalente (Teorema 2.3.7). Ca urmare, orice normă pe $\mathbb{R}^2$ generează topologia euclidiană a spaţiului $\mathbb{R}^2$.

Având în vedere Definiţiile 2.1.1, 2.1.6, 2.1.8, 2.2.6 şi 3.1.11, dăm următoarele exemple:

- mulţimi deschise: sfere deschise, $(a,b) \times (c,d)$, $(0,\infty) \times (0,\infty)$, $(0,\infty) \times (c,d)$, $(a,b) \times (0,\infty)$;
- mulţimi închise: orice sferă închisă, $[a,b] \times [c,d]$, $(-\infty, c] \times [d,\infty)$, orice dreaptă, orice segment închis [AB];
- mulţimi compacte : orice sferă închisă, $[a,b] \times [c,d]$, $[1,3] \times [2,4] \cup [5,7] \times [1,2]$, orice poligon (plin sau gol);
- mulţimi necompacte: $(a,b] \times [c,d]$, $[d,\infty) \times [a,b]$;
- mulţimi conexe: orice sferă, orice poligon (plin);
- mulţimi neconexe: $(1,3) \times [2,4) \cup [5,7] \times (1,2)$; $\{(1,2), (3,1)\}$; $\{2\} \times [1,3] \cup [4,10] \times (0,8)$;
- mulţimi compacte şi conexe: orice sferă închisă, orice segment închis [AB]; $[a,b] \times [c,d]$;
- mulţimi compacte şi neconexe: $([1,3] \times [2,4]) \cup ([5,7] \times [1,2])$; $(\{2\} \times [1,3]) \cup ([4,10] \times [0,8])$;
- mulţimi necompacte şi conexe: orice sferă deschisă; orice dreaptă; $(0,3] \times [0,\infty)$; $(0,3) \times (2,5)$; $(0,2) \times \{5\}$;
- mulţimi necompacte şi neconexe: două drepte paralele; $(0,2) \times \{5,7\}$; $(2,3) \times (5,7] \cup \{(1,1)\}$, $\mathbb{R} \times ([1,2] \cup [5,7])$
- mulţimi mărginite: orice sferă, orice segment sau poligon;
- mulţimi nemărginite: orice semiplan; orice dreaptă; $\mathbb{R}^2$; $(0,\infty) \times (0,\infty)$; $[0,3] \times [0,\infty)$;
- mulţimi convexe: orice sferă, orice poligon (plin) convex;
- mulţimi neconvexe: orice poligon (plin) concav, orice contur poligonal simplu, $\{(-1,-2), (3,5), (2,4)\}$, două drepte paralele. ■

Observaţie. Interpretarea geometrică a normelor echivalente: două norme sunt echivalente dacă şi numai dacă în fiecare sferă corespunzătoare fiecăreia dintre norme se poate introduce o sferă de acelaşi centru şi eventual altă rază corespunzătoare celeilalte norme.

Problema 2

Să se arate că în $\mathbb{R}^2$ avem

1). $\lim\left(\frac{2n-1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)=(2{,}1)$;

2). $\lim\left(\frac{5n+2}{n},\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)=(5{,}1)$;

3). $\lim\left(n+1,\,3^{-n}\right)$ nu există;

Rezolvare. 1. Conform Propoziţiei 3.1.6, pentru a arăta că $\lim\left(\frac{2n-1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)=(2{,}1)$, este necesar şi suficient să arătăm că se verifică condiţia

$\forall\varepsilon>0,\exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_\varepsilon\Longrightarrow\parallel\left(\frac{2n-1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)-(2,1)\parallel<\varepsilon.$

Alegem drept normă în $\mathbb{R}^2$ sup-norma. Ca urmare, avem

$$\parallel\left(\frac{2n-1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)-(2,1)\parallel=\parallel\left(\frac{2n-1}{n+1}-2,\frac{n+1}{n}-1\right)\parallel=$$

$$=\parallel\left(\frac{-3}{n+1},\frac{1}{n}\right)\parallel=\max\{\frac{3}{n+1},\frac{1}{n}\}=\frac{3}{n+1}.$$

Punem condiţia $\frac{3}{n+1}<\varepsilon$ şi rezolvăm această inecuaţie cu necunoscuta $n\in\mathbb{N}$. Avem $\frac{3}{n+1}<\varepsilon\Longleftrightarrow n+1>\frac{3}{\varepsilon}\Longleftrightarrow n>\frac{3}{\varepsilon}-1$.

Fie acum n_ε un număr natural mai mare decât $\frac{3}{\varepsilon}-1$. De exemplu, folosind funcţia parte întreagă, putem alege $n_\varepsilon=[\frac{3}{\varepsilon}-1]+1=[\frac{3}{\varepsilon}]$. Ca urmare, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_\varepsilon$ avem $n\geq[\frac{3}{\varepsilon}]>\frac{3}{\varepsilon}-1$ şi ca urmare, $\frac{3}{n+1}<\varepsilon$, adică $\parallel\left(\frac{2n-1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)-(2,1)\parallel<\varepsilon$.

Aşadar, condiţia de mai sus se verifică, ceea ce arată că în $\mathbb{R}^2$ avem $\lim\left(\frac{2n-1}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)=(2{,}1)$.

2. Se poate proceda ca mai sus. Altfel, conform Teoremei 3.1.7, pentru a arăta că $\lim\left(\frac{5n+2}{n},\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)=(5{,}1)$, este necesar şi suficient să arătăm că se verifică condiţiile

$$\lim\frac{5n+2}{n}=5,\ \lim\frac{n^2+n+1}{n^2+2}=1.$$

Ori, aceste egalităţi sunt adevărate, conform regulilor uzuale de calcul a limitelor de şiruri de numere reale.

Aşadar, în $\mathbb{R}^2$ avem $\lim\left(\frac{5n+2}{n},\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)=(5{,}1)$.

3. Raţionăm prin reducere la absurd. Presupunem că în $\mathbb{R}^2$ există limita $\lim\left(n+1,\,3^{-n}\right)=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Conform Teoremei 3.1.7, vom avea $\lim\,(n+1)=\alpha\in\mathbb{R}$, ceea ce este contradictoriu. Această contradicţie arată că presupunerea făcută este falsă. Aşadar, limita $\lim\left(n+1,\,3^{-n}\right)$ nu există.

Observaţie. Dacă în rezolvarea punctului 1 se alege altă normă, se constată că condiţia se verifică. Deosebirea care apare este aceea că rangul n_ε se modifică odată cu norma. Acest fapt nu este esenţial în condiţia menţionată. Şirul dat este convergent la vectorul (2,1) indiferent de norma considerată în $\mathbb{R}^2$ deoarece orice două norme pe $\mathbb{R}^2$ sunt echivalente (şi deci generează aceeaşi topologie - topologia euclidiană a spaţiului $\mathbb{R}^2$).

Problema 3

Să se determine punctele de acumulare pentru şirurile cu termenii generali

1). $x_n = \left(2 + (-1)^n, \sin \frac{2n\pi}{3}\right)$;

2). $y_n = \left(n^{(-1)^n - 1}, 1 + 2(-1)^n, \frac{n}{n+1} \mathrm{tg} \frac{n\pi}{3}\right)$.

Rezolvare. 1. Prezenţa lui $(-1)^n$ în expresia lui x_n sugerează să considerăm pe n par şi apoi impar. Pe de altă parte, funcţia $f(n) = \sin \frac{2n\pi}{3}$ este periodică de perioadă principală $T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$. Combinând, avem

$$x_{6k} = \left(2 + (-1)^{6k}, \sin \frac{12k\pi}{3}\right) = (3, 0),$$
$$x_{6k+1} = \left(2 + (-1)^{6k+1}, \sin \frac{(12k+2)\pi}{3}\right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$x_{6k+2} = \left(2 + (-1)^{6k+2}, \sin \frac{(12k+4)\pi}{3}\right) = \left(3, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$x_{6k+3} = \left(2 + (-1)^{6k+3}, \sin \frac{(12k+6)\pi}{3}\right) = (1, 0),$$
$$x_{6k+4} = \left(2 + (-1)^{6k+4}, \sin \frac{(12k+8)\pi}{3}\right) = \left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$x_{6k+5} = \left(2 + (-1)^{6k+5}, \sin \frac{(12k+10)\pi}{3}\right) = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Se constată că şirul (x_n) este periodic de perioadă $T = 6$. De aici rezultă că şirul (x_n) are şase subşiruri constante, convergente la unul din vectorii

$$(3, 0), \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(3, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1, 0), \left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Se mai constată că orice alt subşir al şirului (x_n) ori este convergent la unul din aceşti vectori, ori conţine subşiruri convergente la unul din aceşti vectori.

Din toate acestea şi din Propoziţia 3.1.5, rezultă că mulţimea punctelor de acumulare a şirului (x_n) este
formată din cei şase vectori de mai sus.

2. Procedând ca mai sus, avem, după uşoare calcule,

$$y_{6k} = (1,3,0)\,,\; y_{6k+1} = \left(\frac{1}{(6k+1)^2}, -1, \frac{6k+1}{6k+2}\sqrt{3}\right),$$
$$y_{6k+2} = \left(1,3,-\frac{6k+2}{6k+3}\sqrt{3}\right),\; y_{6k+3} = \left(\frac{1}{(6k+3)^2}, -1, 0\right),$$
$$y_{6k+4} = \left(1,3,\frac{6k+4}{6k+5}\sqrt{3}\right),\; y_{6k+5} = \left(\frac{1}{(6k+5)^2}, -1, -\frac{6k+5}{6k+6}\sqrt{3}\right),$$

pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. De aici rezultă că şirul (x_n) are şase subşiruri convergente la unul din vectorii

$$(1,3,0)\,,\; \left(0,-1,\pm\sqrt{3}\right),\; \left(1,3,\pm\sqrt{3}\right),\; (0,-1,0)\,.$$

Se mai constată că orice alt subşir al şirului (x_n) ori este convergent la unul din aceşti vectori, ori conţine subşiruri convergente la unul din aceşti vectori.

Din toate acestea şi din Propoziţia 3.1.5, rezultă că mulţimea punctelor de acumulare a şirului (x_n) este formată din cei şase vectori de mai sus.

Problema 4

Folosind Criteriul lui Cauchy, să se arate că şirul (x_n) de vectori din $\mathbb{R}^2$ cu termenul general

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin\ k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2}\right)$$

este convergent.

Rezolvare. Criteriul lui Cauchy (vezi Teorema 3.1.6) spune că un şir de vectori din $\mathbb{R}^2$ este convergent dacă şi numai dacă el este şir fundamental. Conform Definiţiei 3.1.7, şirul de vectori (x_n) este şir fundamental dacă verifică condiţia

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|\ x_n - x_m\ \| < \varepsilon.$$

Alegem drept normă în $\mathbb{R}^2$ sup-norma. Ca urmare, pentru $n > m$ avem

$$\|\ x_n - x_m\ \| = \|\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin\ k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2}\right) - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\sin\ k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\ \| =$$
$$= \|\ \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\sin\ k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\ \| =$$
$$= \|\ \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin\ k!}{k(k+1)}, \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}\right)\ \| =$$
$$= \max\left\{\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin\ k!}{k(k+1)}\right|, \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}\right|\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{\sin\ k!}{k(k+1)}\right|, \sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{2^k}\right|\right\} \leq$$
$$\leq \max\left\{\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}, \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{2^k}\right\} =$$
$$= \max\left\{\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right), \frac{1}{2^m}\left(1-2^{m-n}\right)\right\} =$$
$$\leq \max\left\{\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n}\right), \frac{1}{2^m}\left(1-2^{m-n}\right)\right\} \leq \frac{1}{m+1}$$

Punem condiţia $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$ şi rezolvăm această inecuaţie cu necunoscuta $m \in \mathbb{N}$. Obţinem $m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
Fie acum n_ε un număr natural mai mare decât $\frac{1}{\varepsilon} - 1$. De exemplu, putem alege $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon} - 1] + 1 = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Ca urmare, pentru fiecare m, n $\in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_\varepsilon$ avem $n \geq [\frac{1}{\varepsilon}] > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ şi ca urmare, $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$, adică $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$.
Aşadar, şirul cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\ k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2}\right)$ este şir fundamental şi deci convergent în $\mathbb{R}^2$.
Observaţie. Dacă se alege altă normă, se constată că condiţia se verifică. Deosebirea care apare este aceea că rangul n_ε se modifică odată cu norma. Acest fapt nu este esenţial în condiţia menţionată. Şirul dat este fundamental indiferent de norma considerată în $\mathbb{R}^2$ deoarece orice două norme pe $\mathbb{R}^2$ sunt echivalente (şi deci generează aceeaşi topologie - topologia euclidiană a spaţiului $\mathbb{R}^2$).

Problema 5

Să se arate că pe spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^2$, aplicaţia

$$(x,y) \to \langle x,y\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

unde $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$, este un produs scalar.
Să se precizeze norma indusă precum şi topologia corespunzătoare.
Rezolvare. Verificăm că aplicaţia satisface axiomele produsului scalar (vezi Definiţia 2.3.5):
1. Pentru orice $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem
$$\langle x,x\rangle = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.$$
Apoi, $\langle x,x\rangle = 0 \iff x_1 = 0,\ x_1 - x_2 = 0,\ x_2 = 0 \iff x = (0,0) = \theta$;
2. Pentru orice $x = (x_1,x_2)$ şi $y = (y_1,y_2)$ din $\mathbb{R}^2$, avem

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2;$$

3. Pentru orice $x = (x_1,x_2)$ şi $y = (y_1,y_2)$ din $\mathbb{R}^2$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha x = (\alpha x_1,\alpha x_2)$ şi ca urmare,

$$\langle \alpha x,y\rangle = 3\alpha x_1y_1 - \alpha x_1y_2 - \alpha x_2y_1 + 2\alpha x_2y_2 =$$
$$= \alpha(3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) = \alpha\langle x,y\rangle;$$

4. Pentru orice $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ şi $z = (z_1,z_2)$ din $\mathbb{R}^2$, avem $x + y = (x_1 + y_1,x_2 + y_2)$ şi ca urmare,

$$\langle x + y,z\rangle = 3(x_1 + y_1)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1 +$$
$$+ 2(x_2 + y_2)z_2 = (3x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + 2x_2z_2) +$$
$$+ (3y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_1 + 2y_2z_2) = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$$

Aşadar, aplicaţia dată este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$. Ca urmare,

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$$

este norma indusă de produsul scalar (Teorema 2.3.4, Remarca 2.3.3). Conform cu Teorema 2.3.7, această normă este echivalentă cu norma euclidiană pe $\mathbb{R}^2$. Ca urmare, norma de mai sus generează pe $\mathbb{R}^2$ topologia euclidiană.

Ca un amănunt, sfera $S(\theta,r)$ corespunzătoare este discul eliptic

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 < r^2.$$

Adus la forma canonică, acesta este (vezi [D.A.2]) $\frac{X^2}{(\lambda r)^2} + \frac{Y^2}{(\mu r)^2} < 1$, unde $\lambda = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ şi $\mu = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$. ■

Problema 6

Folosind definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct, să se arate că

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(3x + 2y - 5) = 7;$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 3}} (2x + 3y - z) = 5;$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x - y}{x^2} = -\infty;$ 4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 3}} \frac{x - y}{(z - 3)^2} = -\infty;$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x + y}{(y - 1)^2} = \infty;$ 6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 3}} \frac{x + y}{(z - 3)^2} = \infty;$

Rezolvare. Definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii reale de mai multe variabile reale într-un punct este Definiţia 4.1.4.

1. Limita $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(3x + 2y - 5) = 7$ se încadrează în cazul particular b) al Definiţiei 4.1.4. Ca urmare, avem că $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(3x + 2y - 5) = 7$ dacă şi numai dacă se verifică condiţia

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2,\ (\mathrm{x,y}) \neq (2{,}3),$$

$$\begin{cases} |\ \mathrm{x} - 2\ | & < \ \delta \\ |\ \mathrm{y} - 3\ | & < \ \delta \end{cases} \Longrightarrow |\ (3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 5) - 7\ | < \varepsilon.$$

Fie un $\delta > 0$ şi fie un punct oarecare $(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $(\mathrm{x,y}) \neq (2{,}3)$ şi $|\mathrm{x} - 2| < \delta$, $|\mathrm{y} - 3| < \delta$. Atunci, $|\ (3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 5) - 7\ | =$

$= |\ 3(\mathrm{x} - 2) + 2(\mathrm{y} - 3)\ | \leq 3|\mathrm{x} - 2| + 2|\mathrm{y} - 3| < 5\delta.$

Pentru a se verifica condiţia de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$ (sau, orice $\delta(\varepsilon) \in (0, \frac{\varepsilon}{5})$)

2. Limita $\lim\limits_{\substack{\mathrm{x}\to 1\\ \mathrm{y}\to 2\\ \mathrm{z}\to 3}} (2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - \mathrm{z}) = 5$ se încadrează în cazul particular c) al Definiţiei 4.1.4. Ca urmare, avem că $\lim\limits_{\substack{\mathrm{x}\to 1\\ \mathrm{y}\to 2\\ \mathrm{z}\to 3}} (2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - \mathrm{z}) = 5$ dacă şi numai dacă

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\mathrm{x,y,z}) \in \mathbb{R}^2,\ (\mathrm{x,y,z}) \neq (1{,}2{,}3),$$

$$\begin{cases} |\ \mathrm{x} - 1\ | & < \ \delta \\ |\ \mathrm{y} - 2\ | & < \ \delta \\ |\ \mathrm{z} - 3\ | & < \ \delta \end{cases} \Longrightarrow |\ (2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - \mathrm{z}) - 5\ | < \varepsilon.$$

Fie un $\delta > 0$ şi fie un punct oarecare $(\mathrm{x,y,z}) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $(\mathrm{x,y,z}) \neq (1{,}2{,}3)$, $|\mathrm{x} - 1| < \delta, |\mathrm{y} - 2| < \delta, |\mathrm{z} - 3| < \delta$ Atunci,

$|\ (2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - \mathrm{z}) - 5\ | = |\ 2(\mathrm{x} - 1) + 3(\mathrm{y} - 2) - (\mathrm{z} - 3)\ | \leq$

$\leq 2|\ \mathrm{x} - 1\ | + 3|\ \mathrm{y} - 2\ | + |\ \mathrm{z} - 3\ | < 2\delta + 3\delta + \delta = 6\delta.$

Pentru a se verifica condiţia de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}$ (sau, orice $\delta(\varepsilon) \in (0, \frac{\varepsilon}{6})$)

3. Limita infinită $\lim\limits_{\substack{\mathrm{x}\to 0\\ \mathrm{y}\to 1}} \frac{\mathrm{x} - \mathrm{y}}{\mathrm{x}^2} = -\infty$ se încadrează în cazul similar al Definiţiei 4.1.5. Ca urmare, avem $\lim\limits_{\substack{\mathrm{x}\to 0\\ \mathrm{y}\to 1}} \frac{\mathrm{x} - \mathrm{y}}{\mathrm{x}^2} = -\infty$ dacă şi numai dacă se verifică condiţia

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{x} \neq 0,\ (\mathrm{x,y}) \neq (0{,}1),$$

$$\begin{cases} |\ \mathrm{x}\ | & < \ \delta \\ |\ \mathrm{y} - 1\ | & < \ \delta \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{x} - \mathrm{y}}{\mathrm{x}^2} < -\varepsilon.$$

Fie un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ şi fie un punct oarecare $(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $\mathrm{x} \neq 0$, $(\mathrm{x,y}) \neq (0{,}1)$ şi $|\mathrm{x}| < \delta$, $|\mathrm{y} - 1| < \delta$. Atunci, $\mathrm{x}^2 < \delta^2$ şi $0 < 1 - \delta < \mathrm{y} < 1 + \delta$ şi ca urmare, $\frac{\mathrm{x} - \mathrm{y}}{\mathrm{x}^2} < \frac{2\delta - 1}{\delta^2}$. Condiţia $\frac{2\delta - 1}{\delta^2} < -\varepsilon$ se verifică pentru orice $\delta \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right)$.

Pentru a se verifica condiţia de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) \in \left(0, \min\{\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\}\right)$.

4. Se procedează exact asemănător ca mai sus. Limita infinită $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1 \\ z \to 3}} \frac{x - y}{(z - 3)^2} = -\infty$ se încadrează în cazul similar al Definiţiei 4.1.5.

Ca urmare, avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1 \\ z \to 3}} \frac{x - y}{(z - 3)^2} = -\infty$ dacă şi numai dacă se verifică condiţia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z \neq 3,\ (x,y,z) \neq (0,1,3),$$

$$\begin{cases} |\,x\,| < \delta \\ |\,y - 1\,| < \delta \\ |\,z - 3\,| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \frac{x - y}{(z - 3)^2} < -\varepsilon.$$

Fie un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ şi fie un punct oarecare $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $z \neq 3$, $(x,y,z) \neq (0,1,3)$ şi $|x| < \delta$, $|y - 1| < \delta$, $|z - 3| < \delta$. Atunci, $(z - 3)^2 < \delta^2$, $0 < 1 - \delta < y < 1 + \delta$ şi ca urmare, $\frac{x - y}{x^2} < \frac{2\delta - 1}{\delta^2}$. Condiţia $\frac{2\delta - 1}{\delta^2} < -\varepsilon$ se verifică pentru orice $\delta \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right)$.

Pentru a se verifica condiţia de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) \in \left(0, \min\{\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\}\right)$.

5. Limita infinită $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x + y}{(y - 1)^2} = \infty$ se încadrează în Definiţia 4.1.5.

Ca urmare, avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x + y}{(y - 1)^2} = \infty$ dacă şi numai dacă se verifică condiţia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 1,\ (x,y) \neq (0,1),$$

$$\begin{cases} |\,x\,| < \delta \\ |\,y - 1\,| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \frac{x + y}{x^2} > \varepsilon.$$

Fie un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ şi fie un punct oarecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $y \neq 1$, $(x,y) \neq (0,1)$ şi $|x| < \delta$, $|y - 1| < \delta$. Atunci, $x^2 < \delta^2$ şi $0 < 1 - \delta < y < 1 + \delta$ şi ca urmare, $\frac{x + y}{x^2} > \frac{1 - 2\delta}{\delta^2}$. Condiţia $\frac{1 - 2\delta}{\delta^2} > \varepsilon$ se verifică pentru orice $\delta \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right)$.

Pentru a se verifica condiţia de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) \in \left(0, \min\{\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\}\right)$.

6. Se procedează exact asemănător ca mai sus. ■

Observaţie. 1. Pentru o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ (sau $\mathbb{R}^3$ sau, în general, $\mathbb{R}^p$), limita $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \ell$ prezintă 3 cazuri diferite, după cum ℓ este finit sau $\pm\infty$. Acestea au fost ilustrate mai sus.

2. Din cele de mai sus se poate deduce următoarea schemă de aplicare a definiţiei $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct. Ne situăm în cazul ℓ finit. Pentru un $\delta > 0$ şi $(x,y) \in D$ astfel încât $(x,y) \neq (a,b)$ şi $| x - a | < \delta$, $| y - b | < \delta$, în expresia $| f(x,y) - \ell |$ punem în evidenţă pe $| x - a |$ şi $| y - b |$ şi facem majorarea $| f(x) - \ell | \leq F(\delta)$. Punem condiţia $F(\delta) < \varepsilon$ şi rezolvăm această inecuaţie cu necunoscuta δ, obţinând soluţia $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0,g(\varepsilon))$, condiţia din definiţie se verifică şi ca urmare am demonstrat că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \ell$.

În cazul în care $\ell = \infty$, se procedează asemănător, cu modificarea că în expresia $f(x,y) - \ell$ punem în evidenţă pe $| x - a |$ şi $| y - b |$ şi facem minorarea $f(x,y) - \ell \geq F(\delta)$. Punem condiţia $F(\delta) > \varepsilon$ şi rezolvăm această inecuaţie cu necunoscuta δ, obţinând soluţia $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0,g(\varepsilon))$, condiţia din definiţie se verifică şi ca urmare am demonstrat că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \infty$.

În cazul în care $\ell = -\infty$, se procedează asemănător, cu modificarea că în expresia $f(x,y) - \ell$ punem în evidenţă pe $| x - a |$ şi $| y - b |$ şi facem majorarea $f(x,y) - \ell \leq F(\delta)$. Punem condiţia $F(\delta) < -\varepsilon$ şi rezolvăm această inecuaţie cu necunoscuta δ, obţinând soluţia $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0,g(\varepsilon))$, condiţia din definiţie se verifică şi ca urmare am demonstrat că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \ell$.

Problema 7

Folosind Criteriul lui Heine, să se arate că

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ există; să se determine limita;
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ nu există.

Rezolvare. 1. Fie $((x_n,y_n))_n$ un şir oarecare de vectori din $\mathbb{R}^2$, $(x_n,y_n) \neq (1,0)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ şi astfel încât $\lim (x_n,y_n) = (1,0)$. Aceasta înseamnă că $\lim x_n = 1$ şi $\lim y_n = 0$. Ca urmare, $\lim (x_n^2 + y_n^2) = 1$ şi atunci, $\lim \sin \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = \sin 1$. Conform Criteriului lui Heine

(Teorema 4.1.1), $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ există şi este egală cu $\sin 1$.

2. Prin reducere la absurd. Presupunem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ există. Fie $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ (care este finită, pentru că funcţia $\sin \frac{1}{x^2+y^2}$ este mărginită). Conform Criteriului lui Heine, ar trebui ca pentru orice şir $((x_n,y_n))_n$ de vectori din $\mathbb{R}^2$, $(x_n,y_n) \neq (0,0)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi astfel încât $\lim\, (x_n,y_n) = (0,0)$ să avem $\lim \sin \frac{1}{x_n^2+y_n^2} = \ell$. Fie şirul de vectori din $\mathbb{R}^2$ cu termenul general $(x_n,y_n) = (\frac{1}{\sqrt{n\pi}}, 0)$. Se vede că $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\, (x_n,y_n) = (0,0)$ şi, în plus, $\lim \sin \frac{1}{x_n^2+y_n^2} = \lim \sin n\pi = 0$. Deci, $\ell = 0$. Fie acum şirul de vectori din $\mathbb{R}^2$ cu termenul general $(x'_n,y'_n) = (\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}, 0)$. Se vede că $(x'_n,y'_n) \neq (0,0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\, (x'_n,y'_n) = (0,0)$ şi, în plus, $\lim \sin \frac{1}{(x'_n)^2+(y'_n)^2} = \lim \sin\, (2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$. Deci, $\ell = 1$, ceea ce contrazice rezultatul obţinut anterior.
Contradicţia arată că limita $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ nu există. ■

Observaţie. Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind existenţa limitei unei funcţii într-un punct se face după modelul următor: O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ (sau $\mathbb{R}^3$ sau, în general, $\mathbb{R}^p$) are limita ℓ în punctul $(a,b) \in D'$ dacă se verifică condiţia: oricare ar fi şirul $((x_n,y_n))_n$ de elemente din D, diferite de (a,b) şi astfel încât $\lim\, (x_n,y_n) = (a,b)$, avem $\ell = \lim f(x_n,y_n)$.
Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind inexistenţa limitei unei funcţii într-un punct se face după modelul următor: O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ nu are limită (nu are limita ℓ) în punctul $(a,b) \in D'$ dacă se verifică condiţia: există un şir $((x_n,y_n))_n$ de elemente din D, diferite de (a,b) şi cu limita (a,b) şi astfel încât $\lim f(x_n, y_n)$ nu există (respectiv, nu are limita ℓ). Practic, se determină două şiruri $((x'_n,y'_n))_n$, $((x''_n,y''_n))_n$ din D, convergente la (a,b) astfel încât $\lim f(x'_n,y'_n)$ şi $\lim f(x''_n,y''_n)$ sunt diferite între ele (respectiv, una dintre ele diferită de ℓ) (acum, şirul $((x_n,y_n))_n$ este şirul intercalat $(x'_1,y'_1),(x''_1,y''_1),(x'_2,y'_2),(x''_2,y''_2),\ldots$).

Problema 8

1). Pentru funcţia $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, să se calculeze $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$ şi $\lim\limits_{t\to \pi} f(t)$.

2). Pentru funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}, x\sin\frac{xy}{x^2+y^2}\right),$$

să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)$.

3). Pentru funcţia

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^2+y^2+z^2}, e^z\right),$$

să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} f(x,y,z)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 0}} f(x,y,z)$.

Rezolvare. Conform Corolarului 4.1.1, limita unei funcţii vectoriale se face pe componente. Aşadar,

1. $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} (\cos t, \sin t) = \left(\lim\limits_{t\to 0}\cos t, \lim\limits_{t\to 0}\sin t\right) = (1,0),$

$\lim\limits_{t\to \pi} f(t) = \lim\limits_{t\to \pi} (\cos t, \sin t) = \left(\lim\limits_{t\to \pi}\cos t, \lim\limits_{t\to \pi}\sin t\right) = (-1,0).$

2. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}, x\sin\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = (0,0)$, pentru că

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |y|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}\,|\,y\,| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0 \text{ şi la fel,}$$

$$\left|x\sin\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = |x|\left|\sin\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le |x| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0.$$

La fel, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}, x\sin\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = (\frac{4}{5}, \sin\frac{2}{5})$, pentru că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{4}{5}$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} x\sin\frac{xy}{x^2+y^2} = \sin\frac{2}{5}.$

3. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} f(x,y,z) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \left(\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^2+y^2+z^2}, e^z\right) = (0,1)$, pentru că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\frac{(1-\cos x)^2}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}{x^2+y^2+z^2} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^4 \frac{x^4}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

şi, evident, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} e^z = 1.$

S-au folosit limitele fundamentale $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} = \alpha$, limita funcţiei compuse precum şi faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{x^4}{x^2+y^2+z^2} = 0,$

pentru că $0 \leq \frac{x^4}{x^2+y^2+z^2} \leq x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} \leq x^2 \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}{\longrightarrow} 0.$ ■

Observaţie. În calculul limitelor funcţiilor de mai multe variabile, se folosesc, adaptate corespunzător, regulile de calcul a limitelor funcţiilor de o variabilă reală.

Problema 9

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y}\right), & x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}.$$

Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei.

Rezolvare. Studiem continuitatea funcţiei f într-un punct (a,b) $\in \mathbb{R}^2$. Vom folosi Criteriul lui Heine (Teorema 4.2.1) privind continuitatea unei funcţii într-un punct. Deosebim patru cazuri, după cum a şi b sunt nule sau nenule.

Cazul $a \neq 0$ şi $b \neq 0$. Atunci, $f(a,b) = (a+b)\left(\cos\frac{1}{a}+\sin\frac{1}{b}\right)$ Fie (x_n,y_n) un şir arbitrar din $\mathbb{R}^2$, convergent la (a,b). Fie $r = \sqrt{a^2+b^2}$ şi sfera $S((a,b),r) = S$. Există rangul $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x_n,y_n) \in S$ pentru $n \geq n_0$. Pentru un astfel de n, avem

$$f(x_n,y_n) = (x_n+y_n)\left(\cos\frac{1}{x_n} + \sin\frac{1}{y_n}\right).$$

Ca urmare, $\lim f(x_n,y_n) = f(a,b)$. Acum, Criteriul amintit arată că funcţia f este continuă în punctul (a,b).

Cazul $a \neq 0$ şi $b = 0$. Atunci, $f(a,b) = 0$. Fie şirul (y_n), convergent la 0, definit prin $y_n = \frac{1}{2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}}$. Deoarece

$$\lim f(a,y_{2n}) = a(\cos\tfrac{1}{a} + 1) \text{ şi } \lim f(a,y_{2n+1}) = a(\cos\tfrac{1}{a} - 1),$$

rezultă că $\lim f(x_n,y_n)$ nu există. Acum, Criteriul amintit arată că funcţia f nu este continuă în punctul (a,b).

Cazul $a = 0$ şi $b \neq 0$ este similar cu cel anterior.

Cazul $a = 0$ şi $b = 0$. Atunci, $f(a,b) = 0$. Fie (x_n,y_n) un şir arbitrar din $\mathbb{R}^2$, convergent la (0,0). Avem

$$f(x_n,y_n) = \begin{cases} (x_n+y_n)(\cos\frac{1}{x_n}+\sin\frac{1}{y_n}), & x_n \neq 0,\ y_n \neq 0 \\ 0, & x_n = 0 \text{ sau } y_n = 0 \end{cases}$$

Se constată cu uşurinţă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $|f(x_n,y_n)| \leq 2|x_n+y_n|$. De aici rezultă imediat că $\lim f(x_n,y_n) = 0 = f(a,b)$. Criteriul amintit arată că funcţia f este continuă în (a,b).

În concluzie, mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f este

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \neq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \neq 0\}$. ■

Observaţie. Criteriul lui Heine şi diverse variante ale lui sunt des utilizate în probleme privind continuitatea unei funcţii într-un punct. Este indicat a fi folosit în probleme privind discontinuitatea unei funcţii într–un punct, după modelul următor:
O funcţie $f : D \to Y$ este discontinuă într–un punct $a \in D$ dacă se verifică condiţia: există un şir (x_n) din D, convergent la a şi astfel încât $\lim f(x_n)$ ori nu există ori, dacă există, este diferită de f(a).
Practic, se determină două şiruri (x'_n) (x''_n) din D, convergente la a astfel încât $\lim f(x'_n)$ şi $\lim f(x''_n)$ sunt diferite ori între ele, ori de f(a). (acum, şirul (x_n) este şirul intercalat $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots$).
Stabilirea continuităţii unei funcţii într–un punct se poate face şi cu definiţia (în diversele ei variante – cu vecinătăţi sau $\varepsilon - \delta$) sau folosind proprietăţile funcţiilor continue.
Astfel, continuitatea funcţiei f în (0,0) înseamnă verificarea condiţiei din Definiţia 4.2.5:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} |\,x\,| & < \delta \\ |\,y\,| & < \delta \end{cases} \Longrightarrow |\, f(x,y) - f(0,0)\,| < \varepsilon$$

Pentru aceasta, fie un $\delta > 0$ şi fie un punct oarecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $|x| < \delta$ şi $|y| < \delta$. Atunci,

$$|\, f(x,y) - f(0,0)\,| \leq 2|\,x + y\,| \leq 2(|\,x\,| + |\,y\,|) < 4\delta.$$

De aici se vede că condiţia din Definiţia 4.2.5 se verifică dacă pentru $\varepsilon > 0$ dat se ia $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.
În sfârşit, în cazul $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, pentru a arăta că funcţia f este continuă în punctul (a,b), procedăm astfel: pe vecinătatea S a punctului (a,b), funcţia f este definită prin

$$f(x,y) = (x + y)\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y}\right).$$

Astfel, f apare ca un produs de două funcţii continue: o funcţie polinomială şi o funcţie sumă de funcţii trigonometrice compuse cu funcţii raţionale. Cum produsul a două funcţii continue este o funcţie continuă, funcţia f este continuă pe S şi cu atât mai mult în (a,b).

Problema 10

Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{dacă } x = 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

i). Să se studieze continuitatea parţială;

ii). Să se studieze continuitatea după o direcţie în origine;
iii). Dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, să se studieze continuitatea relativ la mulţimea A în origine.
iv). Să se studieze continuitatea funcţiei.
v). Se poate prelungi f prin continuitate în origine?
vi). Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiei.
vii). Să se studieze existenţa limitelor iterate ale funcţiei într-un punct (a,b).

Rezolvare. i). Conform cu Definiţia 4.2.11, funcţia f este continuă parţial în raport cu variabila x (sau y) în punctul (a,b) dacă f este continuă după direcţia axei Ox (respectiv Oy) în punctul (a,b). Având în vedere Definiţiile 4.2.8 şi 4.2.10, fie Δ_1 (respectiv Δ_2) dreapta ce trece prin (a,b) şi este paralelă cu Ox (respectiv Oy). Ecuaţia ei este $y = b$ (respectiv $x = a$). Restricţia funcţiei f la dreapta Δ_1 este $f_{\Delta_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{\Delta_1}(x) = \begin{cases} \frac{|b|}{x^2} e^{-\frac{|b|}{x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$,
iar restricţia la dreapta Δ_2 este $f_{\Delta_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{\Delta_2}(y) = 0$ când $a = 0$ şi $f_{\Delta_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{\Delta_2}(y) = \frac{|y|}{a^2} e^{-\frac{|y|}{a^2}}$ când $a \neq 0$.
Din $\lim\limits_{x \to a} f_{\Delta_1}(x) = f_{\Delta_1}(a)$ pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, rezultă că funcţia f este continuă parţial în raport cu variabila x în punctul (a,b).
Pentru $a = 0$, avem $\lim\limits_{y \to b} f_{\Delta_2}(y) = f_{\Delta_2}(b) = 0$, pentru fiecare $b \in \mathbb{R}$; rezultă că funcţia f este continuă parţial în raport cu variabila y în punctul (0,b).
Pentru $a \neq 0$, avem $\lim\limits_{y \to b} f_{\Delta_2}(y) = f_{\Delta_2}(b)$, pentru fiecare $b \in \mathbb{R}$; rezultă că funcţia f este continuă parţial în raport cu variabila y în (a,b).
Aşadar, funcţia f este continuă parţial în raport cu variabila y în punctul (a,b).
Concluzia este că funcţia f este continuă parţial în fiecare punct (a,b) din $\mathbb{R}^2$.
ii). Avem în vedere Definiţia 4.2.10 privind continuitatea după o direcţie în origine. Din cele spuse mai sus, funcţia f este continuă după direcţia axelor Ox şi Oy în origine. Fie acum $\Delta : y = mx$, $m \neq 0$, o dreaptă oarecare care trece prin origine, diferită de axele de coordonate. Restricţia funcţiei f la dreapta Δ este

$$f_\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_\Delta(x) = \begin{cases} \frac{|m|}{|x|} e^{-\frac{|m|}{|x|}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Acum, avem $\lim\limits_{x\to 0} f_\Delta(x) = \lim\limits_{t\to\infty} te^{-t} = 0 = f_\Delta(0)$, adică restricţia funcţiei f la dreapta Δ este continuă în 0. Conform cu Definiţia 4.2.10, funcţia f este continuă după orice direcţie în origine.
iii). Avem în vedere Definiţia 4.2.8 privind continuitatea relativ la o mulţime a unei funcţii. Restricţia funcţiei f la mulţimea A este

$$f_A : A \to \mathbb{R},\ f_A(x,y) = \begin{cases} e^{-1}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Este clar că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_A(x,y) = e^{-1}$, ceea ce arată că restricţia funcţiei f la A nu este continuă în (0,0).
Concluzia este că funcţia f nu este continuă relativ la mulţi-mea A în origine.
iv). Din cele spuse imediat deasupra, rezultă că funcţia f nu este continuă în (0,0) (vezi Remarca 4.2.4). De altfel, din $\lim f(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}) = e^{-1}$ şi Criteriul lui Heine (Teorema 4.2.1), avem aceeaşi concluzie.
Fie acum un punct (0,b) din $\mathbb{R}^2$, $b \neq 0$. Fie (x_n, y_n) un şir de puncte din $\mathbb{R}^2$, convergent la (0,b). Aceasta înseamnă, conform Teoremei 3.1.7, că $\lim x_n = 0$ şi $\lim y_n = b$. De aici, $\lim \frac{|y_n|}{x_n^2} = \infty$ şi, ţinând cont încă o dată că $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t} = 0$, avem $\lim f(x_n, y_n) = 0 = f(0,b)$.
Aşadar, funcţia f este continuă în punctul (0,b) din $\mathbb{R}^2$, $b \neq 0$.
Fie acum un punct (a,b) din $\mathbb{R}^2$, $a \neq 0$. Pe o vecinătate sferică a acestui punct, cu raza suficient de mică, funcţia f este o compunere de funcţii continue: funcţia $u(x,y) = \frac{|y|}{x^2}$ şi funcţia $v(t) = te^{-t}$. Ca urmare, f este continuă pe întreaga această vecinătate.
Concluzia este că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
v). Având în vedere cele spuse mai sus la pc. ii) şi iii) şi ţinând cont de Propoziţiile 4.1.1 şi 4.1.2, rezultă că funcţia f nu are limită în origine. Ca urmare, (vezi Definiţia 4.2.7), funcţia f nu se poate prelungi prin continuitate în origine.
vi). Am tras mai sus concluzia că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Conform cu Teorema lui Cantor (Teorema 4.2.10), funcţia f este continuă uniform pe orice mulţime compactă din $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Mai mult, se poate arăta că funcţia f este continuă uniform pe orice mulţime mărginită din $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Arătăm că funcţia f este continuă uniform pe $\mathbb{R}^2 \setminus [-r,r] \times [-r,r]$, pentru fiecare $r > 0$.
(Schiţă). Prin calcul direct, se constată că funcţia f este derivabilă

parţial pe $[0,\infty) \times [0,\infty) \setminus \{(0,0)\}$ şi (vezi Remarca 5.1.1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2y}{x^3}e^{-\frac{|y|}{x^2}} + \frac{y}{x^2}\frac{2y}{x^3}e^{-\frac{y}{x^2}}, & x \neq 0, y \geq 0 \\ 0, & x = 0, y > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{|y|}{x^2}} - \frac{y}{x^4}e^{-\frac{y}{x^2}}, & x \neq 0, y \geq 0 \\ 0, & x = 0, y > 0 \end{cases}.$$

Având în vedere inegalitatea $t^k e^{-t} \leq M = \text{const.}$ pentru $t \geq 0$ şi $k = 1, 2$, se constată că aceste derivate parţiale sunt mărginite pe fiecare din mulţimile $[r,\infty) \times [r,\infty)$, $[0,r] \times [r,\infty)$, $[r,\infty) \times [0,r]$.
Folosind acest rezultat şi Teorema lui Lagrange privind funcţiile reale derivabile (vezi şi Remarca 5.4.3), se constată că funcţia f este lipschitziană pe fiecare din aceste mulţimi. Ca urmare (vezi Propoziţia 4.2.2), funcţia f este continuă uniform pe fiecare din aceste mulţimi şi deci şi pe reuniunea lor. Din simetria funcţiei faţă de axele de coordonate, la fel este funcţia şi pe celelalte cadrane. Din toate acestea, avem că funcţia f este continuă uniform pe $\mathbb{R}^2 \setminus [-r,r] \times [-r,r]$, pentru fiecare $r > 0$.
vii). Avem în vedere Definiţia 4.1.13 privind limitele iterate ale unei funcţii într-un punct şi obţinem:
– limita parţială în raport cu x a funcţiei f în punctul (a,b) este

$$\lim_{x\to a} f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{a^2}e^{-\frac{|y|}{a^2}}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases} = f(a,y),\ y \in \mathbb{R},$$

– limita parţială în raport cu y a funcţiei f în punctul (a,b) este

$$\lim_{y\to b} f(x,y) = \begin{cases} \frac{|b|}{x^2}e^{-\frac{|b|}{x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} = f(x,b),\ x \in \mathbb{R}.$$

De aici,

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \begin{cases} \frac{|b|}{a^2}e^{-\frac{|b|}{a^2}}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases} = f(a,b),$$

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = \begin{cases} \frac{|b|}{a^2}e^{-\frac{|b|}{a^2}}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases} = f(a,b),$$

ceea ce arată că f are limite iterate în fiecare punct (a,b) din $\mathbb{R}^2$. ■

Observaţie. Funcţia f este un exemplu de funcţie care are limite iterate în origine, este continuă parţial în origine dar nu este continuă în origine (nu are nici măcar limită în origine).

Observaţie. Mai trebuie demonstrat că dacă f este continuă uniform pe două mulţimi, atunci ea este continuă uniform şi pe reuniunea lor.

Problema 11

Dat fiind $\varepsilon > 0$, să se determine un $\delta(\varepsilon) > 0$ satisfăcând condiţia de continuitate uniformă pentru funcţia

$f : (0,1) \times \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(e^x \cos y, ze^{\sin y}\right)$.

Rezolvare. Avem în vedere Definiţia 4.2.14, adaptată tipului de funcţie din enunţ. În Definiţie, considerăm d_1 şi d_2 ca fiind metricile induse de sup–normele pe spaţiile $\mathbb{R}^3$ şi respectiv $\mathbb{R}^2$. Aşadar, funcţia f este continuă uniform pe mulţimea $D = (0,1) \times \mathbb{R} \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^3$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice (x_1,y_1,z_1) şi $(x_2,y_2,z_2) \in D$ cu $| x_1 - x_2 | < \delta(\varepsilon)$, $| y_1 - y_2 | < \delta(\varepsilon)$, $| z_1 - z_2 | < \delta(\varepsilon)$, să avem

$| e^{x_1} \cos y_1 - e^{x_2} \cos y_2 | < \varepsilon$, $| z_1 e^{\sin y_1} - z_2 e^{\sin y_2} | < \varepsilon$.

Fie $f_1(x,y,z) = e^x \cos y$ prima funcţie componentă a lui f. Având în vedere Formula lui Lagrange pentru funcţii de mai multe variabile reale (vezi Remarca 5.4.3), pentru (x,y,z) şi (a,b,c) din D, avem

$f_1(x,y,z) - f_1(a,b,c) = e^{\xi} \cos\eta\ (x - a) - e^{\xi} \sin\eta (y - b)$,

cu $\xi \in \overline{a,x}$ şi $\eta \in \overline{b,y}$.

Analog, pentru $f_2(x,y,z) = ze^{\sin y}$, a doua funcţie componentă a lui f, avem

$f_2(x,y,z) - f_2(a,b,c) = \beta \cos\alpha e^{\sin\alpha}(y - b) + e^{\sin\alpha}(z - c)$,

cu $\alpha \in \overline{b,y}$ şi $\beta \in \overline{c,z}$.

Observând acum că cele patru derivate parţiale de mai sus sunt mărginite în modul pe D de numărul $M = e$, avem

$| e^{x_1} \cos y_1 - e^{x_2} \cos y_2 | \le M(| x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |)$

$| z_1 e^{\sin y_1} - z_2 e^{\sin y_2} | \le M(| y_1 - y_2 | + | z_1 - z_2 |)$.

Se vede de aici că dacă se alege $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2e}$, atunci condiţia de continuitate uniformă pentru funcţia f pe domeniul său de definiţie D se verifică. ■

Observaţie. În fapt, s–a arătat că fiecare funcţie componentă a lui f este continuă uniform pe mulţimea D, iar $\delta(\varepsilon)$ cerut este minimul dintre cei doi $\delta(\varepsilon)$, cei corespunzători celor două componente ale funcţiei.

În general, o funcţie $f = (f_1,f_2,...f_q) : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continuă uniform pe mulţimea D dacă şi numai dacă fiecare componentă $f_1,f_2,...f_q$ este continuă uniform pe D.

Observaţie. Teorema lui Cantor (Teorema 4.2.10) arată că într–o situaţie specială pentru domeniul de definiţie D, o funcţie continuă $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ poate fi chiar continuă uniform pe D.
Alte situaţii speciale sunt prezentate mai jos:
a). Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval necompact. O funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$ care are limite finite în capetele intervalului I este continuă uniform.
b). Orice funcţie continuă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ care este periodică în raport cu fiecare variabilă, este continuă uniform pe $\mathbb{R}^p$.
Observaţie. Se poate demonstra că funcţia f este continuă uniform pe mulţimea D şi altfel:
Varianta 1. Fie mai întâi f_0 restricţia funcţiei f la mulţimea $(0,1) \times [0,2\pi] \times (-1,1)$ şi apoi f_1 prelungirea prin continuitate a lui f_0 pe mulţimea $\Omega = [0,1] \times [0,2\pi] \times [-1,1]$. În sfârşit, fie f_2 prelungirea prin 2π – periodicitate în raport cu variabila y a lui f_1 la mulţimea $\overline{D} = [0,1] \times \mathbb{R} \times [-1,1]$. Deoarece mulţimea Ω este compactă, conform Teoremei lui Cantor (Teorema 4.2.10), funcţia continuă f_1 este continuă uniform pe mulţimea Ω. Având în vedere cele de mai sus, funcţia f_2 este continuă uniform pe mulţimea $\overline{D}$. Ca urmare, restricţia sa la D, adică funcţia f, are aceeaşi proprietate.
Varianta 2. (Schiţă). Funcţia exponenţială şi funcţia de gradul întâi ce apar în expresia lui f sunt continue uniform pe intervalele deschise corespunzătoare pentru că se pot prelungi prin continuitate pe intervalele compacte corespunzătoare. Celelalte două funcţii sunt continue uniform pe $\mathbb{R}$ deoarece sunt continue şi 2π – periodice pe $\mathbb{R}$. Mai folosim proprietatea că produsul a două funcţii continue uniform şi mărginite este o funcţie continuă uniform pe mulţimea respectivă. Ca urmare, componentele lui f, deci şi f, sunt funcţii continue uniform pe D.

Problema 12

Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

să se determine mulţimea punctelor de continuitate C, mulţimea punctelor de derivabilitate parţială D precum şi mulţimea punctelor de diferenţiabilitate E.

Rezolvare. a). Studiem continuitatea funcţiei. Fie $(a,b) \neq (0,0)$ un punct din $\mathbb{R}^2$. Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2+b^2}$

a acestui punct, cele două componente ale funcţiei, $f_1(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ şi $f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, sunt funcţii continue, fiind compuneri de astfel de funcţii: funcţii polinomiale, funcţia raţională $\frac{u}{v}$, funcţia radical. Ca urmare, funcţia f este continuă pe S. Studiem acum continuitatea funcţiei în origine. Pentru prima componentă, avem

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \max\{| y^2 |,| xy |\} \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\longrightarrow} 0$$

ceea ce arată că f_1 este continuă în (0,0).
Pentru a doua componentă, avem că $\lim f_2(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n})$ nu există, ceea ce arată că f_2 nu este continuă în (0,0) (de fapt, nu are nici măcar limită în acest punct).
În concluzie, mulţimea punctelor de continuitate a funcţiei f este $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b). Studiem derivabilitatea parţială a funcţiei. Fie $(a,b) \neq (0,0)$ un punct din $\mathbb{R}^2$. Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2 + b^2}$ a acestui punct, cele două componente ale funcţiei, $f_1(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ şi $f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, sunt funcţii derivabile parţial (vezi Definiţia 5.1.2), fiind compuneri de astfel de funcţii: funcţii polinomiale, funcţia raţională $\frac{u}{v}$, funcţia radical. Ca urmare, funcţia f este derivabilă parţial pe S (vezi Definiţia 5.1.5). Având în vedere regulile de derivare parţială (vezi Remarca 5.1.2), avem derivatele parţiale în raport cu variabilele x şi y ale funcţiilor f_1 şi f_2 pe mulţimea $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{y^2\sqrt{x^2 + y^2} - xy^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^4}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{2xy\sqrt{x^2 + y^2} - xy^2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{xy(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Având în vedere Definiţiile 5.1.4 şi 5.1.5, avem, pe D_0,
– derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{y^4}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right);$$

– derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right);$$

– derivata funcţiei f (sau matricea lui Jacobi a funcţiei f),

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{xy(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Studiem acum derivabilitatea parţială a funcţiei în origine. Începem cu componentele funcţiei. Urmând Definiţia 5.1.1 şi Remarca 5.1.1,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x,0) - f_1(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_1(0,y) - f_1(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x,0) - f_2(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_2(0,y) - f_2(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Având în vedere Definiţiile 5.1.4 şi 5.1.5, funcţia f este derivabilă parţial în origine şi derivata ei în acest punct este $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

În concluzie, mulţimea punctelor de derivabilitatea parţială a funcţiei f este $D = \mathbb{R}^2$.

c). Studiem diferenţiabilitatea funcţiei. Deoarece funcţia nu este continuă în origine, ea nu este diferenţiabilă în acest punct, conform Teoremei 5.1.1. Fie acum $(a,b) \neq (0,0)$ un punct din $\mathbb{R}^2$. Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2+b^2}$ a acestui punct, derivata parţială $f'(x,y)$ este continuă pe S deoarece cele patru derivate parţiale $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ sunt continue pe S, fiind compuneri de astfel de funcţii (vezi Corolarul 4.2.1). Ca urmare, conform cu condiţia suficientă de diferenţiabilitate din Teorema 5.1.3, funcţia f este diferenţiabilă pe S şi deci pe D_0.

În concluzie, mulţimea punctelor de diferenţiabilitate a funcţiei f este $E = D_0$. ■

Observaţie. De reţinut:

- continuitatea este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct;
- derivabilitatea parţială este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct;

Sensul exact al acestor afirmaţii trebuie înţeles ca în Teoremele 5.1.1 şi 5.1.2.

Observaţie. Conform cu Definiţia 5.1.7, Propoziţia 5.1.5 şi Teorema 5.1.2, diferenţiala funcţiei f într–un punct $(a,b) \in E$ este aplicaţia liniară $df(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a cărei matrice în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ este $f'(a,b)$.

Aşadar, $df(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin

$$df(a,b)(u,v) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)u + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)v, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)u + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)v\right)$$

pentru fiecare $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

În funcţie de diferenţialele elementare dx, dy, se poate scrie

$$df(a,b) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)dy, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)dy\right).$$

Reamintim că, de fapt, diferenţialele elementare dx, dy sunt diferenţialele funcţiilor proiecţie $dx = dpr_1$ şi $dy = dpr_2$ şi coincid cu acestea (vezi Remarca 5.1.9):

$$dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ dx(u,v) = u \text{ şi } dy : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ dy(u,v) = v.$$

Concret, în punctul (3,4) avem că $df(3,4) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este

$$df(3,4) = \left(\frac{256}{125}dx + \frac{408}{125}dy, \frac{28}{625}dx - \frac{21}{625}dy\right).$$

Problema 13

Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$. Să se arate apoi că funcţia f admite derivate parţiale mixte de ordinul doi pe $\mathbb{R}^2$ şi să se deducă faptul că cel puţin una dintre aceste derivate nu este continuă în origine. În ce puncte din $\mathbb{R}^2$ funcţia f este diferenţiabilă de două ori?

Rezolvare. a). Începem prin a studia diferenţiabilitatea funcţiei în origine. Din

$$0 \le \left|xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| = |\,xy\,| \left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \le |\,xy\,| \underset{\substack{x \to o \\ y \to o}}{\longrightarrow} 0,$$

rezultă că funcţia este continuă în origine.

Urmând din nou Definiţia 5.1.1 şi Remarca 5.1.1, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

ceea ce arată că funcţia f este derivabilă parţial în origine.

Aşadar, cele două condiţii necesare de diferenţiabilitate a unei funcţii într–un punct (vezi Teoremele 5.1.1 şi 5.1.2) sunt îndeplinite. Considerând acum aplicaţia liniară nulă $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x,y) = 0$, avem

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} xy\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

pentru că

$$0 \le \left|xy\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)}\right| \le \max\{|\,x\,|, |\,y\,|\}.$$

Conform Definiţiei 5.1.6, f este diferenţiabilă în origine.

Studiem acum diferenţiabilitatea funcţiei într-un punct (a,b) diferit de origine. Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2 + b^2}$ a acestui punct, funcţia f este o funcţie raţională şi ca urmare, este derivabilă parţial pe S (vezi Definiţia 5.1.1). Având în vedere regulile de derivare parţială (Remarca 5.1.2) şi cele spuse mai sus, avem derivatele parţiale în raport cu x şi y ale funcţiei f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Deoarece aceste derivate parţiale sunt funcţii raţionale pe S, ele sunt funcţii continue pe S. Conform unei condiţii suficiente de diferenţiabilitate (Teorema 5.1.3), funcţia f este diferenţiabilă pe S şi deci pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Mai facem observaţia că pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem

$$0 \leq \left|\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\right| \leq 3|y| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0,\ 0 \leq \left|\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\right| \leq 3|x| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0,$$

ceea ce arată că derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.
Tragem concluzia că funcţia f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi chiar mai mult, este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$ (vezi Definiţia 5.1.9 şi Propoziţia 5.1.6).
b). Începem prin a studia existenţa derivatelor parţiale mixte de ordinul doi ale funcţiei f în origine. Conform cu Definiţia 5.2.1, avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

ceea ce arată că f are derivate parţiale mixte de ordinul doi în (0,0).
Studiem acum existenţa derivatelor parţiale mixte de ordinul doi ale funcţiei f într-un punct $(a,b) \neq (0,0)$. Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2 + b^2}$ a acestui punct, derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcţii raţionale şi ca urmare, sunt derivabile parţial pe S (vezi Definiţia 5.1.1). Ca urmare, funcţia f admite derivate parţiale mixte de ordinul doi pe $\mathbb{R}^2$. Dacă amâdouă derivatele parţiale mixte de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ar fi continue în origine, atunci, conform cu Teorema lui Schwarz (Teorema 5.2.1), derivatele parţiale mixte de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ar fi egale în ori-gine, ceea ce contrazice rezultatele de mai sus. Aşadar, cel puţin una dintre derivatele parţiale mixte de

ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine. De altfel, calcule simple ne conduc la

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

pentru $(x,y) \neq (0,0)$, fapt normal, pentru că funcţia f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (vezi Definiţia 5.2.9 şi Corolarul 5.2.1). Acum, din $\lim \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{1}{n},0) = 1$ şi $\lim \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\frac{1}{n}) = -1$, rezultă că nici una din derivatele parţiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine.

c). Deoarece funcţia f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, din Definiţia 5.2.11 şi din Teorema 5.2.2 a lui Young rezultă că ea este de două ori diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ■

Observaţie. Conform cu Definiţia 5.2.12, diferenţiala de ordin doi a funcţiei f în punctul $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ este aplicaţia $d^2f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d^2f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)dy^2.$$

Problema 14

Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de clasă C^2 şi fie funcţia compusă

$$F : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho \cos\theta \sin\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\varphi).$$

Să se arate că F este de clasă C^2 şi verifică identitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\mathrm{ctg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

(expresia laplaceianului în coordonate sferice (polare în spaţiu)).

Rezolvare. Notăm variabilele funcţiei f prin x, y, z. Considerăm funcţiile x, y, z : $D = (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$, definite prin $x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos\theta \sin\varphi$, $y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos\varphi$. Mai considerăm funcţia vectorială u care are drept componente aceste trei funcţii: $u : D \to \mathbb{R}^3$, $u = (x,y,z)$. Funcţia u este de clasă C^2 pe mulţimea D pentru că componentele ei, funcţiile x, y, z, au derivate parţiale de ordinul întâi şi doi continue pe D. Cum şi funcţia f este de clasă C^2 pe mulţimea $\mathbb{R}^3$, rezultă, conform Teoremei de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse (Teorema 5.3.2), că funcţia compusă $f \circ u = F$ este de clasă C^2 pe mulţimea D. Tot Teorema amintită ne dă şi formulele de calcul pentru derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei compuse F. Precizăm că formulele de calcul pentru derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei compuse F sunt date de Teorema 5.3.1. Aşadar, avem

$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) +$

$+ \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) +$

$+ \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi).$

Calculăm derivatele parţiale ale funcţiilor x, y, z:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) = \cos \theta \sin \varphi,$$
$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) = \sin \theta \sin \varphi,$$
$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) = \cos \varphi.$$

Facem următoarea precizare: de obicei, în formulele anterioare, nu se scriu punctele în care se calculează derivatele, pentru a nu se supraîncărca scrierea. Însă, ele trebuie să fie prezente tacit. Cu aceasta, formula de mai sus se scrie

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \rho},$$

şi ca urmare,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} \cos \varphi,$$

adică mult mai convenabil.

În mod asemănător, avem

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \varphi}.$$

Calculăm celelalte derivate parţiale ale funcţiilor x, y, z

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \sin \varphi,\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} = \rho \cos \theta \sin \varphi,\ \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \theta} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \varphi} = \rho \cos \theta \cos \varphi,\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \varphi} = \rho \sin \theta \cos \varphi,\ \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi,$$

şi cu acestea,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \rho \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \rho \cos \theta \sin \varphi,$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} \rho \sin \varphi.$$

Trecem acum la calculul derivatelor parţiale de ordinul doi ale funcţiei compuse F. Aplicând regulile de derivare a sumei şi a produsului precum şi a unei funcţii compuse, avem

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} \cos \varphi\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right) \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right) \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\right) \cos \varphi =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z} \partial \mathrm{x}} \cos \varphi\right) \cos \theta \sin \varphi +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z} \partial \mathrm{y}} \cos \varphi\right) \sin \theta \sin \varphi +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{z}} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{z}} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}^2} \cos \varphi\right) \cos \varphi.$$

În mod asemănător, avem

$\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta\sin\varphi\right) =$
$= -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\rho\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\rho\cos\theta\sin\varphi -$
$-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta\sin\varphi =$
$= -\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\rho\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\rho\cos\theta\sin\varphi\right)\rho\sin\theta\sin\varphi +$
$+\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\rho\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rho\cos\theta\sin\varphi\right)\rho\cos\theta\sin\varphi -$
$-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta\sin\varphi$
şi, în sfârşit,
$\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial z}\rho\sin\varphi\right) =$
$= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\rho\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\rho\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\rho\sin\varphi -$
$-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial z}\rho\cos\varphi =$
$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\rho\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\rho\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\rho\sin\varphi\right)\rho\cos\theta\cos\varphi +$
$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\rho\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rho\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\rho\sin\varphi\right)\rho\sin\theta\cos\varphi -$
$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\rho\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\rho\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\rho\sin\varphi\right)\rho\sin\varphi -$
$-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial z}\rho\cos\varphi.$
Introducând derivatele $\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial F}{\partial\rho}$, $\frac{\partial F}{\partial\varphi}$ în membrul drept al identităţii din enunţ, se constată că acesta este egal cu membrul stâng $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ al identităţii.
Identitatea din enunţ este demonstrată. ■

Observaţie. Formulele care dau derivatele parţiale ale funcţiei compuse $F = f \circ u$ în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiilor ce se compun provin din egalitatea matriceală $F'(a) = f'(u(a))\cdot u'(a)$ (Teorema 5.3.1 de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse). În cazul funcţiilor din Problemă, această egalitate devine

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}, \frac{\partial F}{\partial\theta}, \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Aici, derivatele lui F sunt calculate în punctul $a = (\rho, \theta, \varphi)$ iar derivatele lui f sunt calculate în punctul

$$u(a) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi).$$

Precizăm încă odată că, de obicei, în formulele anterioare, nu se scriu punctele în care se calculează derivatele, pentru a nu se supraîncărca

scrierea. Însă, ele trebuie să fie prezente tacit.
În sfârşit, se observă faptul că în formula generală

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \rho}$$

se află numai termenii de forma $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho}$ corespunzători variabilelor x (sau y sau z) ale lui f prin intermediul cărora funcţia compusă

$$\mathrm{F}(\rho,\theta,\varphi) = \mathrm{f}(\underbrace{\rho\cos\theta\sin\varphi}_{\mathrm{x}}, \underbrace{\rho\sin\theta\sin\varphi}_{\mathrm{y}}, \underbrace{\rho\cos\varphi}_{\mathrm{z}})$$

depinde de variabila ρ. Aceşti termeni amintesc de regula de derivare a funcţiilor compuse de o variabilă reală $(\mathrm{g}(\mathrm{u}(\mathrm{t})))' = \mathrm{g}'(\mathrm{u}(\mathrm{t}))\cdot\mathrm{u}'(\mathrm{t})$.

Observaţie. Formulele care dau derivatele parţiale de ordin superior ale funcţiei compuse $\mathrm{F} = \mathrm{f}\circ\mathrm{u}$ în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiilor ce se compun se obţin derivând derivatele parţiale de ordinul întâi, având în vedere regulile de derivare ale operaţiilor ce apar, inclusiv a operaţiei de compunere a funcţiilor. Facem câteva precizări generale, plecând de la una din derivatele de mai sus.
Am avut de calculat $\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)$. Aici,

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi).$$

Notăm $\mathrm{g} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}$ şi atunci, derivata $\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)$ înseamnă derivata

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\mathrm{g}(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi).$$

Ori, aceasta este deja calculată, $\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \rho}$, rămânând să înlocuim $\mathrm{g} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}$ pentru formula generală (şi derivatele $\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \rho}$, pentru formula particulară din Problemă):

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}\partial \mathrm{x}}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}\partial \mathrm{x}}\cos\varphi.$$

Mai facem precizarea că Teorema 5.3.2 privind diferenţiabilitatea funcţiilor compuse dă formulele de calcul pentru derivatele parţiale de ordin doi ale unei funcţii compuse. În demonstraţia Teoremei sunt deduse aceste formule, la modul general.
Este recomandat ca aceste formule să fie deduse de fiecare dată, plecând de la derivatele parţiale de ordinul întâi.

Observaţie. Pentru o funcţie f de clasă C^2 şi de două sau trei variabile reale, expresia $\Delta \mathrm{f} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}$ respectiv $\Delta \mathrm{f} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}^2}$ se numeşte laplaceianul lui f.
Expresia $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \rho} + \frac{\mathrm{ctg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}$ se numeşte laplaceianul lui f în coordonate sferice (polare în spaţiu). Problema arată că laplaceianul unei funcţii de clasă C^2 nu se schimbă (este invariant) la trecerea la coordonate sferice (polare în spaţiu).

Problema 15

Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \cos y - \cos(1-\cos x)}{x^4+y^4}$.

Rezolvare. Folosim Formula lui Taylor de ordinul patru pentru funcţia de două variabile f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \cos y - \cos(1-\cos x)$$

(vezi Teorema 5.4.5). Pentru aceasta, calculăm, pentru început, derivatele parţiale până la ordinul patru inclusiv:

a). derivatele parţiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(1-\cos x)\cdot \sin x - \frac{x^3}{3},\ \frac{\partial f}{\partial y} = y - \sin y;$$

b). derivatele parţiale de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(1-\cos x)\cdot \sin^2 x + \sin(1-\cos x)\cdot \cos x - x^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1-\cos y;$$

c). derivatele parţiale de ordinul trei:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\sin(1-\cos x)\cdot \sin^3 x + \cos(1-\cos x)\sin 2x +$$
$$+ \frac{1}{2}\cos(1-\cos x)\sin 2x - \sin(1-\cos x)\sin x - 2x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \sin y;$$

d). derivatele parţiale de ordinul patru:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \cos(1-\cos x)\big(-\sin^4 x + 3\cos 2x - \sin^2 x\big) +$$
$$+ \sin(1-\cos x)\big(-4\sin^2 x\cos x - \sin x\sin 2x - \cos x\big) - 2,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = 0,\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = 0,\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \cos y.$$

Calculăm valoarea lui f şi a derivatelor parţiale de mai sus în punctul (0,0) şi scriem Formula lui Taylor amintită:

$$f(x,y) = \frac{1}{4!}\left(x^4+y^4\right) + \omega(x,y)\big(x^2+y^2\big)^2,$$

unde ω este o funcţie continuă şi nulă în (0,0).

Acum, calculăm limita:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \cos y - \cos(1-\cos x)}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to o\\ y\to o}} \frac{\frac{1}{4!}\left(x^4+y^4\right) + \omega(x,y)\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{1}{4!} + \omega(x,y)\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^4}\right) = \frac{1}{4!},$$

pentru că $\left|\omega(x,y)\frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}\right| \le 2|\omega(x,y)| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0.$

În concluzie, limita cerută este $\frac{1}{24}$. ■

Observaţie. Pentru calculul limitelor funcţiilor de mai multe variabile, nu există o Teoremă de tip l'Hôpital.
Metoda de mai sus suplineşte această lipsă.

Problema 16

Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$.

Rezolvare. Funcţia f este de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $\mathbb{R}^2$. Conform Teoremei 5.4.6 (Fermat), punctele de extrem local ale funcţiei f se află printre punctele staţionare ale sale, adică printre soluţiile sistemului (S) : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(1 - 2xy - 2x^2\right)e^{-(x^2+y^2)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(1 - 2xy - 2y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Sistemul (S) devine

$$(S) : \begin{cases} 2xy + 2x^2 = 1 \\ 2xy + 2y^2 = 1 \end{cases},$$

pentru că exponenţiala nu se anulează.
Scăzând ecuaţiile sistemului, rezultă că $y = \pm\, x$ şi ca urmare, soluţiile sistemului sunt : $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi $b = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
Pentru a stabili dacă aceste puncte staţionare ale funcţiei sunt puncte de extrem local, folosim condiţia suficientă de extrem dată de Teorema 5.4.7, condiţie care pentru funcţii de două variabile este precizată exact în Remarca 5.4.6. Pentru aceasta, calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left(4x^2y + 4x^3 - 2y - 6x\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left(4xy^2 + 4y^3 - 2x - 6y\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left(4x^2y + 4xy^2 - 2y - 2x\right)$$

şi apoi valorile lor în punctele staţionare a şi b ale funcţiei:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{e}},\ A' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{\sqrt{e}},$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{e}},\ B' = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}},$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{e}},\ C' = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{\sqrt{e}}.$$

În punctul a avem $\Delta = B^2 - AC = -\frac{8}{e} < 0$, ceea ce arată că a este punct de extrem local pentru f şi anume, punct de maxim local, pentru că $A < 0$. Valoarea maximă locală a funcţiei este

$$f_{\max loc} = f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{\sqrt{e}}.$$

În punctul b avem $\Delta = B^2 - AC = -\frac{8}{e} < 0$, ceea ce arată că b este punct de extrem local pentru f şi anume, punct de minim local, pentru că $A' > 0$. Valoarea minimă locală a funcţiei este

$$f_{\min loc} = f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{\sqrt{e}}. \ \blacksquare$$

Observaţie. Condiţia suficientă de extrem din Teorema 5.4.7 este dată în termeni de diferenţiala a doua sau în termeni privind matricea hessiană f'' a funcţiei în punctul staţionar supus studiului (vezi Remarca 5.4.5).

Problema 17

Să se determine extremele funcţiei implicite $z = z(x,y)$ definită de ecuaţia $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$.

Rezolvare. Fie (x_0,y_0) un punct de extrem local pentru funcţia implicită $z = z(x,y)$ definită de ecuaţia din enunţ. Atunci, (x_0,y_0) este punct staţionar pentru funcţia z (Teorema 5.4.6 a lui Fermat), adică $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Cum funcţia z este definită de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, din TFI (Teorema 5.5.1) rezultă că $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Aşadar, x_0, y_0 şi $z_0 = z(x_0,y_0)$ sunt soluţii ale sistemului

$$(S) : F(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Concret, în Problemă, acest sistem este (se subînţelege, F este membrul stâng el ecuaţiei din enunţ)

$$(S) : \begin{cases} z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) & = 0 \\ 40x - 8y - 8 & = 0 \\ 40y - 8x - 8 & = 0 \end{cases}$$

şi are o singură soluţie: $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = 1$.
Observăm că pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 1 \neq 0$.
Din cele spuse mai sus se constată cu uşurinţă (Teorema 5.5.1 TFI) că ecuaţia dată admite o singură soluţie $z = z(x,y)$ pe o vecinătate U_0 a punctului $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ astfel ca $z(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 1$ şi este de clasă C^2. În plus, punctul $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ este punct staţionar pentru această funcţie. Tot din TFI avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{40x - 8y - 8}{3z^2(x,y) + 1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{40y-8x-8}{3z^2(x,y)+1},$$
pentru fiecare $(x,y) \in U_0$,
Folosind formulele de derivare ale funcţiilor compuse (vezi Teorema 5.3.1), se obţin derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei z:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{40\big(3z^2(x,y)+1\big)-(40x-8y-8)6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)}{(3z^2(x,y)+1)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{40\big(3z^2(x,y)+1\big)-(40y-8x-8)6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{(3z^2(x,y)+1)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) = -\frac{-8\big(3z^2(x,y)+1\big)-(40y-8x-8)6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)}{(3z^2(x,y)+1)^2}$$
şi ca urmare, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 2$.
De aici şi din Teorema 5.4.7 (şi Remarca 5.4.6) tragem concluzia că punctul $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ este punct de extrem local pentru funcţia z şi anume punct de maxim. Valoarea maximă locală a lui z este
$$z_{\max\,\mathrm{loc}} = z(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) = 1.$$
Facem următoarea observaţie: din identitatea
$$z^3(x,y) + z(x,y) + 20(x^2+y^2) - 8(xy+x+y) = 0,$$
valabilă pentru fiecare $(x,y) \in U_0$, rezultă că
$$(1-z(x,y))\big(z^2(x,y)+z(x,y)+2\big) = (4x-1)^2 + (4y-1)^2 + 4(x-y)^2,$$
ceea ce arată că $z(x,y) \leq 1$, $\forall\, z(x,y) \in U_0$.
Aceasta arată că punctul $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ este punct de maxim absolut pentru funcţia implicită $z = z(x,y)$. ■

Observaţie. Se poate întâmpla ca sistemul (S) de mai sus să aibă mai multe soluţii (x_0,y_0,z_0). În acest caz, se studiază dacă funcţia implicită $z = z(x,y)$ definită de ecuaţie şi de fiecare condiţie iniţială $z(x_0,y_0) = z_0$, z de clasă C^2, are un extrem local în (x_0,y_0).

Problema 18

Să se arate că sistemul
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2-4x-6 &= 0\\ x^3-y^3+z^3-t^3-3z &= 0\end{cases}$$
defineşte pe o vecinătate a punctului (0,1) funcţiile $z = z(x,y)$, $t = t(x,y)$ care verifică condiţiile $z(0,1) = 2$, $t(0,1) = 1$ şi care sunt de clasă C^∞. Este punctul (0,1) punct de extrem local pentru funcţia z? Să se scrie ecuaţia planului tangent la suprafaţa de ecuaţie $t = t(x,y)$ în punctul (0,1,1).

Rezolvare. Enunţul sugerează să aplicăm Teorema sistemelor de funcţii implicite (Teorema 5.5.2). Pentru aceasta, considerăm funcţiile $F, G : \mathbb{R}^4 : \to \mathbb{R}$, definite prin

$$F(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 4x - 6,$$
$$G(x,y,z,t) = x^3 - y^3 + z^3 - t^3 - 3z,$$
(în rolul funcţiilor F_1 respectiv F_2 din Teoremă). Fie încă punctele (0,1) şi (2,1) din $\mathbb{R}^2$ (în rolul punctelor a respectiv b din Teoremă).
Se constată că se verifică ipotezele din Teoremă:
1). $F(0,1,2,1) = 0$, $G(0,1,2,1) = 0$;
2). funcţiile F şi G sunt de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^4$, fiind funcţii polinomiale;
3). determinantul funcţional $\frac{D(F,G)}{D(z,t)}$ este nenul în (0,1,2,1) pentru că
$$\frac{D(F,G)}{D(z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2t \\ 3z^2 - 3 & -3t^2 \end{vmatrix} =$$
$$= -6zt^2 - 6t(z^2 - 1)\Big|_{(0,1,2,1)} = -30.$$
Conform teoremei, există o vecinătate U_0 a punctului (0,1) şi o vecinătate V_0 a punctului (2,1) şi o funcţie vectorială $(z,t) : U_0 \to V_0$ astfel încât, pentru $(x,y) \in U_0$,
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2(x,y) + t^2(x,y) - 4x - 6 = 0 \\ x^3 - y^3 + z^3(x,y) - t^3(x,y) - 3z(x,y) = 0 \end{cases}$$
(adică funcţiile z şi t sunt soluţii în raport cu z şi t ale sistemului dat pe mulţimea U_0).
În plus, $z(0,1) = 2$, $v(0,1) = 1$, funcţiile z şi t sunt de clasă C^∞ pe U_0 şi sunt unice cu aceste proprietăţi. Din cele spuse mai sus, rezultă că sistemul dat defineşte pe vecinătatea U_0 a punctului (0,1) pe z şi t ca funcţii de x şi y (vezi Definiţia 5.5.4).
Prima parte a problemei este rezolvată.
TSFI dă expresiile derivatelor parţiale ale funcţiilor z şi t:
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,t)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,t)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}}$$
$$\frac{\partial t}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}},\ \frac{\partial t}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}}$$
pentru $(x,y) \in U_0$, cei cinci determinanţi funcţionali calculându-se în punctul $(x,y,z(x,y),t(x,y))$.
Calculăm aceşti determinanţi funcţionali:
$$\frac{D(F,G)}{D(x,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x - 4 & 2t \\ 3x^2 & -3t^2 \end{vmatrix} =$$
$$= -6t^2(x,y)(x - 2) - 6x^2 t(x,y),$$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2t \\ -3y^2 & -3t^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6yt^2(x,y) + 6y^2t(x,y),$$

$$\frac{D(F,G)}{D(z,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2x-4 \\ 3z^2-3 & 3x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6x^2z(x,y) - (3z^2(x,y)-3)(2x-4),$$

$$\frac{D(F,G)}{D(z,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2y \\ 3z^2-3 & -3y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6y^2z(x,y) - 2y(3z^2(x,y)-3)$$

şi atunci, $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{2}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial t}{\partial x}(x,y) = -\frac{6}{5}$, $\frac{\partial t}{\partial y}(x,y) = -1$.
Deoarece derivatele parţiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ nu sunt nule în punctul (0,1), acesta nu este punct de extrem local pentru funcţia z (vezi Teorema 5.4.6 a lui Fermat).
Având în vedere cele spuse în §5.9.2, ecuaţia planului tangent la suprafaţa de ecuaţie $t = t(x,y)$ în punctul (0,1,1) este

$$6x + 5y + 5t - 10 = 0. \blacksquare$$

Observaţie. Pentru a determina extremele funcţiilor implicite $z = z(x,y)$ şi $t = t(x,y)$ definite de sistemul dat se poate proceda ca în problema anterioară.

Problema 19

Să se arate că funcţia

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,\infty),\ f(x,y) = (xy, \tfrac{y}{x})$$

este regulată şi bijectivă. Să se constate că funcţia inversă f^{-1} este regulată. Să se determine imaginea f(K) a domeniului compact K limitat de curbele de ecuaţii $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 5x$.

Rezolvare. Pe domeniul $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$ din $\mathbb{R}^2$, componentele $f_1(x,y) = xy$ şi $f_2(x,y) = \frac{y}{x}$ sunt de clasă C^1, fiind funcţii elementare. Apoi, jacobianul J_f al lui f este

$$J_f = \frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} \neq 0.$$

Conform cu Definiţia 5.6.1, funcţia f este regulată pe D.
Fie acum un punct oarecare $(u,v) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$. Egalitatea $f(x,y) = (u,v)$, văzută ca o ecuaţie, înseamnă sistemul $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$, care are soluţia unică $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$.
Aceasta arată că funcţia f este bijectivă (vezi Remarca 1.2.3), iar funcţia inversă a sa este $f^{-1} : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,\infty)$, definită prin $f^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$.
(vezi Remarca 1.2.4). Ca şi mai sus, componentele lui f^{-1} sunt de clasă C^1 pe D, iar jacobianul $J_{f^{-1}}$ al lui f^{-1} este

$$J_{f^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Conform cu Definiţia 5.6.1, funcţia f^{-1} este regulată pe D.
Deoarece f este continuă pe D (direct sau din Propoziţia 5.6.2), avem că ea transformă mulţimea compactă K (vezi mai jos) tot într–o mulţime compactă $\Omega = f(K)$. Conform cu Corolarul 5.6.1, transformarea regulată f duce interiorul lui K într–o mulţime deschisă, evident inclusă în f(K) şi exteriorul lui K într–o mulţime deschisă, evident inclusă în $f(\mathcal{C}K)$. Ca urmare, transformarea regulată f duce frontiera lui K, adică patrulaterul curbiliniu P în frontiera lui f(K), pe care o notăm Γ. Aşadar, mulţimea compactă $\Omega = f(K)$ este limitată de curba Γ.
Determinăm acum imaginile prin f ale fiecăreia din curbele din enunţ. Fie C_1 curba de ecuaţie $y = \frac{1}{x}$. Aceasta înseamnă că (vezi Definiţia 5.9.7) $C_1 = \{(x,y) \in D \mid y = \frac{1}{x}\}$. Ca urmare, $f(C_1) = f(x,\frac{1}{x}) = (1,\frac{1}{x^2})$, $x > 0$, ceea ce arată că $f(C_1)$ este dreapta $u = 1$ din planul $(u,v) \equiv \mathbb{R}^2$ (mai exact, este semidreapta $u = 1$, $v > 0$).
La fel, f transformă curba $y = \frac{2}{x}$ în semidreapta $u = 2$, $v > 0$, curba $y = \frac{x}{2}$ în semidreapta $v = \frac{1}{2}$, $u > 0$ şi curba $y = 5x$ în semidreapta $v = 5$, $u > 0$.
Din cele spuse mai sus, rezultă că curba Γ este este dreptunghiul $A'B'C'D'$ din planul $(u,v) \equiv \mathbb{R}^2$ (văzut ca linie poligonală închisă), unde $A'(1,\frac{1}{2})$, $B'(2,\frac{1}{2})$, $C'(2,5)$, $D'(1,5)$.
În concluzie, imaginea f(K) este Ω = dreptunghiul plin $A'B'C'D'$, adică $\Omega = [1,2] \times [\frac{1}{2},5]$. ■
Observaţie. Se observă că între jacobienii lui f şi f^{-1} are loc relaţia (care aminteşte de formula ce dă derivata funcţiei inverse a unei funcţii reale de o variabilă reală) $J_{f^{-1}}(u,v) = \frac{1}{J_f(x,y)}$, cu $f(x,y) = (u,v)$.

De altfel, transformările regulate generalizează funcţiile reale de o variabilă reală, derivabile; derivata $f'(x)$ devine jacobianul $J_f(x)$ în unele situaţii dar şi matricea jacobiană în alte situaţii (Teorema 5.6.1).

Observaţie. Mulţimea K este limitată de hiperbolele de ecuaţii $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ şi de dreptele de ecuaţii $y = \frac{x}{2}$, $y = 5x$. Cele patru curbe formează în D un patrulater curbiliniu (notat P). Mulţimea K este domeniul compact limitat de acest patrulater curbiliniu.

Problema 20

Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

condiţionate de ecuaţia $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Rezolvare. În general, punctele de extrem ale unei funcţii de clasă C^1, condiţionate de o ecuaţie, se determină prin metoda (multiplicatorilor) lui Lagrange (vezi cele spuse în §5.7). Parcurgem etapele acestei metode.

1). Funcţia ajutătoare a lui Lagrange este

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right).$$

2). $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{25}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda y}{9}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z + \frac{2\lambda z}{4}$

şi avem de rezolvat sistemul

(S) : $2x + \frac{2\lambda x}{25} = 0,\ 2y + \frac{2\lambda y}{9} = 0,\ 2z + \frac{2\lambda z}{4} = 0,\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

Se constată cu uşurinţă că soluţiile (x,y,z,λ) ale sistemului sunt

$$(\pm 5,0,0,-25),\ (0,\pm 3,0,-9),\ (0,0,\pm 2,-4).$$

Aşadar, punctele $(\pm 5,0,0)$, $(0,\pm 3,0)$, $(0,0,\pm 2)$ sunt puncte staţionare condiţionate pentru funcţia f.

3 – 4 – 5). Pentru $\lambda = -25$, avem

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right).$$

Ca urmare, în punctele $(\pm 5,0,0)$ avem (vezi Exemplul 5.2.4)

$$d^2\Phi(\pm 5,0,0) = -\frac{32}{9}dy^2 - \frac{21}{2}dz^2.$$

Se vede de aici că forma pătratică $d^2\Phi(\pm 5,0,0)$ este negativ definită, ceea ce arată că punctele $(\pm 5,0,0)$ sunt puncte de maxim condiţionat pentru funcţia f (vezi Teorema 5.4.7).

Pentru $\lambda = -9$, avem

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right).$$

Ca urmare, în punctele $(0,\pm 3,0)$ avem $d^2\Phi(0,\pm 3,0) = \frac{32}{25}dx^2 - \frac{5}{2}dz^2$.

Este evident că această formă pătratică nu este definită ca semn. Aceasta arată că punctele (0,± 3,0) nu sunt puncte de extrem condiţionat pentru funcţia f (vezi Teorema 5.4.7).
În sfârşit, pentru $\lambda = -4$, avem

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right).$$

Ca urmare, în (0,0,± 2) avem $d^2\Phi(0,0,\pm 2) = \frac{42}{25}dx^2 + \frac{10}{9}dy^2$.
Se vede de aici că forma pătratică $d^2\Phi(0,0,\pm 2)$ este pozitiv definită, ceea ce arată că punctele (0,0,± 2) sunt puncte de minim condiţionat pentru funcţia f. (Teorema 5.4.7). ■

Observaţie. Când se spune că forma pătratică

$$d^2\Phi(\pm 5,0,0) = -\frac{32}{9}dy^2 - \frac{21}{2}dz^2$$

este negativ definită,trebuie înţeles că funcţia reală de trei variabile reale (în fapt de două, pentru că dx lipseşte) $-\frac{32}{9}u^2 - \frac{21}{2}v^2$ ia numai valori ≤ 0 atunci când $u, v \in \mathbb{R}$.
Când se spune că forma pătratică

$$d^2\Phi(0,0,\pm 2) = \frac{42}{25}dx^2 + \frac{10}{9}dy^2$$

este pozitiv definită, trebuie înţeles că funcţia reală de trei variabile reale (în fapt de două, pentru că dz lipseşte) $\frac{42}{25}u^2 + \frac{10}{9}v^2$ ia numai valori ≥ 0 atunci când $u, v \in \mathbb{R}$.
Când se spune că forma pătratică

$$d^2\Phi(0,\pm 3,0) = \frac{32}{25}dx^2 - \frac{5}{2}dz^2$$

nu este definită ca semn, trebuie înţeles că funcţia reală de trei variabile reale (în fapt de două, pentru că dy lipseşte) $\frac{32}{25}u^2 - \frac{5}{2}v^2$ ia atât valori pozitive cât şi valori negative atunci când $u, v \in \mathbb{R}$.

Observaţie. În derularea celor cinci etape ale Metodei lui Lagrange, etapa a patra a fost omisă pentru că s–a putut stabili că forma pătratică $d^2\Phi$ este definită ca semn sau nu. Etapa a patra nu aduce nimic nou în studiul semnului formei pătratice $d^2\Phi$. Într–adevăr, diferenţiind ecuaţia $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ în fiecare din punctele (± 5,0,0) obţinem sistemul liniar $dx = 0$, cu soluţia $dx = 0$. Ca urmare, înlocuim în forma pătratică $d^2\Phi(\pm 5,0,0)$ pe dx cu 0 şi obţinem ca formă pătratică redusă tot pe $d^2\Phi(\pm 5,0,0)$.

Observaţie. Având în vedere faptul că $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ reprezintă pătratul distanţei de la origine la punctul curent al spaţiului, iar ecuaţia $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ este ecuaţia unui elipsoid E, problema poate fi, geometric vorbind, formulată astfel:
"Să se determine distanţa minimă şi distanţa maximă de la origine la un punct al elipsoidului E".

Se poate da şi o rezolvare geometrică. Fie P(x,y,z) un punct de pe E. Atunci, $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 5\sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}} = 5$, ceea ce arată că elipsoidul E este situat în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
Vedem elipsoidul E ca o "sferă turtită" şi mai ţinem seama de faptul că cele trei semiaxe ale elipsoidului sunt distincte două câte două (adică elipsoidul nu este un elipsoid de rotaţie). Având în vedere axa mare a elipsoidului, acesta este tangent la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ şi "înscris" în aceasta. De aici, distanţa maximă căutată este 5, punctele de maxim condiţionat corespunzătoare fiind $(\pm\ 5,0,0)$. La fel, având în vedere axa mică a elipsoidului, acesta este "circumscris" sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. De aici, distanţa minimă căutată este 2, punctele de minim condiţionat fiind $(0,0,\pm\ 2)$. În sfârşit, pentru orice alt punct P_0 al elipsoidului diferit de cele patru puncte considerate, sfera cu centrul în origine şi rază OP_0 conţine, în jurul lui P_0, atât puncte interioare cât şi puncte exterioare elipsoidului. Ca urmare, acest punct nu este punct de extrem condiţionat pentru f. Menţionăm că o poziţie aparte a lui P_0 este $(0,\pm\ 3,0)$. Acum, elipsoidul este tangent sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, dar nu este nici "înscris" şi nici "circumscris" sferei (două dintre secţiunile elipsoidului cu planele de coordonate sunt "înscrise" respectiv "circumscrise" în câte un cerc mare al acestei sfere). De aici, avem că în orice vecinătate a fiecăruia din punctele $(0,\pm\ 3,0)$, avem puncte pe elipsoid cu distanţa la origine < 3 dar şi > 3. Aceste puncte nu sunt puncte de extrem condiţionat pentru funcţia f.
Observaţie. Uneori, se caută punctele de extrem ale unei funcţii condiţionate de mai multe ecuaţii. Acum, funcţia ajutătoare a lui Lagrange are mai mulţi multiplicatori, câte unul pentru fiecare astfel de ecuaţie (vezi cele spuse în §5.7).

Problema 21

Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei $f : D \to \mathbb{R},, f(x,y) = x(x + y)$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Rezolvare. Domeniul de definiţie D al funcţiei f este o mulţime compactă (Teorema 2.3.9 a lui Heine – Borel – Lebesgue în $\mathbb{R}^p$) iar f este o funcţie continuă, fiind polinomială. Conform Teoremei lui Weierstrass (Corolarul 4.2.4), funcţia f este mărginită şi îşi atinge marginile, adică există x_1 şi $x_2 \in D$ astfel încât

$$f(x_1) = \inf_{x\in D} f(x) \le f(x) \le \sup_{x\in D} f(x) = f(x_2),\ \forall x\in D.$$

Conform Definiţiei 5.4.3, punctele x_1 şi x_2 sunt puncte de extrem absolut pentru funcţia f. Pe de altă parte, funcţia f este derivabilă parţial, fiind polinomială (chiar mai mult, este funcţie de clasă C^∞). Conform Teoremei 5.4.6 a lui Fermat, acela dintre punctele x_1 şi x_2 care este punct interior lui D este punct staţionar pentru f, adică anulează derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ ale lui f. Din $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, avem că sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ are o singură soluţie:$x = 0$, $y = 0$. Aplicând Teorema 5.4.7 (sau Remarca 5.4.6), se constată cu uşurinţă că punctul staţionar (0,0) al lui f nu este punct de extrem local. Aşadar, ambele puncte x_1 şi x_2 nu sunt interioare lui D şi ca urmare, ele sunt situate pe frontiera domeniului D, adică pe cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$.

De aici rezultă că pentru determinarea lui x_1 şi x_2 trebuie să determinăm extremele lui f condiţionate de ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$. Pentru aceasta, aplicăm metoda (multiplicatorilor) lui Lagrange (vezi cele spuse în §5.7). Parcurgem etapele acestei metode.

1). Funcţia ajutătoare a lui Lagrange este

$$\Phi(x,y) = x(x + y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

2). $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda x$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + 2\lambda y$ şi avem de rezolvat sistemul $2x + y + 2\lambda x = 0,\ x + 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 1.$

Se constată cu uşurinţă că soluţiile (x,y,λ) ale sistemului sunt

$$\left(\mp\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right).$$

Aşadar, punctele

$$a = \left(\mp\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right),\ b = \left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

sunt puncte staţionare condiţionate pentru funcţia f.

3 – 4 – 5). Se constată că în fiecare punct (x_0,y_0) din $\mathbb{R}^2$. avem

$$d^2\Phi(x_0,y_0) = (2 + 2\lambda)dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2,$$

de unde tragem următoarele concluzii:

i). pentru $\lambda = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, în cele două puncte a avem

$$d^2\Phi(a) = (1 + \sqrt{2})dx^2 + 2dxdy + (-1 + \sqrt{2})dy^2 =$$
$$(1 + \sqrt{2})\left[dx + (\sqrt{2} - 1)dy\right]^2 \ge 0,$$

ceea ce arată că punctele a sunt puncte de minim condiţionat pentru funcţia f. (vezi Teorema 5.4.7).

ii). pentru $\lambda = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, în cele două puncte b avem

$$d^2\Phi(b) = (1 - \sqrt{2})dx^2 + 2dxdy - (1 + \sqrt{2})dy^2 =$$
$$= (1 - \sqrt{2})\left[dx - (1 + \sqrt{2})dy\right]^2 \leq 0,$$
ceea ce arată că punctele b sunt puncte de maxim condiţionat pentru funcţia f. (vezi Teorema 5.4.7).
În concluzie, cea mai mică valoare a lui f este $f(a) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, iar cea mai mare valoare a lui f este $f(b) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. ■
Observaţie. Nu a fost nevoie de determinarea formei pătratice reduse pentru studiul formei pătratice $d^2\Phi$ deoarece acest studiu s–a putut face cu trinomul de gradul doi.

Problema 22

În ecuaţia $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, a, b, c fiind constante reale, $c \neq 0$, se face schimbarea de variabile $u = x + py$, $v = mx + qy$, cu m, p şi q constante reale. Atunci, z(x,y) devine o funcţie w(u,v). Să se arate că dacă $b^2 - ac > 0$ sau $b^2 - ac = 0$, respectiv $b^2 - ac < 0$, atunci se pot alege m, p şi q astfel încât
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \text{ respectiv } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$
Ca aplicaţie, să se determine toate funcţiile z(x,y) de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$ care verifică ecuaţiile
a). $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$
b). $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Rezolvare. Avem în vedere cele spuse în §5.8 / 5.8.2 în legătură cu schimbările de variabile în expresii ce conţin derivate parţiale. Din relaţiile $u = x + py$, $v = mx + qy$, putem exprima pe x şi y ca funcţii de u şi v, $x = x(u,v)$ şi $y = y(u,v)$ şi atunci,
$$z = z(x,y) = z(x(u,v),y(u,v)) = w(u,v) = w(x + py, mx + qy).$$
Folosind formulele de derivare a funcţiilor compuse date de Teorema 5.3.2, obţinem
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}m + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}m^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}p + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}(q + pm) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}mq,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}p^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}pq + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}q^2,$$
pentru că $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = p$, $\frac{\partial v}{\partial x} = m$, $\frac{\partial v}{\partial y} = q$, iar derivatele de ordin doi sunt evident nule. În aceste formule, derivatele parţiale ale funcţiei z sunt calculate în punctul (x,y) iar cele ale funcţiei w în punctul (x

+ py,mx + qy). Introducând aceste derivate în ecuaţia dată, aceasta devine

$$(a + 2bp + cp^2)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (2am + 2b(q + pm) + 2cpq)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} +$$

$$+ (am^2 + 2bmq + cq^2)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

Ne situăm acum în fiecare din cele trei situaţii din enunţ:
i). dacă $b^2 - ac > 0$, ecuaţia de gradul al doilea $ct^2 + 2bt + a = 0$ are două rădăcini reale şi distincte t_1 şi t_2. Alegând pe p şi q drept t_1 şi respectiv t_2 şi $m = 1$, ecuaţia anterioară devine $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$.
ii). dacă $b^2 - ac = 0$, ecuaţia de gradul al doilea $ct^2 + 2bt + a = 0$ are două rădăcini reale şi egale: $t_1 = t_2 = -\frac{b}{c}$. Alegând $p = -\frac{b}{c}$, $q = 0$ şi $m = 1$, ecuaţia anterioară devine $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.
iii). dacă $b^2 - ac < 0$, ecuaţia de gradul al doilea $ct^2 + 2bt + a = 0$ are două rădăcini complexe $t_1 = \alpha + i\beta$ şi $t_2 = \alpha - i\beta$. Alegând $p = \alpha$, $q = \beta$ şi $m = 0$, ecuaţia anterioară devine $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.
Trecem la cazurile concrete.
a). Suntem în cazul $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -4$. Ecuaţia în t are două rădăcini reale şi distincte: $t_1 = -1$ şi $t_2 = \frac{1}{4}$. Cu schimbarea de variabilă $u = x - y$, $v = x + \frac{1}{4}y$, ecuaţia devine $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$. Scriem această ecuaţie sub forma $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = 0$, de unde rezultă că $\frac{\partial w}{\partial v}$ nu depinde de u. Ca urmare, $\frac{\partial w}{\partial v}$ este de forma $\frac{\partial w}{\partial v} = f(v)$. Integrând acum această ecuaţie, obţinem $w = \displaystyle\int f(v)dv + G(u)$, G fiind o funcţie arbitrară. Notând cu F o primitivă a lui f, soluţia generală a ecuaţiei $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ este $w = F(v) + G(u)$.
Revenind la vechile variabile, soluţia generală a ecuaţiei în z de la punctul a) este $z(x,y) = F(x + \frac{1}{4}y) + G(x - y)$, cu F şi G funcţii arbitrare de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$.
b). Suntem în cazul $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Ecuaţia în t are două rădăcini reale şi egale $t_1 = t_2 = -\frac{1}{2}$. Cu schimbarea de variabilă $u = x - \frac{1}{2}y$, $v = x$, ecuaţia devine $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. Scriem această ecuaţie sub forma $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = 0$, de unde rezultă că $\frac{\partial w}{\partial v}$ nu depinde de v. Ca urmare, $\frac{\partial w}{\partial v}$ este de forma $\frac{\partial w}{\partial v} = G(u)$, G fiind o funcţie arbitrară. Integrând acum această ecuaţie, obţinem $w = vG(u) + F(u)$.
Revenind la vechile variabile, soluţia generală a ecuaţiei în z de la punctul b) este $z(x,y) = xG(x - \frac{1}{2}y) + F(x - \frac{1}{2}y)$, cu F şi G funcţii arbitrare de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$. ■

Observaţie. Se spune că ecuaţia dată este de tip

• hiperbolic, atunci când $b^2 - ac > 0$,
• parabolic, atunci când $b^2 - ac = 0$,
• eliptic, atunci când $b^2 - ac < 0$.

Observaţie. Ecuaţia $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ se numeşte forma canonică a ecuaţiei de tip hiperbolic. Uneori, această formă cano-nică se înlocuieşte cu ecuaţia $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$. La aceasta din urmă se ajunge dacă în ecuaţia $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ se face schimbarea de variabilă $\xi = u + v$, $\eta = u - v$.
Ecuaţia $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ se numeşte forma canonică a ecuaţiei de tip parabolic.
Ecuaţia $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ se numeşte forma canonică a ecuaţiei de tip eliptic.

Observaţie. O ecuaţie de forma $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ se numeşte ecuaţia lui Laplace. Soluţiile ei se numesc funcţii armonice.

Problema 23

Folosind teorema de derivare sau teorema de integrare sub semnul integral, să se calculeze integrala cu parametru

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \ln\left(\frac{1 + x \sin t}{1 - x \sin t}\right) dt, \ |x| < 1.$$

Rezolvare. Funcţia de sub semnul integral,

$$f : (-1,1) \times (0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x,t) = \frac{1}{\sin t} \ln\left(\frac{1 + x \sin t}{1 - x \sin t}\right),$$

este continuă, fiind o compunere de astfel de funcţii (vezi Teoremele 4.2.5, 4.2.6). Aparent, integrala dată este "improprie" în punctul 0. Aplicând regula lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\sin t} \ln\left(\frac{1 + x \sin t}{1 - x \sin t}\right) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\cos t} \left[\frac{x \cos t}{1 + x \sin t} + \frac{x \cos t}{1 - x \sin t}\right] = 2x,$$

ceea ce arată că, de fapt, integrala dată este "proprie" în punctul 0, în sensul că f se poate prelungi în punctele (x,0), chiar prin continuitate, astfel încât integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)dt$ este o integrală Riemann (adică proprie). Notând tot cu f(x,t) această prelungire, adică

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sin t} \ln\left(\frac{1 + x \sin t}{1 - x \sin t}\right), & (x,t) \in (-1,1) \times (0, \frac{\pi}{2}] \\ 2x, & (x,t) \in (-1,1) \times \{0\} \end{cases},$$

integrala din enunţ trebuie văzută ca fiind $F(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)dt$.

Pentru calculul acestei integrale cu parametru, avem în vedere Teorema 7.5.2 de derivare a unei integrale cu parametru. Funcţia f de mai sus este continuă pe mulţimea $(-1,1) \times [0,\frac{\pi}{2}]$, este derivabilă parţial în raport cu x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{1 - x^2 \sin^2 t}, & (x,t) \in (-1,1) \times (0,\frac{\pi}{2}] \\ 2, & (x,t) \in (-1,1) \times \{0\} \end{cases},$$

(vezi Definiţia 5.1.1 şi Remarca 5.1.1), iar această derivată este continuă pe domeniul său de definiţie $(-1,1) \times [0,\frac{\pi}{2}]$ (vezi Definiţia 4.2.5 şi Teorema 4.2.1 – Criteriul lui Heine).

Conform Teoremei amintite mai sus, funcţia F este derivabilă şi cu derivata continuă pe intervalul $(-1,1)$; derivata lui F este dată de formula

$$F'(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 - x^2 \sin^2 t}dt.$$

Cu substituţia $\operatorname{tg} t = v$, (şi cu a doua formulă de schimbare de variabilă – vezi Remarca 7.1.11), avem în continuare

$$F'(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 - x^2 \sin^2 t}dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{2}{1 - x^2 \frac{v^2}{1+v^2}} \frac{1}{1+v^2}dv =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{2}{1 + (1 - x^2)v^2}dv = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{arctg} v\sqrt{1 - x^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

De aici, rezultă că $F(x) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \pi \arcsin x + c$, unde constanta c rămâne să fie determinată.

Cum din definiţia lui F avem $F(0) = 0$, rezultă $c = 0$.

În concluzie, $F(x) = \pi \arcsin x$, pentru $x \in (-1,1)$. ■

Observaţie. Integrala cu parametru dată se poate calcula şi cu Teorema de integrare sub semnul integral (vezi Teorema 7.5.4).

Pentru aceasta, avem în vedere identitatea

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{a^2 - u^2}du = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+1}{a-1}, \text{ pentru } a > 1,$$

care rezultă uşor din Formula lui Leibniz–Newton (vezi §7.2/7.2.2 şi Teorema 7.1.8). Înlocuim aici $a = \frac{1}{x \sin t}$ pentru $(x,t) \in (-1,1)\times(0,\frac{\pi}{2}]$ şi după uşoare calcule, avem $\int\limits_0^1 \frac{2x}{1 - x^2u^2 \sin^2 t} du = f(x,t)$.

Se constată că această egalitate are loc şi pentru $t = 0$.

Aşadar, se poate scrie egalitatea

$$F(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^1 \frac{2x}{1 - x^2u^2 \sin^2 t} du \right) dt.$$

Aici, aplicăm Teorema amintită funcţiei, evident continuă,

$$g : [0,1] \times [0,\tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ g(u,t) = \frac{2x}{1 - x^2u^2 \sin^2 t}.$$

Avem deci

$$F(x)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^1 \frac{2x}{1 - x^2u^2 \sin^2 t} du \right) dt=\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{1 - x^2u^2 \sin^2 t} dt \right) du.$$

Integrala interioară o calculăm cu substituţia $\operatorname{tg} t = v$, (şi cu a doua formulă de schimbare de variabilă – vezi Remarca 7.1.11):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{1 - x^2u^2 \sin^2 t} dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{2x}{1 - x^2u^2 \frac{v^2}{1 + v^2}} \frac{1}{1 + v^2} dv =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{2x}{1 + v^2(1 - x^2u^2)} dv = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2u^2}} \operatorname{arctg} v\sqrt{1 - x^2u^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi x}{\sqrt{1 - x^2u^2}}.$$

Integrala exterioară ne conduce, pentru $x \in (-1,1)$, la F:

$$F(x) = \int\limits_0^1 \frac{\pi x}{\sqrt{1 - x^2u^2}} du = \pi \arcsin xu \Big|_0^1 = \pi \arcsin x.$$

Observaţie. Din cele două teoreme amintite şi folosite în rezolvarea problemei, se deduc aşa numitele metoda derivării sub semnul integral şi metoda integrării sub semnul integral pentru calculul unei integrale (cu parametru).

Metoda derivării sub semnul integral pentru calculul unei integrale cu parametru $F(x)$ constă în următoarele:

– se calculează cu teorema amintită derivata $F'(x)$,

– se calculează $F(x) = \int F'(x)dx + c$

– se determină constanta c

Metoda integrării sub semnul integral pentru calculul unei integrale (proprie sau improprie) $I = \int_a^b g(x)dx$ constă în următoarele:

– se scrie g sub forma $g(x) = \int\limits_\alpha^\beta f(x,t)dt$,

– în $I = \int_a^b \left(\int\limits_\alpha^\beta f(x,t)dt \right) dx$ se schimbă ordinea de integrare (cu una din Teoremele 7.5.4, 7.5.10 – 7.5.13),

– se calculează integrala interioară $\int_a^b f(x,t)dx$,

– se calculează integrala exterioară $\int\limits_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt$, obţinându-se integrala I.

Problema 24

Folosind metoda derivării sau metoda integrării sub semnul integral, să se calculeze integralele improprii cu parametru

a). $\int\limits_{-1+0}^{1-0} \frac{\operatorname{arctg} tx}{t\sqrt{1-t^2}} dt,\ x \in \mathbb{R};$

b). $\int\limits_0^\infty \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax} dx,\ a > 0,\ b, c \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. a). Funcţia $f(x,t) = \frac{\operatorname{arctg} tx}{t\sqrt{1-t^2}}$ este definită şi continuă pe mulţimea $\mathbb{R} \times (-1,1) \setminus \{0\}$, fiind o compunere de astfel de funcţii (vezi Teoremele 4.2.5, 4.2.6). Aparent, integrala dată este "improprie" şi în punctul 0. Aplicând însă regula lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} tx}{t\sqrt{1-t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} tx}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x}{1+t^2x^2} = x,$$

ceea ce arată că, de fapt, integrala dată este "proprie" în punctul 0, în sensul că f se poate prelungi în punctul (x,0), chiar prin continuitate, astfel încât integrala $\int\limits_{-1+0}^{1-0} f(x,t)dt$ este o integrală improprie pe (–1,1) cu parametru. Notând tot cu f(x,t) această prelungire, adică

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} tx}{t\sqrt{1-t^2}}, & \text{dacă } (x,t) \in \mathbb{R} \times (-1,1) \setminus \{0\} \\ x, & \text{dacă } (x,t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases},$$

integrala din enunţ trebuie văzută ca fiind $\displaystyle\int_{-1+0}^{1-0} f(x,t)dt$.

Pentru calculul acestei integrale improprii cu parametru, aplicăm Teorema 7.5.10 de derivare a unei integrale improprii cu parametru. Verificăm condiţiile din Teoremă:
1). funcţia f este continuă pe $\mathbb{R} \times (-1,1)$, după cum rezultă din cele spuse mai sus;
2). prin calcul direct se constată că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-t^2}},\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (-1,1)$$

şi că este continuă pe $\mathbb{R} \times (-1,1)$;
3). pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, integrala improprie $F(x) = \displaystyle\int_{-1+0}^{1-0} f(x,t)dt$
este convergentă, conform cu Definiţia 7.4.4 a unei astfel de integrale şi a Criteriului de comparaţie (Teorema 7.4.2), prin Corolarul 7.4.1 şi 7.4.3, deoarece funcţia $g(t) = f(x,t)$ este continuă pe $(-1,1)$ şi limitele laterale $\lim\limits_{t \searrow -1} (t+1)^{\frac{1}{2}} g(t)$, $\lim\limits_{t \nearrow 1} (t-1)^{\frac{1}{2}} g(t)$ sunt finite.
4). integrala improprie $\displaystyle\int_{-1+0}^{1-0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ converge uniform în raport cu parametrul $x \in \mathbb{R}$, conform Teoremei 7.5.6, pentru că
i). funcţia $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ este continuă pe $(-1,1)$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;
ii). $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (-1,1)$;
iii). $\displaystyle\int_{-1+0}^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ este convergentă, conform Teoremei 7.4.6 (Leibniz–Newton) şi are valoarea $\arcsin x \Big|_{-1}^{+1} = \pi$.
Conform Teoremei amintite, funcţia F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$ şi pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, are loc formula

$$F'(x) = \int_{-1+0}^{1-0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_{-1+0}^{1-0} \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Calculăm această intrgrală improprie începând cu schimbarea de variabilă t = sin u, u ∈ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – vezi Teorema 7.4.8 –

$$\int_{-1+0}^{1-0} \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+x^2\sin^2 u}du$$

şi continuând cu substituţia tg u = v ,adică cu schimbarea de variabilă u = arctg v, ţinând cont că sin u = $\frac{\mathrm{tg}\, u}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\, u}}$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+x^2\sin^2 u}du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2\frac{v^2}{1+v^2}}\frac{1}{1+v^2}dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(1+x^2)v^2}dv = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{arctg}\, v\sqrt{1+x^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aşadar, $F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$ pentru x ∈ ℝ şi ca urmare,

$$F(x) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}dx = \pi \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c,$$

conform unui tablou de primitive imediate (vezi §7.2/7.2.2).

Rămâne să determinăm constanta c. Deoarece $F(0) = \int_{-1+0}^{1-0} f(0,t)dt$ = 0, din egalitatea anterioară rezultă c = 0.

În concluzie, $F(x) = \pi \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, x ∈ ℝ.

b). Funcţia de sub semnul integral, $f(x) = \frac{\cos bx - \cos cx}{x}e^{-ax}$, este definită şi continuă pe mulţimea (0,∞), fiind o compunere de astfel de funcţii (vezi Teoremele 4.2.5, 4.2.6). Aparent, integrala dată este "improprie" în punctul 0. Aplicând însă regula lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos bx - \cos cx}{x}e^{-ax} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} (-\, b\sin\ bx + c\sin\ cx) = 0,$$

ceea ce arată că, de fapt, integrala dată este "proprie" în punctul 0, în sensul că f se poate prelungi în punctul x = 0, chiar prin continuitate, astfel încât integrala improprie dată este o integrală improprie de speţa întâi, ca în Definiţia 7.4.2. Notând tot cu f(x) această prelungire, adică

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos bx - \cos cx}{x}e^{-ax}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

integrala din enunţ trebuie văzută ca fiind $I = \int\limits_0^\infty f(x)dx$.

Se observă că pentru $x > 0$, putem scrie

$$f(x) = \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax} = - e^{-ax} \frac{\cos tx}{x} \Big|_b^c = \int\limits_b^c e^{-ax} \sin tx \, dt,$$

egalitate care de altfel, se verifică şi pentru $x = 0$.
Ca urmare, se poate scrie,

$$I = \int\limits_0^\infty f(x)dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_b^c e^{-ax} \sin txdt \right) dx.$$

Avem aici o integrală improprie a unei integrale proprii cu parametru. Pentru calculul acestei integrale, vom schimba ordinea de integrare, folosind Teorema 7.5.10. Fie deci integrala improprie cu parametru $I(t) = \int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin tx \, dx$, care verifică condiţiile din Teorema amintită:

i). funcţia $f(x,t) = e^{-ax} \sin tx$ este continuă pe mulţimea $[0,\infty) \times [b,c]$;
ii). integrala improprie cu parametru $I(t)$ converge uniform în raport cu parametrul $t \in [b,c]$, conform Teoremei 7.5.6, pentru că:
j). $| e^{-ax} \sin tx | \le e^{-ax}, \forall (x,t) \in [0,\infty) \times [b,c]$;
jj). $\int\limits_0^\infty e^{-ax}dx$ este convergentă, conform Teoremei 7.4.6 (Leibniz–Newton) şi egală cu $-\frac{1}{a}e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a}$.

Conform Teoremei amintite mai sus, are loc egalitatea

$$\int\limits_b^c \left(\int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin tx \, dx \right) dt = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_b^c e^{-ax} \sin tx \, dt \right) dx.$$

Acum calculăm integrala din stânga. Integrând de două ori prin părţi, se constată cu uşurinţă că $\int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin tx \, dx = \frac{t}{a^2 + t^2}$ şi ca urmare,

$$\int\limits_b^c \left(\int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin tx \, dx \right) dt = \int\limits_b^c \frac{t}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2},$$

după cum uşor se poate constata (Teorema 7.1.8, Leibniz–Newton).

În consecinţă, $I = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}$. ■

Observaţie. Metoda derivării sub semnul integral şi metoda integrării sub semnul integral rămân valabile şi pentru integralele improprii cu parametru.

Observaţie. A doua integrală se poate calcula şi prin metoda derivării sub semnul integral; concret, putem vedea f(x) = f(x,b,c) şi atunci $I = I(b,c) = \int_0^\infty f(x,b,c)dx$; derivăm în raport cu b (sau c) şi procedăm ca la punctul a)

Problema 25

Folosind funcţiile lui Euler, să se calculeze integralele

a). $\int_1^\infty x^p (\ln x)^q dx,\ p < -1,\ q > -1,$

Caz particular $p = -m$, $q = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

b). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\, dx,\ p, q > -1.$

Caz particular $p = 2m + 1$, $q = 2n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. a). Facem substituţia $\ln x = t$, adică facem schimbarea de variabilă $x = e^t : [0,\infty) \to [1,\infty)$. Cu Teorema 7.4.8 de schimbare de variabilă într–o integrală improprie, avem

$$\int_1^\infty x^p (\ln x)^q dx = \int_0^\infty e^{pt} t^q e^t dt = \int_0^\infty e^{(p+1)t} t^q dt,$$

care, cu substituţia $-(p + 1)t = u$, $u \in [0,\infty)$, devine

$$\int_0^\infty e^{(p+1)t} t^q dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{-(p+1)}\right)^q \frac{1}{-(p+1)} du = \frac{1}{(-(p+1))^{q+1}} \int_0^\infty u^q e^{-u} du.$$

Ca urmare, $\int_1^\infty x^p (\ln x)^q dx = \frac{1}{(-(p+1))^{q+1}} \Gamma(q + 1)$.

În cazul particular dat, avem, ţinând cont de Teorema 7.5.14,

$$\int_1^\infty x^p (\ln x)^q dx = \frac{1}{(m-1)^{n+1}} \Gamma(n + 1) = \frac{n!}{(m-1)^{n+1}},$$

b). Facem substituţia sin x = t, adică facem schimbarea de variabilă $x = \arcsin t : [0,1] \to [0,\frac{\pi}{2}]$. Cu aceeaşi Teoremă ca mai sus, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx = \int_0^1 t^p \left(\sqrt{1-t^2}\right)^q \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 t^p \left(1-t^2\right)^{\frac{q-1}{2}} dt,$$

care, cu substituţia $t^2 = u$, $u \in [0,1]$, devine

$$\int_0^1 t^p \left(1-t^2\right)^{\frac{q-1}{2}} dt = \int_0^1 u^{\frac{p}{2}} (1-u)^{\frac{q-1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}} (1-u)^{\frac{q-1}{2}} du.$$

Ca urmare, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$.

În cazul particular dat, avem, ţinând cont de Teorema 7.5.15,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{1}{2} B(m+1,n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Observaţie. Funcţiile lui Euler se pot găsi în §7.5/7.5.3. Teoremele 7.5.14 şi 7.5.15 dau proprietăţi ale funcţiilor Γ şi B ale lui Euler.

Problema 26

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a). $\displaystyle\int_C (x - y + z) ds$, $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$, $t \in [0,4\pi]$;

b). $\displaystyle\int_C y e^{2y} ds$, $C : y = \ln\cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$;

c). $\displaystyle\int_C (x + y) ds$, $C : x^2 + y^2 - 4 = 0$, $y \geq 0$;

d). $\displaystyle\int_C (2x + 2y + z) ds$, C fiind segmentul AB sau linia poligonală OBA, unde A(1,2,–3), B(–1,1,2);

e). $\displaystyle\int_C |xyz| ds$, $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = h \end{cases}$, $R > 0$, $h > 0$.

Rezolvare. Integralele sunt integrale curbilinii de speţa întâi.

a). Determinăm mai întâi elementul de arc al curbei C, curbă dată printr-o reprezentare parametrică:

$$ds = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}dt =$$
$$= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}dt = \sqrt{2}dt.$$

Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilinii de speţa întâi (dată în Teorema 8.1.2 şi precizată exact în Remarca 8.1.2),

$$\int_C (x - y + z)ds = \int_0^{4\pi} (\cos t - \sin t + t)\sqrt{2}dt =$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin t + \cos t + \tfrac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{4\pi} = 8\sqrt{2}\pi^2.$$

b). Determinăm mai întâi elementul de arc al curbei C, curbă dată prin ecuaţie explicită $y = f(x)$, unde $f(x) = \ln\cos x$:

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \sqrt{1 + \left(-\tfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2}dx = \tfrac{1}{|\cos x|}dx.$$

Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilinii de speţa întâi (dată în Teorema 8.1.2 şi precizată exact în Remarca 8.1.2), avem, cu metoda integrării prin părţi (vezi Remarca 7.1.8) şi metoda schimbării de variabilă (vezi Remarca 7.1.10 şi Remarca 7.1.11).

$$\int_C ye^{2y}ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\cos x\left(e^{2\ln\cos x}\right)}{|\cos x|}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln\cos x\, dx =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)' \ln\cos x\, dx = 2\sin x \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} -$$
$$-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\left(-\tfrac{\sin x}{\cos x}\right)dx = \sqrt{2}\ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tfrac{1}{\cos x} - \cos x\right)dx =$$
$$= \sqrt{2}\ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}dx = \sqrt{2}\ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} +$$
$$+ \ln\tfrac{1+u}{1-u}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + \ln\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}.$$

c). Curba C este dată printr-o ecuaţie carteziană (vezi Definiţia 5.9.7). Conform cu Propoziţia 5.9.1 şi cu cele spuse după ea, curba C poate fi dată şi prin ecuaţii parametrice, dar şi prin ecuaţie polară C :

$r = 2$, $\theta \in [0,\pi]$. Conform cu Remarca 8.1.2, elementul de arc al curbei C este $ds = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta = 2d\theta$. Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilinii de speţa întâi (dată în Teorema 8.1.2 şi precizată exact în Remarca 8.1.2) şi formulei Leibniz–Newton din Teorema 7.1.8, avem:

$$\int_C (x + y)ds = \int_0^{2\pi} (2\cos\theta + 2\sin\theta)2d\theta =$$
$$= 4(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

d). Pentru calculul integralei, avem nevoie de ecuaţiile parametrice ale segmentului AB şi apoi de ecuaţiile parametrice ale segmentului OB. Acestea se obţin din ecuaţiile dreptelor suport corespunzătoare. Astfel,
– ecuaţia dreptei AB este $AB : \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z+3}{2+3}$ şi ne conduce la ecuaţiile parametrice ale segmentului AB:

$$[AB] : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 5t - 3 \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

– ecuaţia dreptei OB este $OB : \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ şi ne conduce la ecuaţiile parametrice ale segmentului OB:

$$[OB] : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

Ca şi mai sus,
– elementul de arc al segmentului [AB] este $ds = \sqrt{30}dt$,
– elementul de arc al segmentului [OB] este $ds = \sqrt{6}dt$.
Acestea fiind zise, avem

$$\int_{[AB]} (2x + 2y + z)ds = \int_0^1 (-t + 3)\sqrt{30}dt = \tfrac{5\sqrt{30}}{2}.$$

Pentru calculul celei de a doua integrale, folosim proprietatea de aditivitate faţă de domeniul de integrare şi independenţa faţă de orientarea pe curbă a integralei curbilinii de speţa întâi (vezi Teorema 8.1.4):

$$\int_{[OBA]} (2x + 2y + z)ds = \int_{[OB]} (2x + 2y + z)ds + \int_{[BA]} (2x+2y+z)ds =$$

$$= \int_0^1 2t\sqrt{6}dt + \tfrac{5\sqrt{30}}{2} = t^2\sqrt{6}\,\Big|_0^1 + \tfrac{5\sqrt{30}}{2} = \sqrt{6} + \tfrac{5\sqrt{30}}{2}.$$

e). Curba C este dată ca intersecţie a două suprafeţe (vezi Definiţia 5.9.14): prima este o suprafaţă cilindrică cu cercul director $x^2 + y^2 = R^2$ din planul xOy şi cu generatoarele paralele cu axa Oz iar a doua este planul $z = h$, perpendicular pe Oz. Ca urmare, C este un cerc, şi anume cercul din planul $z = h$ cu centrul în punctul (0,0,h) şi de rază R. Ecuaţiile parametrice ale cercului C sunt

$$C : \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = h \end{cases}, \ t \in [0,2\pi].$$

Elementul de arc al cercului C este:

$$ds = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}dt =$$

$$= \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt = Rdt.$$

Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilinii de speţa întâi, dată în Teorema 8.1.2 (şi precizată exact în Remarca 8.1.2), avem

$$\int_C |\ xyz\ |ds = hR^3\int_0^{2\pi} |\ \sin t\ \cos t\ |dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}hR^3\int_{-\pi}^{\pi} |\ \sin 2u\ |du = hR^3\int_0^{\pi} |\ \sin 2u\ |du =$$

$$= 2hR^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ \sin 2v\ |dv = 2hR^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2v\ dv = 2hR^3. \ \blacksquare$$

Observaţie. Pentru calculul unei integrale curbilinii de speţa întâi, se procedează astfel:

– se determină elementul de arc ds, corespunzător formei sub care este cunoscută curba pe care se calculează integrala: parametrică, explicită, polară (vezi §5.9/5.9.1, Remarca 8.1.2 şi Remarca 8.1.4);

– se aplică formula de calcul corespunzătoare, folosind eventual şi unele proprietăţi ale integralei curbilinii de speţa întâi (vezi Teorema 8.1.2, Remarca 8.1.2, Remarca 8.1.4, Definiţia 8.1.4).

Problema 27

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a). $\int\limits_C xydx + ydy$, $C : \begin{cases} x = a\cos\ t \\ y = b\sin\ t \end{cases}$, $t \in [0,2\pi]$, $a,b > 0$;

b). $\int\limits_C (x - 2y)dx + (2x + y)dy$, $C : y = x^2$, $x \in [-1,2]$;

c). $\int\limits_C xdx + (x + y)dy + (x + y - z)dz$, unde $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$, este parcursă în sensul invers acelor de ceasornic când se priveşte dinspre Oz pozitiv.

Rezolvare. Integralele sunt integrale curbilinii de speţa a doua.
a). Conform cu formula de calcul a unei integrale curbilinii de speţa a doua dată în Teorema 8.2.1 şi precizată exact în Remarca 8.2.4, avem

$$\int\limits_C xydx + ydy = \int\limits_0^{2\pi} [ab\sin t\cos t(-a\sin\ t) + b\sin t(b\cos t)]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-a^2 b\sin^2 t\ \cos\ t + b^2\sin\ t\ \cos\ t\right]dt =$$

$$= -a^2b\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} + b^2\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

b). Curba $C : y = x^2$, $x \in [-1,2]$ este dată printr-o ecuaţie explicită şi ca urmare, având în vedere formula de calcul a unei integrale curbilinii de speţa a doua (vezi Remarca 8.2.4 şi Observaţia de mai jos),

$$\int\limits_C (x - 2y)dx + (2x + y)dy = \int\limits_{-1}^{2} \left[(x - 2x^2) + (2x + x^2)2x\right]dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left[2x^3 + 2x^2 + x\right]dx = \left(\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 15.$$

c). Curba $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$ este curba de intersecţie a două suprafeţe: suprafaţa de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$, care este o suprafaţă cilindrică şi suprafaţa de ecuaţie $z = x + y$, care este un plan. Având

în vedere reprezentarea parametrică a cercului director al cilindrului, x = cos t, y = sin t, $t \in [0,2\pi]$, o reprezentare parametrică a curbei C este C : x = cost, y = sint, z = cost + sint, $t \in [0,2\pi]$. Se constată că această curbă este exact curba dată în enunţ (şi în ceea ce priveşte orientarea).
Acestea fiind zise, conform cu formula de calcul a unei integrale curbilinii de speţa a doua dată în Teorema 8.2.1 şi precizată exact în Remarca 8.2.4, avem

$$\int_C x dx + (x + y)dy + (x + y - z)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t)]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{2t + \sin 2t}{4}\right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi. \blacksquare$$

Observaţie. Pentru calculul unei integrale curbilinii de speţa a doua, se procedează astfel:
– se determină o reprezentare parametrică a curbei pe care se calculează integrala (vezi §5.9/5.9.1);
– se aplică formula de calcul corespunzătoare, folosind eventual şi proprietăţi ale integralei curbilinii de speţa a doua (vezi Teorema 8.2.1, Remarca 8.2.4, Definiţia 8.2.5).
Observaţie. Uneori, curba pe care se calculează integrala se poate da printr-o ecuaţie explicită C : y = f(x), $x \in [a,b]$. Ca urmare, o reprezentare parametrică a curbei C este C : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$.

Problema 28

Se dă curba (numită cicloidă)

$$C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0,2\pi],$$

$a > 0$ fiind dat.
a). Să se calculeze lungimea curbei;
b). Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbă şi axa Ox.

Rezolvare. a). Conform cu Teorema 5.9.1 (şi Remarca 5.9.1), sau cu Teorema 8.1.4, lungimea curbei C este dată de formula $\ell_C = \int\limits_C ds$, unde $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$ este elementul de arc al curbei C (vezi Remarca 8.1.2).
Concret, avem

$$\ell_C = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \left[(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2\right]}dt =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}dt = 2a\int\limits_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{t}{2}\right|dt =$$

$$= 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2}dt = -4a\cos \tfrac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

Aşadar, lungimea curbei C este $\ell_C = 8a$.
b). Să presupunem că C are ecuaţia carteziană (explicită) $y = f(x)$, $x \in [0,2\pi a]$. Atunci, aria domeniului plan limitat de curbă şi axa Ox este dată de binecunoscuta formulă $\mathcal{A} = \int\limits_0^{2\pi a} f(x)dx$.
Concret, calculăm această integrală cu schimbarea de variabilă

$$x = a(t - \sin t),\ t \in [0,2\pi].$$

Ca urmare, $f(x) = f(a(t - \sin t)) = y(t) = a(1 - \cos t)$ şi $x'(t) = a(1 - \cos t)$.
Aşadar,

$$\mathcal{A} = \int\limits_0^{2\pi a} f(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(a(t - \sin t)) \cdot a(1 - \cos t)dt =$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2dt = a^2\int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \tfrac{1 + \cos 2t}{2})dt =$$

$$= a^2 \left(t + 2\sin t + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Aşadar, aria domeniului plan limitat de curbă şi axa Ox este $\mathcal{A} = 3\pi a^2$.
Altfel, aria domeniului plan limitat de curbă şi axa Ox se poate cal-

cula cu formula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} -\mathrm{y}d\mathrm{x} + \mathrm{x}d\mathrm{y}$, unde Γ este curba obţinută prin juxtapunerea curbei C şi a segmentului de dreaptă OA de pe axa Ox pe care curba C se sprijină (evident, O(0,0), A(2πa,0)), orientată pozitiv faţă de domeniul compact pe care îl limitează.
Având în vedere proprietăţile integralei curbilinii, avem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} -\mathrm{y}d\mathrm{x} + \mathrm{x}d\mathrm{y} = \frac{1}{2}\int\limits_{OA} -\mathrm{y}d\mathrm{x} + \mathrm{x}d\mathrm{y} - \frac{1}{2}\int\limits_{C} -\mathrm{y}d\mathrm{x} + \mathrm{x}d\mathrm{y} =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} [-\mathrm{a}(1 - \cos \mathrm{t})\mathrm{a}(1 - \cos \mathrm{t}) + \mathrm{a}(\mathrm{t} - \sin \mathrm{t})\mathrm{a}\sin \mathrm{t}]d\mathrm{t} = 3\pi \mathrm{a}^2,$$

după cum uşor se poate constata.

Problema 29

Fie $\mathcal{E}$ elipsa cu centrul în originea sistemului ortogonal de coordonate carteziene xOy, de semiaxe 5 şi 2. Se cere:
i). Să se scrie ecuaţiile parametrice ale elipsei $\mathcal{E}$ dacă aceasta este parcursă o singură dată:
a). în sens trigonometric,
b). în sens invers trigonometric.
ii). Să se scrie ecuaţiile tangentei şi normalei la elipsa $\mathcal{E}$ în punctul ei de intersecţie cu dreapta de ecuaţie y = x, situat în primul cadran.
iii). Fie ($\mathcal{E}$) domeniul din planul $\mathbb{R}^2$ limitat de elipsa $\mathcal{E}$ şi fie S segmentul închis [OA], unde A(5,0). Să se determine o transformare regulată surjectivă astfel încât
$T : (a,b) \times (c,d) \to (\mathcal{E}) \setminus S$

Rezolvare. Ecuaţia carteziană a elipsei $\mathcal{E}$ de semiaxe 5 şi 2 este

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

i). ecuaţiile parametrice ale elipsei $\mathcal{E}$ dacă aceasta este parcursă o singură dată:
a). în sens trigonometric, sunt $\mathcal{E} : \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \ t \in [0,2\pi]$
b). în sens invers trigonometric, sunt (înlocuind în reprezentarea anterioară pe t cu 2π – t) $\mathcal{E} : \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = -\,2\sin t \end{cases}, \ t \in [0,2\pi]$
(vezi Definiţia 5.9.6 a unei curbe orientate şi Definiţia 5.9.1 a opusului unui drum).

ii). În general, coordonatele punctelor de intersecţie a două curbe se află rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două curbe; aici, sistemul este $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x \end{cases}$ şi are soluţia $A(\frac{10}{\sqrt{29}}, \frac{10}{\sqrt{29}})$.
De aici şi cu Remarca 5.9.4,
• ecuaţia tangentei în A la elipsă este $\frac{x}{25} + \frac{y}{4} - \frac{\sqrt{29}}{10} = 0$;
• ecuaţia normalei în A la elipsă este $25x - 4y - \frac{210}{\sqrt{29}} = 0$.
iii). Având în vedere cele spuse în §5.6 privind Transformările regulate (vezi şi Exemplul 5.6.1), transformarea regulată surjectivă cerută este $T : (0,1) \times (0,2\pi) \to (\mathcal{E}) \setminus S$, definită prin

$$T(\rho, \theta) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} . \blacksquare$$

Observaţie. Reamintim că elipsa este mulţimea punctelor din plan care au proprietatea că suma distanţelor la două puncte fixe este constantă.
Alegem sistemul de coordonate astfel: cele două puncte fixe (numite focare, notate F_1, F_2) determină axa absciselor iar mediatoarea segmentului F_1F_2 este axa ordonatelor. Sistemul se alege direct orientat. Scriind că punctul curent $M(x,y)$ al elipsei verifică condiţia $MF_1 + MF_2 = 10$ (axa mare a elipsei) se obţine ecuaţia carteziană a elipsei $\mathcal{E}$ de semiaxe 5 şi 2: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Acum, focarele sunt $F_1(-\sqrt{21},0)$ şi $F_2(\sqrt{21},0)$.
Observaţie. În general, pentru elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi punctul $P_0(x_0,y_0)$ al său, avem
• ecuaţia tangentei în P_0 la elipsă este $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$;
• ecuaţia normalei în P_0 la elipsă este $a^2y_0(x-x_0) - b^2x_0(y-y_0) = 0$.

Problema 30

Să se calculeze următoarele integrale duble:

a). $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dxdy$, unde $D = [-1,1] \times [0,4]$;

b). $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$, D fiind domeniul compact plan limitat de curbele:
i). $y = x$, $xy = 1$, $x = 2$ sau ii). $y = x$, $xy = 1$, $x = 3$, $y = 2$.

c). $\displaystyle\iint_D (x-1)dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$.

Rezolvare. a). Domeniul D este un interval bidimensional iar funcţia $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$ este continuă pe acest domeniu, ca o compunere de astfel de funcţii (vezi Teorema 4.2.6, Exemplul 4.2.10) Conform Corolarului 9.4.1, în calculul integralei duble din enunţ nu contează ordinea de iterare:

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dy$$

sau

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dxdy = \int_0^4 dy \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dx,$$

după dorinţă.

În prima variantă, se constată că în calculul integralei interioare $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dy$ apar unele probleme.

În a doua variantă, avem $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dx = 0$, pentru că funcţia de sub integrală este impară în x.

Acum, este clar că $\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}dxdy = 0$.

b). În cazul i) se constată cu uşurinţă că

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2, \tfrac{1}{x} \le y \le x\right\}.$$

Conform cu Propoziţia 9.4.1, D este un domeniu compact măsurabil Jordan din $\mathbb{R}^2$, simplu în raport cu axa Oy. Cum funcţia $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}$ este continuă pe D, din Teorema 9.4.3 (împreună cu Remarca 7.5.3) rezultă că are loc egalitatea $\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{y^2}{x^2}dy$.

Calculăm integrala interioară: $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{y^2}{x^2}dy = \frac{y^3}{3x^2}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} = \frac{x}{3} - \frac{1}{3x^5}$.

Integrala exterioară este $\int_1^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3x^5}\right)dx = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{1}{12x^4}\right)\Big|_1^2 = \frac{27}{64}$.

În concluzie, $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \frac{27}{64}$.

În cazul ii) se constată cu uşurinţă că $D = D_1 \cup D_2$, unde

$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\right\}$,

$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\right\}$,

cele două mulţimi având interioarele disjuncte.

Conform cu Propoziţia 9.4.1, D_1 şi D_2 sunt domenii compacte măsurabile Jordan din $\mathbb{R}^2$, simple în raport cu axa Oy. Cum funcţia $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}$ este continuă pe D, din Teorema 9.4.3 (împreună cu Remarca 7.5.3) combinată cu Proprietatea de aditivitate de domeniu a integralei duble (vezi Teorema 9.3.4) rezultă că are loc egalitatea

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \iint\limits_{D_1} \frac{y^2}{x^2}dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{y^2}{x^2}dxdy$$

şi ca urmare,

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy = \frac{27}{64} + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{y^2}{x^2}dy = \frac{27}{64} + \int_2^3 \left(\frac{y^3}{3x^2} \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{2} \right)dx =$$

$$= \frac{27}{64} + \int_2^3 \left(\frac{8}{3x^2} - \frac{1}{3x^5}\right)dx = \frac{27}{64} + \left(-\frac{8}{3x} + \frac{1}{12x^4}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{419}{486}.$$

c). Domeniul de integrat D este un segment de cerc, limitat de semicercul de ecuaţie $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$ şi dreapta de ecuaţie $y = x$. Acest domeniu este simplu în raport cu fiecare din axele de coordonate (vezi mai jos). Reţinem pe D simplu în raport cu axa Ox:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq y\}$

Conform cu Propoziţia 9.4.2, D este un domeniu compact măsurabil Jordan din $\mathbb{R}^2$, simplu în raport cu axa Ox. Cum funcţia $f(x,y) = x - 1$ este continuă pe D, din Teorema 9.4.4 (împreună cu Remarca 7.5.3) rezultă că are loc egalitatea

$$\iint\limits_D (x-1)dxdy = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} (x-1)dx.$$

Ca urmare,

$$\iint\limits_D (x-1)dxdy = \int\limits_0^1 \left[\left. \frac{(x-1)^2}{2} \right|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{(y-1)^2}{2} - \frac{1-y^2}{2} \right] dy = \int\limits_0^1 \left(y^2 - y\right) dy = -\frac{1}{6}. \blacksquare$$

Observaţie. În calculul unei integrale duble pe un domeniu dreptunghiular a unei funcţii continue, nu contează ordinea de integrare. Aceasta are importanţă în ceea ce priveşte complexitatea calculului (vezi Corolarul 9.4.1 şi Remarca 9.4.3).

Observaţie. În calculul unei integrale duble pe un domeniu care nu este dreptunghiular, se recomandă reprezenta–rea grafică a domeniului. Această reprezentare permite stabilirea cu uşurinţă dacă domeniul de integrat este simplu în raport cu una din axele de coordonate şi reprezentarea sa ca în una din Propoziţiile 9.4.1 sau 9.4.2. Se aplică apoi formula de calcul corespunzătoare pentru calculul integralei duble (din Teorema 9.4.3 respectiv Teorema 9.4.4).

Dacă domeniul D pe care se cere să se calculeze integrala dublă $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate, atunci, prin paralele la axele de coordonate, se descompune D într–un număr finit de subdomenii compacte măsurabile Jordan D_1, D_2, ...,D_m, având interioarele disjuncte două câte două, fiecare fiind simplu în raport cu una din axele de coordonate: $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$. Folosind apoi proprietatea de ereditate şi aditivitate de domeniu a integralei duble (vezi Teorema 9.3.4), avem

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy.$$

Aici, este clar că fiecare din integralele $\iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy$ se calculează aşa cum am spus mai sus. Precizăm că chiar dacă domeniul D este simplu în raport cu una din axele de coordonate dar frontiera sa este mai complicată, se preferă o descompunere ca mai sus, aşa cum s–a procedat în rezolvarea de la pc. b) / ii).

Problema 31

Folosind metoda schimbării de variabilă, să se calculeze următoarele integrale duble:

a). $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2,\ y \ge \max\{x,0\}\}$;

b). $\iint\limits_D \sqrt[3]{\left(5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right)^{-1}} dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 4\}$;

c). $\iint\limits_D (1 + xy)dxdy$, D fiind compactul plan limitat de curbele de ecuaţii $y = x^2$, $2y = x^2$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$

Rezolvare. a). Domeniul D este limitat de semicercul de ecuaţie $y = \sqrt{1-x^2}$, de segmentul de dreaptă AO de pe axa Ox, $A(-\sqrt{2}, 0)$ şi de segmentul de dreaptă OB de pe bisectoarea $y = x$, unde B(1,1). Se constată cu uşurinţă că domeniul D este simplu în raport cu fiecare din axele de coordonate. Iterarea integralei duble necesită însă descompunerea lui D în două subdomenii convenabil alese, ceea ce complică lucrurile. Se evită toate aceste inconveniente folosind metoda schimbării de variabilă. Faptul că D este limitat de un arc de cerc şi de semidrepte ce trec prin origine, sugerează trecerea la coordonate polare.

Pentru aceasta, considerăm transformarea

$$T : \Delta \to D,\ T(\rho,\theta) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

şi determinăm pe Δ astfel încât T $(\Delta) = D$, adică T să fie surjectivă. Pentru aceasta, înlocuim expresiile lui x şi y în inecuaţiile ce definesc domeniul D, $\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \le 2$, $\rho\sin\theta \ge \max\{\rho\cos\theta, 0\}$ şi rezolvăm sistemul de inecuaţii obţinut, necunoscutele fiind ρ şi θ. De aici rezultă $\rho \in [0,\sqrt{2}]$ şi $\theta \in [\frac{\pi}{4},\pi]$.

Exact vorbind, transformarea punctuală

$$T : \Delta \to D,\ T(\rho,\theta) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},$$

este regulată pe $\Delta = [0,\sqrt{2}] \times [\frac{\pi}{4},\pi]$ şi surjectivă. Reamintim că $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$ (vezi Exemplul 5.6.1). Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala dublă (vezi Teorema 9.4.5), avem

$$\iint\limits_D (x - y)dxdy = \iint\limits_\Delta (\rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\rho(\cos\theta - \sin\theta)\rho^2 d\theta = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (\sin\theta + \cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\rho =$$

$$= -\int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \left(1 + \sqrt{2}\right)d\rho = -\left(1 + \sqrt{2}\right) \tfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

b). Domeniul D este limitat la interior de elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ iar la exterior de elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 4$. O reprezentare a sa ne arată că el nu este simplu în raport cu nici una din din axele de coordonate. Iterarea integralei duble necesită descompunerea lui D în patru subdomenii convenabil alese, ceea ce complică calculele. Se evită toate aceste inconveniente folosind metoda schimbării de variabilă. Faptul că D este limitat de elipse, sugerează trecerea la coordonate polare generalizate. Pentru aceasta, considerăm transformarea punctuală

$$T : \Delta \to D,\ T(\rho,\theta) = (x,y) \iff \begin{cases} x = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases},$$

care este regulată pe $\Delta = [1,2] \times [0,2\pi]$ şi surjectivă. Reamintim că $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = 6\rho$ (vezi Exemplul 5.6.1). Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala dublă (vezi Teorema 9.4.5), avem

$$\iint\limits_D \sqrt[3]{\left(5-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\right)^{-1}} dxdy = \iint\limits_\Delta \sqrt[3]{\left(5-\frac{9\rho^2\cos^2\theta}{9}-\frac{4\rho^2\sin^2\theta}{4}\right)^{-1}} 6\rho d\rho d\theta =$$

$$= 6\iint\limits_\Delta \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}}\rho d\rho d\theta = 6\int\limits_1^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}}\rho d\theta =$$

$$= 12\pi \int\limits_1^2 \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}}\rho d\rho$$

Aceasta este o integrală binomială, astfel că se impune substituţia $5 - \rho^2 = t^3$ (vezi §7.2/7.2.3/VI). Aceasta înseamnă că în calculul acestei intagrale aplicăm a doua formulă de schimbare de variabilă (vezi Teorema 7.1.10 şi Remarca 7.1.11) folosind funcţia (schimbarea de variabilă) $\rho = \sqrt{5 - t^3} : [1,\sqrt[3]{4}] \to [1,2]$.

Aşadar, $\int\limits_1^2 \sqrt[3]{(5-\rho^2)^{-1}}\rho d\rho = \int\limits_{\sqrt[3]{4}}^{1} \sqrt[3]{t^{-3}}\sqrt{5-t^3}\frac{-3t^2}{2\sqrt{5-t^3}}dt = \frac{3}{2}\int\limits_1^{\sqrt[3]{4}} tdt =$

$\frac{3}{4}t^2 \Big|_1^{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right).$

Cu aceasta, $\iint\limits_D \sqrt[3]{\left(5-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\right)^{-1}}dxdy = 9\pi\left(2\sqrt[3]{2}-1\right).$

c). Domeniul D limitat de cele patru curbe – parabole – este un patrulater curbiliniu. O reprezentare a sa ne arată că el este simplu în raport cu fiecare din din axele de coordonate. Iterarea integralei duble necesită descompunerea lui D în trei subdomenii convenabil alese, ceea ce complică lucrurile. Se evită toate aceste inconveniente folosind metoda schimbării de variabilă.

Ecuaţiile parabolelor care mărginesc domeniul D sugerează schimbarea de variabilă dată de transformarea punctuală

$$T : D \to \Delta,\ T(x,y) = (u,v) \Longleftrightarrow \begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}.$$

Se constată cu uşurinţă că T este injectivă (vezi Definiţia 1.2.9) şi că $T(D) = [\frac{1}{2}, 1] \times [1,2]$. Transformarea inversă

$$T^{-1} : \Delta = [\tfrac{1}{2}, 1] \times [1,2] \to D,$$

$$T^{-1}(u,v) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} \end{cases}$$

este regulată pe Δ şi surjectivă.

În plus, avem că $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3u^2}$ (vezi Definiţia 5.6.1).

Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala dublă (vezi Teorema 9.4.5), avem

$$\iint\limits_D (1+xy)dxdy = \iint\limits_\Delta \left(1+\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}\right)\left|-\frac{1}{3u^2}\right|dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_\Delta \left(\frac{1}{u^2}+\frac{v}{u^3}\right)dudv = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} du\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{u^2}+\frac{v}{u^3}\right)dv =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{v}{u^2}+\frac{v^2}{2u^3}\right)\Big|_1^2 du = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u^2}+\frac{3}{2u^3}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u}+\frac{3}{4u^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{13}{12}. \blacksquare$$

Observaţie. În calculul unei integrale duble cu formula de schimbare de variabilă, găsirea lui T constituie problema esenţială. Găsirea transformării T urmăreşte ca integrala dublă pe Δ să poată fi calculată cât mai uşor, adică Δ trebuie să fie simplu în raport cu una din axele de coordonate. Ca urmare, găsirea lui T este dictată în general de ecuaţiile curbelor care formează frontiera lui D.

Problema 32

Să se calculeze următoarele integrale triple:

a). $\iiint\limits_{\Omega} \sin(x + y + z)dxdydz$, $\Omega = [0,\frac{\pi}{4}] \times [0,\frac{\pi}{4}] \times [0,\frac{\pi}{4}]$;

b). $\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)dxdydz$, Ω fiind domeniul compact din spaţiu limitat de suprafeţele de ecuaţii $x = z^2$, $z = x^2$, $y = xz$, $y = 0$;

c). $\iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)xdxdydz$, Ω fiind domeniul compact din spaţiu limitat de suprafeţele de ecuaţii $x^2 = y^2 + z^2$, x=1

Rezolvare. a). Domeniul Ω este un interval tridimensional iar funcţia $f(x,y,z) = \sin(x + y + z)$ este continuă pe acest domeniu, fiind o compunere de astfel de funcţii (funcţia trigonometrică sinus şi o funcţie polinomială – vezi Teorema 4.2.6, Exemplul 4.2.10) . Conform Corolarului 9.5.1, în calculul integralei duble din enunţ nu contează ordinea de iterare. De exemplu, putem scrie

$$\iiint\limits_{\Omega} \sin(x+y+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y+z)dz.$$

Calculăm prima integrală interioară: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x + y + z)dz =$

$$= [-\cos(x + y + z)]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \cos(x + y) - \cos(x + y + \tfrac{\pi}{4}).$$

Calculăm a doua integrală interioară: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(x+y)-\cos(x+y+\frac{\pi}{4})]dy$

$$= [\sin(x + y) - \sin(x + y + \tfrac{\pi}{4})]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) - \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) - \sin x.$$

În sfârşit, calculăm integrala exterioară:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) - \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) - \sin x\right]dx =$$

$$= \left[-2\cos(x + \tfrac{\pi}{4}) + \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) + \cos x\right]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \cos(3\tfrac{\pi}{4}) + 3\cos\tfrac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

Aşadar, $\displaystyle\iiint_\Omega \sin(x + y + z)dxdydz = \sqrt{2} - 1.$

b). Se constată că Ω este un domeniu din spaţiul $\mathbb{R}^3$ limitat de suprafeţele cilindrice de ecuaţii $x = z^2$, $z = x^2$ (cu generatoarele paralele cu axa Oy), de paraboloidul de ecuaţie $y = xz$ şi de planul de ecuaţie $y = 0$ (planul xOz).

Fie D proiecţia domeniului Ω pe planul xOz:

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le z \le \sqrt{x}\right\}$$

Se constată că $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in D, 0 \le y \le xz\right\}$.

Se vede de aici că Ω verifică condiţiile din Propoziţia 9.5.1 iar funcţia $f(x,y,z) = x + y + z$ este continuă pe Ω, ca funcţie polinomială – vezi Exemplul 4.2.10. Ca urmare, sunt verificate condiţiile din Teorema 9.5.2 (vezi şi Remarca 7.5.3) şi atunci

$$\iiint_\Omega (x + y + z)dxdydz = \iint_D dxdz\int_0^{xz}(x + y + z)dy =$$

$$= \iint_D \left[\left((x + z)y + \tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{0}^{xz}\right]dxdz = \iint_D \left((x + z)xz + \tfrac{x^2z^2}{2}\right)dxdz.$$

Deoarece D este simplu în raport cu axa Oz, avem

$$\iint_D \left((x + z)xz + \tfrac{x^2z^2}{2}\right)dxdz = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2z + xz^2 + \tfrac{x^2z^2}{2}\right)dz =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\tfrac{x^2z^2}{2} + \tfrac{xz^3}{3} + \tfrac{x^2z^3}{6}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{x^2}{2}(x - x^4) + \tfrac{x}{3}(x\sqrt{x} - x^6) + \tfrac{x^2}{6}(x\sqrt{x} - x^6)\right]dx = \tfrac{95}{756}.$$

Aşadar, $\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)dxdydz = \frac{95}{756}$.

c). Se constată că Ω este un domeniu din spaţiul $\mathbb{R}^3$ limitat de suprafaţa conică de ecuaţie $x^2 = y^2 + z^2$ şi de planul de ecuaţie $x = 1$. Cele două suprafeţe se intersectează după cercul

$$C : \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

şi ca urmare, domeniul Ω se proiectează pe planul yOz în discul

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Acum, vedem pe Ω ca fiind

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in D, \sqrt{y^2 + z^2} \le x \le 1\right\}$$

Se vede de aici că Ω verifică condiţiile din Propoziţia 9.5.1 iar funcţia $f(x,y,z) = (y^2 + z^2)x$ este continuă pe Ω, ca funcţie polinomială – vezi Exemplul 4.2.10. Ca urmare, sunt verificate condiţiile din Teorema 9.5.2 (vezi şi Remarca 7.5.3) şi atunci

$$\iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)xdxdydz = \iint\limits_{D} dydz \int_{\sqrt{y^2 + z^2}}^{1} (y^2 + z^2)xdx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\iint\limits_{D} \left[\left((y^2 + z^2)x^2\right)\Big|_{\sqrt{y^2 + z^2}}^{1}\right]dydz =$$

$$= \tfrac{1}{2}\iint\limits_{D} \left((y^2 + z^2)(1 - (y^2 + z^2)\right)dydz.$$

Deoarece D este, în planul yOz, un disc cu centrul în origine iar funcţia de sub integrală conţine grupul $y^2 + z^2$, este indicat ca în calculul integralei duble să se treacă la coordonate polare, prin formulele $\begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$, $(\rho, \theta) \in \Delta = [0,1] \times [0,2\pi]$ (vezi Exemplul 5.6.1 şi Teorema 9.4.5):

$$\iint\limits_{D} \left((y^2 + z^2)(1 - (y^2 + z^2)\right)dydz = \iint\limits_{\Delta} \rho^3(1 - \rho^2)d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3(1-\rho^2)d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho^3(1-\rho^2)d\rho = \tfrac{\pi}{6}.$$

Aşadar, $\iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}$. ■

Observaţie. În calculul unei integrale triple pe un interval tridimensional a unei funcţii continue, nu contează ordinea de integrare. Aceasta are importanţă în ceea ce priveşte complexitatea calculului (vezi Corolarul 9.5.2 şi Remarca 9.5.4).

Observaţie. În calculul unei integrale triple pe un domeniu care nu este interval tridimensional, se recomandă reprezentarea grafică a domeniului. Această reprezentare permite stabilirea cu uşurinţă dacă domeniul de integrat este simplu în raport cu una din axele de coordonate şi reprezentarea sa ca în una din Propoziţiile 9.5.1 sau analoa-gele ei. Se aplică apoi formula de calcul corespunzătoare pentru calculul integralei triple, conform cu Teorema 9.5.2 şi analoagele ei (vezi Remarca 9.5.4).

Dacă domeniul Ω pe care se calculează integrala triplă $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate, atunci se descompune Ω într–un număr finit de subdomenii compacte măsurabile Jordan $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m$, având interioarele disjuncte două câte două, fiecare fiind simplu în raport cu una din axele de coordonate: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$ (de exemplu, ducând plane paralele cu o axă de coordonate sau suprafeţe cilindrice cu generatoarele paralele cu o axă de coordonate). Folosind apoi proprietatea de ereditate şi aditivitate de domeniu a integralei triple (vezi Teorema 9.3.4), avem

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{m} \iiint\limits_{\Omega_i} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Fiecare din integralele $\iiint\limits_{\Omega_i} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se calculează ca mai sus.

Precizăm că chiar dacă domeniul Ω este simplu în raport cu una din axele de coordonate dar frontiera sa este mai complicată, se preferă o descompunere ca mai sus.

Problema 33

Folosind metoda schimbării de variabilă, să se calculeze următoarele integrale triple:

a). $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, Ω fiind domeniul compact din spaţiu limitat de suprafeţele de ecuaţii $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ şi $z = 3$;

b). $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, Ω fiind domeniul compact din spaţiu limitat de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

c). $\iiint\limits_{\Omega} x^2dxdydz$, Ω fiind domeniul compact din spaţiu limitat de suprafaţa de ecuaţie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$;

Rezolvare. a). Domeniul Ω este limitat de suprafaţa cilindrică de ecuaţie $x^2 + y^2 = 2x$ şi de planele de ecuaţii $z = 0$ şi $z = 3$.
Se constată că Ω are reprezentarea

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 3\right\}.$$

Funcţia $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ este continuă Ω.
Trecem la coordonate cilindrice, adică considerăm transformarea punctuală

$$T : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

$$T(\rho,\theta,z) = (x,y,z), \text{ unde } \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

Se ştie că $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$ (vezi Exemplul 5.6.2). Pentru a determina domeniul $\Omega_0 \subset [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ pentru care $T(\Omega_0) = \Omega$, introducem expresiile lui x, y, z în inecuaţiile ce definesc pe Ω. Obţinem $\rho^2 \leq 2\rho\cos\theta$, $0 \leq z \leq 3$, de unde rezultă $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$ şi $0 \leq z \leq 3$ (periodicitatea funcţiei cosinus ne permite să luăm pentru θ intervalul de variaţie $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, în loc de $[0,\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2},2\pi]$). Luând

$$\Omega_0 = \left\{(\rho,\theta,z) \mid \theta \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}], 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, 0 \leq z \leq 3\right\},$$

se constată că $T(\Omega_0) = \Omega$ şi că T este transformare regulată pe Ω_0 (de fapt, pe interiorul lui Ω_0).
Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala triplă (vezi Teorema 9.5.3), avem

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_0} z\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho d\theta dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_0} z\rho^2 d\rho d\theta dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{0}^{2\cos\theta} d\rho \int\limits_{0}^{3} z\rho^2 dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{0}^{2\cos\theta} \frac{z^2}{2}\rho^2 \Big|_{0}^{3} d\rho =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^3 \Big|_{0}^{2\cos\theta}\right) d\theta = 12\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = 6\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta + 3\cos\theta)d\theta =$$

$$= 6\left(\tfrac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 16.$$

b). Domeniul Ω este limitat de sferele de ecuaţii

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ şi } x^2 + y^2 + z^2 = 4;$$

aşadar, Ω este o coroană sferică a cărei reprezentare este

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\}$$

şi nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate. Funcţia $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ este continuă pe Ω. Faptul că Ω este limitat de sfere (dar şi prezenţa grupului $x^2 + y^2 + z^2$ sub integrală) sugerează să trecem la coordonate sferice. Aşadar, considerăm transformarea punctuală

$$T : [1,2] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \not\leq,$$

$$T(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z), \text{ unde } \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}.$$

Se ştie că (vezi Exemplul 5.6.2) $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\varphi$, T este transformare regulată pe $\Omega_0 = [1,2] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ (de fapt, pe interiorul lui Ω_0) şi $T(\Omega_0) = \Omega$.

Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala triplă (vezi Teorema 9.5.3), avem, ţinând seama că $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$,

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_0} \sqrt{1 + \rho^2}\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1 + \rho^2}\rho^2\sin\varphi d\varphi =$$

$$= -\int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1+\rho^2}\rho^2\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi} d\theta = 4\pi\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2}\rho^2 d\rho.$$

Această ultimă integrală se calculează prin părţi:

$$\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2}\rho^2 d\rho = \int_1^2 \frac{(1+\rho^2)\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho = \int_1^2 \rho\left(1+\rho^2\right)\left(\sqrt{1+\rho^2}\right)' d\rho =$$

$$= \rho\left(1+\rho^2\right)\sqrt{1+\rho^2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{1+\rho^2}\left(1+3\rho^2\right) d\rho =$$

$$= 10\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \int_1^2 \sqrt{1+\rho^2} d\rho - 3\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2}\rho^2 d\rho$$

şi de aici avem

$$\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2}\rho^2 d\rho = \tfrac{1}{4}\left(10\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right) - \tfrac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2} d\rho.$$

La fel, această ultimă integrală se calculează tot prin părţi:

$$\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2} d\rho = \int_1^2 \frac{1+\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho + \int_1^2 \rho\left(\sqrt{1+\rho^2}\right)' d\rho =$$

$$= \ln\left(\rho + \sqrt{1+\rho^2}\right)\Big|_1^2 + \rho\sqrt{1+\rho^2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{1+\rho^2} d\rho =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\ln\left(\rho + \sqrt{1+\rho^2}\right) + \rho\sqrt{1+\rho^2}\right]\Big|_1^2 = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{5} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Aşadar, $\int_1^2 \sqrt{1+\rho^2}\rho^2 d\rho = \frac{9}{4}\sqrt{5} - \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$ şi ca urmare,

$$\iiint_\Omega \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz = \pi\left[9\sqrt{5} - \tfrac{3}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right].$$

c). Domeniul Ω este limitat de elipsoidul de ecuaţie $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4} = 1$. Aşadar, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} \le 1\right\}$, iar funcţia $f(x,y,z) = x^2$ este continuă Ω.

Trecem la coordonate sferice generalizate, adică considerăm transformarea punctuală $T : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$T(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z), \text{ unde } \begin{cases} x = 5\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = 4\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\rho\cos\varphi \end{cases}.$$

Se ştie că (vezi Exemplul 5.6.2) $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = 40\rho^2\sin\varphi$. Pentru a determina domeniul $\Omega_0 \subset [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ pentru care $T(\Omega_0) = \Omega$, introducem expresiile lui x,y,z în inecuaţia ce defineşte pe Ω. Obţinem $\rho^2 \leq 1$, de unde rezultă $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$. Luând $\Omega_0 = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$, se constată că $T(\Omega_0) = \Omega$ şi că T este transformare regulată pe Ω_0 (de fapt, pe interiorul lui Ω_0). Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala triplă (vezi Teorema 9.5.3), avem

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz = 1000 \iiint\limits_{\Omega_0} \rho^4\cos^2\theta\sin^3\varphi d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= 1000\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \rho^4\cos^2\theta\sin^3\varphi d\varphi.$$

Deoarece $\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (3\sin\varphi - \sin 3\varphi)d\varphi = \frac{4}{3}$,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)d\theta = \pi \text{ şi } \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{5},$$

avem în final $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz = \frac{800}{3}\pi$. ■

Observaţie. În calculul unei integrale triple cu formula de schimbare de variabilă, găsirea lui T constituie problema esenţială. Găsirea transformării T urmăreşte ca integrala triplă pe Ω_0 să poată fi calculată cât mai uşor, adică Ω_0 trebuie să fie simplu în raport cu una din axele de coordonate. Ca urmare, găsirea lui T este dictată în general de ecuaţiile suprafeţelor care formează frontiera lui Ω.

Problema 34

Fie suprafaţa Σ cu ecuaţia carteziană $z = x^2 + y^2$. Se cere:
i). Să se precizeze denumirea sa.
ii). Să se dea o reprezentare parametrică a suprafeţei.
iii). Să se dea o ecuaţie vectorială a suprafeţei.

iv). Să se dea ecuaţia planului tangent şi a normalei la suprafaţa Σ în punctul P(0,2,4).
v). Să se determine distanţa de la origine la acest plan tangent.
vi). Să se precizeze versorul normalei la fiecare faţă a suprafeţei.

Rezolvare. i). Suprafaţa $\Sigma : z = x^2 + y^2$ este un paraboloid de rotaţie.
ii). Dăm două reprezentări parametrice ale suprafeţei Σ:
$\Sigma_1 : x = u,\ y = v,\ z = u^2 + v^2,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2,$
respectiv
$\Sigma_2 : x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2,\ (u,v) \in [0,\infty) \times [0,2\pi].$
Se constată uşor că cele două reprezentări parametrice sunt echivalente (vezi Definiţia 5.9.10).
iii). Fiecare reprezentare parametrică conduce la o ecuaţie vectorială a suprafeţei Σ (vezi cele spuse după Exemplul 5.9.7):

$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

respectiv

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u^2\vec{k},\ (u,v) \in [0,\infty) \times [0,2\pi].$$

iv). Planul tangent în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ la suprafaţa Σ are ecuaţia $z - z_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$, (vezi mai jos). Concret, planul tangent în punctul P(0,2,4) la Σ are ecuaţia $4y - z - 4 = 0$ (un plan paralel cu axa Ox).
Normala în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ la $\Sigma : z = x^2 + y^2$ are ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{-2x_0} = \frac{y - y_0}{-2y_0} = \frac{z - z_0}{1},$$

(vezi mai jos). Concret, normala în P(0,2,4) la Σ are ecuaţia

$$\frac{x}{0} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 4}{1},$$

sau, altfel, $\begin{cases} x = 0 \\ y + 4z - 18 = 0 \end{cases}$, adică o dreaptă din planul yOz.
v). Conform unei formule cunoscute (vezi mai jos), distanţa de la origine la planul tangent de mai sus este $d = \frac{|-4|}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$.
vi). Versorul normalei la fiecare faţă a suprafeţei Σ în punctul curent (x,y,z), este

$$\vec{n} = \frac{-2x}{\pm\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}\vec{i} + \frac{-2y}{\pm\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}\vec{j} + \frac{1}{\pm\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}\vec{k}$$

semnul "+" în faţa acestor radicali corespunde feţei superioare în raport cu Oz (versorul normalei la această faţă formează un unghi ascuţit cu versorul $\vec{k}$ al axei Oz), iar semnul "−" în faţa radicalilor corespunde feţei inferioare în raport cu Oz (versorul normalei la această faţă formează un unghi obtuz cu versorul $\vec{k}$ al axei Oz). ■

Observaţie. În general, planul tangent în $P_0(x_0,y_0,z_0)$ la suprafaţa $\Sigma : z = f(x,y)$ are ecuaţia

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Normala la suprafaţa $\Sigma : z = f(x,y)$ în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ are ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Versorul normalei la fiecare faţă a suprafeţei $\Sigma : z = f(x,y)$, în punctul curent (x,y,z), este

$$\vec{n} = \frac{-p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\vec{i} + \frac{-q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\vec{j} + \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\vec{k},$$

unde $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ şi $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sunt notaţiile lui Monge. Semnul "+" în faţa acestor radicali caracterizează o faţă a suprafeţei Σ, numită faţa superioară în raport cu Oz (în acest caz, $\vec{n}$ şi versorul $\vec{k}$ al axei Oz formează un unghi ascuţit) şi notată Σ_+, iar semnul "$-$" în faţa radicalilor caracterizează cealaltă faţă a suprafeţei Σ, numită faţa inferioară în raport cu Oz (în acest caz, $\vec{n}$ şi versorul $\vec{k}$ al axei Oz formează un unghi obtuz) şi notată Σ_-.

Distanţa de la punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ la planul de ecuaţie

$$ax + by + cz + d = 0$$

este dată de formula

$$d = \frac{| ax_0 + by_0 + cz_0 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Această formulă se poate stabili astfel: se caută extremele (mai exact minimul) funcţiei $f(x,y,z) = d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, condiţionate de ecuaţia $ax + by + cz + d = 0$. (vezi cele spuse în §5.9/5.9.2).

Problema 35

Să se calculeze ariile următoarelor suprafeţe:
a). $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 \leq Rx$, $z \geq 0$;
b). $S : z = x^2 + y^2$, $z \in [0,R^2]$;
c). $S : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, $0 \leq z \leq 1$;

Rezolvare. a). Suprafaţa S este dată printr-o ecuaţie carteziană (vezi §5.9/5.9.2 – Pânze şi suprafeţe). Suprafaţa S este porţiunea din emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = Rx$ (care are cercul director cercul $x^2 + y^2 = Rx$ din planul xOy şi generatoarele paralele cu axa Oz). Pentru calculul ariei suprafeţei S, determinăm mai întâi o reprezentare parametrică a sa. Pentru aceasta, trecem la coordonate sferice (Exemplul 5.6.2), plecând de la reprezentarea parametrică a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, (\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Pentru a determina domeniul de variaţie Δ pentru θ şi φ corespunzător interiorului cilindrului, punem condiţia

$$(R\cos\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\sin\varphi)^2 \leq R^2\cos\theta\sin\varphi,$$

de unde obţinem $\sin\varphi \leq \cos\theta$ şi ca urmare,

$$\Delta = \{(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} - |\theta|\}.$$

Aşadar, reprezentarea parametrică a suprafeţei S este

$$S : \begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, (\theta,\varphi) \in \Delta.$$

Cu aceasta, aria suprafeţei S este dată de formula (Propoziţia 10.1.1)

$$\text{Aria (S)} = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{A^2(\theta,\varphi) + B^2(\theta,\varphi) + C^2(\theta,\varphi)}d\theta d\varphi,$$

Calcule simple ne conduc la

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = -R^2\cos\theta\sin^2\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = -R^2\sin\theta\sin^2\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = -R^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ca urmare, elementul de arie pentru emisfera considerată, în coordonate sferice, este

$$d\sigma = \sqrt{A^2(\theta,\varphi)+B^2(\theta,\varphi)+C^2(\theta,\varphi)}d\theta d\varphi = R^2\sin\varphi d\theta d\varphi$$

şi atunci, $\text{Aria (S)} = \iint\limits_{\Delta} R^2\sin\varphi d\theta d\varphi = R^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-|\theta|} \sin\varphi d\varphi \right) d\theta =$

$$= 2R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \sin\varphi d\varphi \right) d\theta = 2R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \right) d\theta =$$

$$= 2R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)d\theta = 2R^2 (\theta + \cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2(\pi - 2)$$

b). Suprafaţa $S : z = x^2 + y^2$, pentru care $z \in [0,R^2]$, este dată prin ecuaţie carteziană. Suprafaţa S este porţiunea din paraboloidul

$z = x^2 + y^2$ pentru care $z \in [0,R^2]$, adică pentru care $x^2 + y^2 \leq R^2$; cu alte cuvinte, suprafaţa S este porţiunea din paraboloid situată în interiorul cilindrului de ecuaţie $x^2 + y^2 = R^2$ (cilindru care are cercul director cercul $x^2 + y^2 = R^2$ din planul xOy şi generatoarele paralele cu axa Oz). Pentru calculul ariei suprafeţei S, determinăm mai întâi o reprezentare parametrică a sa. Pentru aceasta, trecem la coordonate cilindrice (vezi Exemplul 5.6.2):

$$S : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \rho^2 \end{cases}, (\rho,\theta) \in \Delta,$$

unde $\Delta \subset [0,\infty) \times [0,2\pi]$ se determină din condiţia ca S să fie în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = R^2$: $(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \leq R^2$. Rezultă $\theta \in [0,2\pi]$ şi $\rho \in [0,R]$. Aşadar, $\Delta = [0,R] \times [0,2\pi]$ şi ca urmare, reprezentarea parametrică a suprafeţei S este

$$S : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \rho^2 \end{cases}, (\rho,\theta) \in [0,R] \times [0,2\pi].$$

Calcule simple ne conduc la

$$A= \frac{D(y,z)}{D(\rho,\theta)} = -2\rho^2\cos\theta,\ B= \frac{D(z,x)}{D(\rho,\theta)} = -2\rho^2\sin\theta,\ C= \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$$

Ca urmare, elementul de arie pentru paraboloidul de ecuaţie $z = x^2 + y^2$,în coordonate cilindrice, este

$$d\sigma = \sqrt{A^2(\rho,\theta)+B^2(\rho,\theta)+C^2(\rho,\theta)}d\rho d\theta = \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho d\theta.$$

şi atunci, Aria (S) $= \iint\limits_{\Delta} \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho d\theta = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\theta =$

$$= 2\pi\int_0^R \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{1+4\rho^2}\right)^3 \Big|_0^R = \frac{\pi}{6}\left[\left(\sqrt{1+4R^2}\right)^3 - 1\right].$$

c). Suprafaţa S este dată printr-o ecuaţie carteziană.
Suprafaţa S este porţiunea din hiperboloidul cu o pânză $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ pentru care $z \in [0,1]$, adică pentru care $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$; cu alte cuvinte, S este o suprafaţă proiectabilă pe planul xOy:

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ (x,y) \in D,$$

unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$.
Cu aceasta, aria suprafeţei S este dată de formula

$$\text{Aria (S)} = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}dxdy,$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sunt notaţiile lui Monge (Propoziţia 10.1.2).
Calcule simple ne dau $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.
Ca urmare, Aria (S) $= \iint\limits_D \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dxdy$.
Pentru calculul acestei integrale, trecem la coordonate polare prin (vezi Teorema 9.4.5 şi Exemplul 5.6.1)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in [1,\sqrt{2}] \times [0,2\pi],$$

Ca urmare, $\iint\limits_D \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dxdy = \int\limits_{[1,\sqrt{2}]\times[0,2\pi]}\int \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\rho d\theta =$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\theta = 2\pi \int_{1+0}^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\rho.$$

Aici, se impune substituţia $\sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} = t$, adică schimbarea de variabilă $\rho = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2}} : [\sqrt{3}, \infty) \to (1,\sqrt{2}]$ (vezi Teorema 7.4.8). Ca urmare, $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\rho = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 2)^2} dt = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2 - 2} + \frac{2}{(t^2 - 2)^2}\right) dt =$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(t - \sqrt{2})^2} + \frac{1}{(t + \sqrt{2})^2}\right)\right] dt =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} + \frac{1}{t + \sqrt{2}}\right)\right] \Bigg|_{\sqrt{3}}^{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

În concluzie, Aria (S) $= 2\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. ■

Observaţie. La a) şi b), se poate vedea S ca fiind proiectabilă pe planul xOy; ca urmare, aria lui S se poate determina ca la pct. c). Similar, la pct. c), se poate da o reprezentare parametrică a hiperboloidului, de exemplu, folosind coordonatele polare; aria lui S se poate determina ca la pct. b).
Se obţin aceleaşi rezultate, conform cu Teorema 10.1.2.

Observaţie. La pct. c), integrala dublă ce dă aria lui S este o integrală dublă improprie. Se poate arăta, ca în problemele anterioare, că ea este convergentă. De altfel, calculele de mai sus transferă convergenţa acestei integrale la convergenţa integralei $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-2)^2}dt$.

Teorema 7.4.6 a lui Leibniz–Newton arată că această integrală este convergentă, după cum rezultă din cele spuse mai sus.

Observaţie. Alte amănunte în legătură cu calculul ariei unei suprafeţe se găsesc în §10.1

Problema 36

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă:

a). $\iint\limits_S (x^4+y^4+z^4)d\sigma$, S este sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2=1$;

b). $\iint\limits_S \frac{1}{1+z}d\sigma$, unde S este porţiunea din suprafaţa paraboloidului $2z=x^2+y^2$ cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2+y^2=1$;

c). $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)d\sigma$, unde $S:\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2a^2xy$.

Rezolvare. Integralele sunt integrale de suprafaţă de speţa I-a

a). Suprafaţa S este dată prin ecuaţie carteziană şi este sfera cu centrul în origine şi de rază 1. Având în vedere continuitatea funcţiei polinomiale $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$ şi reprezentarea parametrică în coordonate sferice a lui S,

$$\begin{cases} x=\cos\theta\sin\varphi \\ y=\sin\theta\sin\varphi \\ z=\cos\varphi \end{cases},\ (\theta,\varphi)\in\Delta=[0,2\pi]\times[0,\pi],$$

integrala de suprafaţă o vom calcula cu formula din Teorema 10.2.1. Având în vedere faptul că elementul de arie pentru sfera considerată, în coordonate sferice, este $d\sigma=\sin\varphi d\theta d\varphi$ (vezi problema anterioară),formula amintită ne dă $\iint\limits_S (x^4+y^4+z^4)d\sigma=$

$$=\iint\limits_\Delta \left(\cos^4\theta\sin^4\varphi+\sin^4\theta\sin^4\varphi+\cos^4\varphi\right)\sin\varphi d\theta d\varphi=$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\cos^4\theta \sin^4\varphi + \sin^4\theta \sin^4\varphi + \cos^4\varphi\right) \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left[\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) \sin^5\varphi + \cos^4\varphi \sin\varphi\right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\cos 4\theta\right) \tfrac{16}{15} + \tfrac{2}{5}\right] d\theta = \tfrac{12\pi}{5}, \text{ pentru că } \int_0^{\pi} \cos^4\varphi \sin\varphi d\varphi = \tfrac{2}{5} \text{ şi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^5\varphi d\varphi = \tfrac{1}{16} \int_0^{\pi} (10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\varphi) d\varphi = \tfrac{16}{15}.$$

b). Suprafaţa S este dată prin ecuaţie carteziană explicită,

$$S : z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \ (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Deoarece funcţia raţională $f(x,y,z) = \frac{1}{1 + z}$ este continuă pe domeniul D, vom calcula integrala de suprafaţă cu formula din Teorema 10.2.3. Elementul de arie pentru paraboloidul considerat, în coordonate carteziene, este dat de $d\sigma = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}dxdy$, unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sunt notaţiile lui Monge (Propoziţia 10.1.2).

Calcule simple ne conduc la $p = \frac{\partial z}{\partial x} = x$ şi $q = \frac{\partial z}{\partial y} = y$. Ca urmare, elementul de arie este $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$ şi atunci,

$$\iint_S \frac{1}{1 + z} d\sigma = \iint_D \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Pentru calculul acestei integrale, trecem la coordonate polare prin (vezi Teorema 9.4.5 şi Exemplul 5.6.1)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ (\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi].$$

Ca urmare, $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dxdy = 2 \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{2 + \rho^2} \rho d\rho d\theta =$

$$= 2\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{2 + \rho^2} \rho d\theta = 4\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{2 + \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{1 + \rho^2}{2 + \rho^2} \left(\sqrt{1+\rho^2}\right)' d\rho = 4\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^1}{1 + t^2} dt = 4\pi \left(t - \text{arctg } t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 4\pi\left(\sqrt{2} - \mathrm{arctg}\sqrt{2} - 1 + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

Aşadar, $\displaystyle\iint_S \frac{1}{1+z}\mathrm{d}\sigma = 4\pi\left(\sqrt{2} - \mathrm{arctg}\sqrt{2} - 1 + \tfrac{\pi}{4}\right).$

c). Suprafaţa S este dată prin ecuaţie carteziană. Folosind coordonatele polare, reprezentarea parametrică a suprafeţei S este

$$S : \begin{cases} x = r(\theta,\varphi)\cos\theta\sin\varphi \\ y = r(\theta,\varphi)\sin\theta\sin\varphi \\ z = r(\theta,\varphi)\cos\varphi \end{cases},\ (\theta,\varphi) \in \Delta \subset [0,2\pi] \times [0,\pi],$$

unde $r(\theta,\varphi)$ se determină din condiţia $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 2a^2xy$ (vezi Propoziţia 5.9.2). Rezultă $r(\theta,\varphi) = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$.

Având în vedere şi simetria suprafeţei, rezultă că ecuaţia polară a suprafeţei este

$$S : r = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta},\ (\theta,\varphi) \in \Delta = \left([0,\tfrac{\pi}{2}] \cup [\pi,\tfrac{3\pi}{2}]\right) \times [0,\pi].$$

Deoarece $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ este continuă, integrala de suprafaţă se calculează cu formula din Teorema 10.2.1.

Elementul de arie pentru suprafaţa S dată prin ecuaţie polară, este (Definiţia 10.1.5) $\mathrm{d}\sigma = r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 + \left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$

Calcule simple ne conduc la $\mathrm{d}\sigma = a^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ şi ca urmare,

$$\iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}\sigma = a^2\iint_\Delta r^2(\theta,\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$= a^4\iint_\Delta \sin 2\theta\sin^4\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = a^4\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}]}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi \sin 2\theta\sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \tfrac{3\pi}{8}a^4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\right] = \tfrac{3\pi}{4}a^4,$$

pentru că $\displaystyle\int_0^\pi \sin^4\varphi\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{4}\int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi)^2\mathrm{d}\varphi = \tfrac{3\pi}{8}$. ■

Observaţie. La pct. a) şi c), prezenţa grupului $x^2 + y^2 + z^2$ în ecuaţia carteziană a suprafeţei sugerează folosirea coordonatelor sferice pentru a determina ecuaţia polară a suprafeţei şi cu ajutorul ei, o reprezentare parametrică a suprafeţei. Urmează determinarea elementului de arie $\mathrm{d}\sigma$, în forma corespunzătoare – şi reţinerea lui

pentru alte probleme – şi aplicarea formulei de calcul pentru integrala de suprafaţă (formulă care o transformă într–o integrală dublă).
La pct. b), suprafaţa este dată prin ecuaţie carteziană explicită (proiectabilă pe unul din planele de coordonate). Se determină elementul de arie $d\sigma$, în forma corespunzătoare – şi reţinerea lui pentru alte probleme – şi aplicarea formulei de calcul pentru integrala de suprafaţă (formulă care o transformă într-o integrală dublă).
Observaţie. La fiecare din pct. a) şi c), se poate descompune S într-o reuniune de două suprafeţe, fiecare proiectabilă pe unul din planele de coordonate. Având în vedere Proprietăţile integralei de suprafaţă, fiecare integrală se poate scrie ca o sumă de două integrale, acestea calculându-se ca la pct. b).
Asemănător, la pct. b), se poate determina o reprezentare parametrică a suprafeţei S, folosind coordonatele cilindrice. Apoi, se pracedează ca la pct. a).
În aceste consideraţii, se are în vedere Teorema 10.2.2.

Problema 37

Să se calculeze integralele de suprafaţă în raport cu coordonatele:
a). $\iint_S xdydz - ydzdx - zdxdy$ unde S este faţa superioară în raport cu Oz a suprafeţei limitată de triunghiul ABC, unde A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3);
b). $\iint_S x^2dydz + xydzdx + xzdxdy$, unde S este faţa interioară a suprafeţei $y^2 + z^2 = 4$ cuprinsă între planele $x = -2$ şi $x = 3$;
c). $\iint_S x^3y^2zdydz + x^2y^3zdzdx + x^2y^2z^2dxdy$, unde S este faţa exterioară a compactului limitat de suprafeţele $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.
Rezolvare. a). Ecuaţia carteziană a suprafeţei S se obţine scriind ecuaţia planului determinat de trei puncte, sau, mai simplu, ecuaţia planului prin tăieturi: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.
De aici rezultă ecuaţia explicită a suprafeţei S,

$$S : z = 3\left(1 - \frac{x}{1} - \frac{y}{2}\right),\ (x,y) \in D,$$

unde D este proiecţia lui S pe planul xOy,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x}{1} + \frac{y}{2} \leq 1\}.$$

Având în vedere Remarca 5.9.8, versorul normalei la faţa superioară în raport cu axa Oz a suprafeţei S este

$$\vec{n} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{k},$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sunt notaţiile lui Monge.

Concret, $p = -3$, $q = -\frac{3}{2}$ şi avem $\vec{n} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$.

Acestea fiind zise, pentru calculul integralei aplicăm Definiţia 10.3.1

$$\iint\limits_S x dydz - y dzdx - z dxdy = \iint\limits_S \left(\tfrac{6}{7}x - \tfrac{3}{7}y - \tfrac{2}{7}z\right)d\sigma,$$

urmată de Teorema 10.2.3,

$$\iint\limits_S \left(\tfrac{6}{7}x - \tfrac{3}{7}y - \tfrac{2}{7}z\right)d\sigma = \iint\limits_D \left[\tfrac{6}{7}x - \tfrac{3}{7}y - \tfrac{2}{7}\cdot 3\left(1 - \tfrac{x}{1} - \tfrac{y}{2}\right)\right]\tfrac{7}{2}dxdy,$$

pentru că elementul de arie pentru S este $d\sigma = \frac{7}{2}dxdy$.

Direct, integrala se poate calcula cu Teorema 10.3.2:

$$\iint\limits_S x dydz - y dzdx - z dxdy = \iint\limits_D \left[3x - \tfrac{3}{2}y - 3\left(1 - \tfrac{x}{1} - \tfrac{y}{2}\right)\right]dxdy =$$

$$= \iint\limits_D 3(2x-1)dxdy.$$

Pentru calculul integralei duble, observăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Oy $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ 0 \le y \le 2(1-x)\}$ (vezi Propoziţia 9.4.1) şi aplicăm Teorema 9.4.3:

$$\iint\limits_D 3(2x-1)dxdy = 3\int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} (2x-1)dy =$$

$$= 6\int_0^1 \left(-2x^2 + 3x - 1\right)dx = \left(-4x^3 + 9x^2 - 6x\right)\Big|_0^1 = -1.$$

Aşadar, $\iint\limits_S x dydz - y dzdx - z dxdy = -1.$

b). Deoarece S este o porţiune dintr-o suprafaţă cilindrică cu cercul director $y^2 + z^2 = 4$ situat în planul yOz şi cu generatoarele para-lele cu axa Ox, folosim coordonatele cilindrice pentru a obţine o reprezentare parametrică a sa:

$$S : x = x,\ y = \cos\theta,\ z = \sin\theta,\ (\theta,x) \in [0,2\pi] \times [-2,3] = \Delta.$$

Având în vedere Remarca 5.9.7, versorul normalei la faţa interioară a suprafeţei S este $\vec{n} = -\left(\cos\theta\ \vec{j} + \sin\theta\ \vec{k}\right)$.
Acum, pentru calculul integralei date aplicăm Teorema 10.3.1:

$$\iint\limits_S x^2 dydz + xydzdx + xzdxdy =$$

$$= -\iint\limits_{\Delta} \left(x\cos^2\theta + x\sin^2\theta\right) d\theta dx = -\int\limits_{-2}^{3} dx \int\limits_{0}^{2\pi} x d\theta = -2\pi \int\limits_{-2}^{3} x dx = -5\pi.$$

c). Suprafaţa S este formată din două porţiuni se suprafaţă:
• o porţiune din suprafaţa paraboloidului de ecuaţie $z = x^2 + y^2$, dată prin $S_1 : z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, orientată după normala la faţa inferioară în raport cu Oz;
• o porţiune din suprafaţa planului de ecuaţie $z = 4$, precizată prin $S_2 : z = 4$, $(x,y) \in D$, orientată după normala la faţa superioară în raport cu Oz (vezi Remarca 5.9.8 şi după).
Având în vedere proprietăţile integralei de suprafaţă de speţa a doua (vezi Remarca 10.3.3), are loc egalitatea

$$\iint\limits_S x dydz + y dzdx + z dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_1} x dydz + y dzdx + z dxdy + \iint\limits_{S_2} x dydz + y dzdx + z dxdy$$

şi ramâne să calculăm aceste ultime două integrale.
Vom folosi Teorema 10.3.2. Pentru suprafaţa S_1 avem $p(x,y) = 2x$ şi $q(x,y) = 2y$ şi ca urmare, prima integrală devine

$$\iint\limits_{S_1} x dydz + y dzdx + z dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{D} \left[-2x^2 - 2y^2 + \left(x^2 + y^2\right)\right] dxdy = \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Trecând la coordonate polare, avem

$$\iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]}\int \rho^3 d\rho d\theta = \int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} \rho^3 d\theta = 8\pi$$

şi ca urmare, $\iint\limits_{S_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 8\pi.$

La fel, pentru suprafaţa S_2 avem $p(x,y) = q(x,y) = 0$ şi ca urmare, a doua integrală devine

$$\iint\limits_{S_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint\limits_{D} 4 dx dy = 4 \text{aria}(D) = 16\pi.$$

Aşadar, $\iint\limits_{S} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 24\pi.$ ■

Observaţie. La pct. a), suprafaţa S este proiectabilă şi pe celelalte plane de coordonate.

La pct. c), rezultatul obţinut reprezintă triplul volumului corpului compact limitat de suprafeţele $z = x^2 + y^2$, $z = 4$ (vezi §10.3/10.3.3).

Observaţie. În general, o integrală de suprafaţă în raport cu coordonatele se calculează fie transformând-o într-o integrală de suprafaţă în raport cu aria, conform definiţiei, fie transformând-o direct într-o integrală dublă, prin Teoremele 10.3.1, 10.3.2.

Problema 38

Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F = (y,x,z)$ prin faţa exterioară a corpului compact

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Rezolvare. a). Conform cu Definiţia (vezi §10.3/10.3.3 sau Definiţia 12.5.4), fluxul câmpului vectorial $F = (y,x,z)$ prin faţa exterioară S a corpului K este $\Phi_F = \iint\limits_{S} y dy dz + x dz dx + z dx dy.$

Faţa exterioară S a corpului compact K este formată din două sfere:

• Sfera S_e, de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, care limitează la exterior corpul K şi care trebuie orientată după normala exterioară, care în punctul curent are versorul $\vec{n}_e = \frac{x}{2}\vec{i} + \frac{y}{2}\vec{j} + \frac{z}{2}\vec{k}$,

• Sfera S_i, de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, care limitează la interior corpul K şi care trebuie orientată după normala interioară, care în punctul curent are versorul $\vec{n}_e = -(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

Având în vedere proprietăţile integralei de suprafaţă de speţa a doua (vezi Remarca 10.3.3), are loc egalitatea $\iint\limits_{S} y dy dz + x dz dx + z dx dy$

$$= \iint\limits_{S_e} ydydz + xdzdx + zdxdy + \iint\limits_{S_i} ydydz + xdzdx + zdxdy$$

şi ramâne să calculăm aceste ultime două integrale.
Având în vedere Definiţia 10.3.1 şi cele de mai sus,

$$\iint\limits_{S_e} ydydz + xdzdx + zdxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_e}(2xy + z^2)d\sigma.$$

Integrala de suprafaţă în raport cu aria o calculăm cu Teorema 10.2.1, folosind pentru S_e reprezentarea parametrică în coordonate sferice (vezi Exemplul 5.6.2): S_e : $x = 2\cos\theta\sin\varphi$, $y = 2\sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\varphi$, $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi] = \Delta$.
Aplicând formula din Teoremă şi ţinând cont că $d\sigma = 4\sin\varphi d\theta d\varphi$,

$$\iint\limits_{S_e}(2xy + z^2)d\sigma = 16\iint\limits_{\Delta}\left(2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\theta d\varphi =$$

$$= 16\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\theta =$$

$$=16\int\limits_0^{\pi}\left(\sin^2\theta\sin^3\varphi+\theta\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} d\varphi=-32\pi\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{64\pi}{3},$$

şi ca urmare, $\displaystyle\iint\limits_{S_e} ydydz + xdzdx + zdxdy = \frac{32\pi}{3}$.

La fel, $\displaystyle\iint\limits_{S_i} ydydz + xdzdx + zdxdy = -\iint\limits_{S_i}(2xy + z^2)d\sigma = -\frac{4\pi}{3}$.

Aşadar, $\displaystyle\iint\limits_{S} ydydz + xdzdx + zdxdy = \frac{28\pi}{3}$. ■

Problema 39

Folosind formula lui Green – Riemann, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a). $\displaystyle\oint\limits_C x^2ydx - (y + x^4)dy$, unde $C : x^2 + y^2 = R^2$;

b). $\oint\limits_C ye^{x^2 + 4y^2}dx - xe^{x^2 + 4y^2}dy$, unde C : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

c). $\oint\limits_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, unde C este frontiera domeniului

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y - x \le 1,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x},\ x > 0\}$;

d). $\oint\limits_C (x^4 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^4)dy$, unde C : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

e). $\int\limits_C y(x - 1)dx + x(y + 1)dy$, C : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y \le 0$, fiind parcursă în sensul acelor de ceasornic.

Rezolvare. a). Curba C este cercul cu centrul în origine şi de rază R, orientat pozitiv faţă de domeniul compact D pe care îl limitează: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$. Funcţiile $P(x,y) = x^2y$ şi $Q(x,y) = -(y + x^4)$ sunt continue împreună cu derivatele lor parţiale $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4x^3$, fiind funcţii polinomiale. Formula lui Green – Riemann (vezi Teorema 11.1.1) ne dă

$$\oint\limits_C x^2ydx - (y + x^4)dy = \iint\limits_D \left(-4x^3 - x^2\right)dxdy$$

şi trecând la coordonate polare (vezi Teorema 9.4.5 şi Exemplul 5.6.1),

$$\iint\limits_D \left(-4x^3 - x^2\right)dxdy = \int\int\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} \left(-4\rho^3\cos^3\theta - \rho^2\cos^2\theta\right)\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \left(-4\rho^4\cos^3\theta - \rho^3\cos^2\theta\right)d\theta = -\frac{\pi R^4}{4}, \text{ pentru că}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)d\theta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\cos 3\theta + 3\cos\theta)d\theta = 0.$$

Aşadar, $\oint\limits_C x^2ydx - (y + x^4)dy = -\frac{\pi R^4}{4}$.

b). Curba C este elipsa cu centrul în origine şi de semiaxe 2 şi 1, orientată pozitiv faţă de domeniul compact D pe care îl limitează:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}.$$

Funcţiile $P(x,y) = ye^{x^2 + 4y^2}$ şi $Q(x,y) = -\, xe^{x^2 + 4y^2}$ sunt continue împreună cu derivatele lor parţiale

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x^2 + 4y^2}\left(8y^2 + 1\right) \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\, e^{x^2 + 4y^2}\left(2x^2 + 1\right)$$

ca funcţii compuse de funcţii polinomiale şi exponenţiale. Formula lui Green – Riemann (vezi Teorema 11.1.1) ne dă

$$\oint_C ye^{x^2 + 4y^2}dx - xe^{x^2 + 4y^2}dy = -\iint_D e^{x^2 + 4y^2}\left(2x^2 + 8y^2 + 2\right)dxdy$$

şi trecând la coordonate polare generalizate prin formulele

$$x = 2\rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ (\rho,\theta) \in \Delta = [0,1] \times [0,2\pi],\ J = 2\rho,$$

(vezi Teorema 9.4.5 şi Exemplul 5.6.1), avem în continuare,

$$\iint_D e^{x^2 + 4y^2}\left(2x^2 + 8y^2 + 2\right)dxdy =$$

$$= 2\iint_\Delta e^{4\rho^2}\left(8\rho^2 + 2\right)\rho d\rho d\theta = 4\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} e^{4\rho^2}\left(4\rho^2 + 1\right)\rho d\theta =$$

$$=8\pi\int_0^1 e^{4\rho^2}\left(4\rho^2+1\right)\rho d\rho=\pi\int_0^1 (e^{4\rho^2})'(4\rho^2+1)d\rho=4\pi e^{4\rho^2}\rho^2 \Big|_0^1 =4\pi e^4$$

Aşadar, $\displaystyle\oint_C ye^{x^2 + 4y^2}dx - xe^{x^2 + 4y^2}dy = -4\pi e^4.$

c). Curba C este un patrulater curbiliniu, orientat pozitiv faţă de domeniul compact D pe care îl limitează:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y - x \leq 1,\ \tfrac{1}{x} \leq y \leq \tfrac{2}{x},\ x > 0\}.$$

Funcţiile $P(x,y) = 2(x^2 + y^2)$ şi $Q(x,y) = (x + y)^2$ sunt continue împreună cu derivatele lor parţiale $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)$, fiind funcţii polinomiale. Formula lui Green – Riemann (vezi Teorema 11.1.1) ne dă $\displaystyle\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy = \iint_D 2(x - y)dxdy$ şi această integrală dublă o calculăm prin Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5). Pentru aceasta, considerăm transformarea punctuală $T : D \to \Delta=[0,1]\times[1,2]$, $T(x,y) = (u,v) \Longleftrightarrow \begin{cases} u = y - x \\ v = xy \end{cases}$

Avem că T este bijectivă, de clasă C^1 şi transformare regulată pe D deoarece $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = -(x+y) \neq 0$.

Ca urmare, transformarea inversă satisface condiţiile din Teorema amintită şi $\iint\limits_D 2(x-y)dxdy = \iint\limits_\Delta -2u\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv =$

$$= \iint\limits_\Delta \frac{-2u}{\sqrt{u^2+2v}}dudv = \int_1^2 dv\int_0^1 \frac{-2u}{\sqrt{u^2+2v}}du = -2\int_1^2 \left(\sqrt{u^2+2v}\,\Big|_0^1\right)dv =$$

$$= -2\int_1^2 \left(\sqrt{1+2v} - \sqrt{2v}\right)dv = -\frac{2}{3}\left[5\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 8\right].$$

Aşadar, $\oint\limits_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = -\frac{2}{3}\left[5\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 8\right]$.

d). Curba C este un patrulater curbiliniu (astroida), orientat pozitiv faţă de domeniul compact D pe care îl limitează:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}.$$

Funcţiile $P(x,y) = x^4 - 3xy^2$ şi $Q(x,y) = 3x^2y - y^4$ sunt continue împreună cu derivatele lor parţiale $\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy$, fiind funcţii polinomiale. Formula lui Green − Riemann (vezi Teorema 11.1.1) ne dă $\oint\limits_C (x^4 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^4)dy = \iint\limits_D 12xydxdy$.

Integrala dublă se calculează prin Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5). Pentru aceasta, considerăm transformarea punctuală $T : \Delta = [0,1] \times [0,2\pi] \to D$ definită prin $T(\rho,\theta) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho^3\cos^3\theta \\ y = \rho^3\sin^3\theta \end{cases}$. Aplicaţia T este surjectivă, de clasă C^1 şi are jacobianul $J = 9\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta$, după cum uşor se poate constată. Se vede uşor că sunt verificate toate condiţiile din Teorema amintită, astfel că avem $\iint\limits_D 12xydxdy = 108\iint\limits_\Delta \rho^{11}\cos^5\theta\sin^5\theta d\rho d\theta =$

$= 108\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} \rho^{11}\cos^5\theta\sin^5\theta d\theta = 0$, după cum uşor se poate constata făcând schimbarea de variabilă $\theta = u + \pi$, $u \in [-\pi,\pi]$.

Aşadar, $\oint\limits_C (x^4 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^4)dy = 0.$

e). Fie punctele A(–2,0), B(2,0). Completăm curba C cu segmentul AB, parcurs de la A la B, obţinând astfel curba închisă Γ, orientată negativ faţă de domeniul compact D pe care îl limitează. Are loc egalitatea $\int\limits_\Gamma y(x-1)dx + x(y+1)dy =$

$$= \int\limits_C y(x-1)dx + x(y+1)dy + \int\limits_{AB} y(x-1)dx + x(y+1)dy.$$

Prima integrală o calculăm cu formula lui Green – Riemann (şi apoi prin trecere la coordonate polare generalizate)

$$\int\limits_\Gamma y(x-1)dx + x(y+1)dy = -\iint\limits_D (2 - x + y)dxdy =$$

$$= -6\int\limits_{[0,1]\times[\pi,2\pi]}\int (2 - 2\rho\cos\theta + 3\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta =$$

$$= -6\int_0^1 d\rho\int_\pi^{2\pi}(2\rho - 2\rho^2\cos\theta + 3\rho^2\sin\theta)d\theta = -6(\pi - 2).$$

Ultima integrală o calculăm direct, folosind reprezentarea parametrică a segmentului AB: $x = t,\ y = 0,\ t \in [-2,2]$.

$$\int\limits_{AB} y(x-1)dx + x(y+1)dy = 0.$$

Ca urmare, $\int\limits_C y(x-1)dx + x(y+1)dy = -6(\pi - 2).$ ■

Observaţie. Formula lui Green – Riemann transformă, în anumite condiţii, o integrală curbilinie în raport cu coordonatele pe o curbă închisă într-o integrală dublă pe domeniul compact limitat de curbă. Uneori, formula se poate aplica şi dacă curba este deschisă - vezi e).

Problema 40

Folosind formula lui Gauss – Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă:

a). $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde S este faţa exterioară a corpului $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1\}$;

b). $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde S este faţa exterioară a corpului $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0\}$;

c). $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde S este faţa exterioară a corpului compact limitat de planele de ecuaţii $6x + 4y + 3z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Rezolvare. a). Sunt verificate condiţiile din Teorema 11.2.1 a lui Gauss – Ostrogradski şi ca urmare,

$$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint\limits_\Omega \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Pentru calculul integralei triple, se trece la coordonate cilindrice, prin formulele (vezi Exemplul 5.6.2) $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, unde $(\rho,\theta,z) \in \Delta = [0,2] \times [0,2\pi] \times [0,1]$, iar $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$.

Ca urmare, $\iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\Delta \left(\rho^2+z^2\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z =$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}\rho\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi} \left(\rho^2 + z^2\right)\rho\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^2 \mathrm{d}\rho\int_0^1 \left(\rho^3 + \rho z^2\right)\mathrm{d}z = \tfrac{28\pi}{3}.$$

În concluzie, $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 28\pi$.

b). Condiţiile din Teorema 11.2.1 a lui Gauss-Ostrogradski se verifică şi ca urmare, $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Pentru calculul integralei triple, se trece la coordonate sferice, prin formulele (vezi Exemplul 5.6.2) $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$, unde

$(\rho,\theta,\varphi) \in \Delta = [0,\mathrm{R}]\times[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$, iar $\frac{\mathrm{D(x,y,z)}}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\varphi$.

Ca urmare, $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (\mathrm{x + y + z})\mathrm{dxdydz} =$

$$= \iiint\limits_{\Delta} (\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\varphi)\,\rho^3\sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\varphi)\,\rho^3\sin\varphi \mathrm{d}\theta =$$

$$= \pi \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi\mathrm{R}^4}{4}.$$

În concluzie, $\displaystyle\iint\limits_{\mathrm{S}} \mathrm{x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy} = \frac{\pi\mathrm{R}^4}{2}$.

c). Planul de ecuaţie 6x + 4y + 3z = 12 intersectează axele de coordonate în punctele A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,4). Corpul Ω limitat de cele patru plane este tetraedrul OABC. Condiţiile din Teorema 11.2.1 a lui Gauss - Ostrogradski se verifică şi ca urmare,

$$\iint\limits_{\mathrm{S}} \mathrm{x^2dydz - y^2dzdx - z^2dxdy} = 2\iiint\limits_{\Omega} (\mathrm{x - y - z})\mathrm{dxdydz}.$$

Pentru calculul integralei triple, se observă că Ω este simplu în raport cu axa Oz (în fapt, şi cu celelalte axe – vezi Propoziţia 9.4.1):

$$\Omega = \{(\mathrm{x,y,z}) \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathrm{x,y}) \in \mathrm{D},\ 0 \le \mathrm{z} \le 4 - 2\mathrm{x} - \tfrac{4}{3}\mathrm{y}\},$$

unde D este proiecţia lui Ω pe planul xOy:

$$\mathrm{D} = \{(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{x} \in [0,2],\ 0 \le \mathrm{y} \le 3 - \tfrac{3}{2}\mathrm{x}\}.$$

Conform cu Teorema 9.4.3, avem

$$\iiint\limits_{\Omega} (\mathrm{x - y - z})\mathrm{dxdydz} = \iint\limits_{\mathrm{D}} \mathrm{dxdy} \int_0^{4 - 2\mathrm{x} - \frac{4}{3}\mathrm{y}} (\mathrm{x - y - z})\mathrm{dz}.$$

Calculăm integrala interioară:

$$\int_0^{4 - 2\mathrm{x} - \frac{4}{3}\mathrm{y}} (\mathrm{x - y - z})\mathrm{dz} = 12\mathrm{x} - 4\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} - 8 + \tfrac{4}{9}\mathrm{y}^2 + \tfrac{4}{3}\mathrm{y}$$

şi avem în continuare $\iiint\limits_{\Omega} (x - y - z)dxdydz =$

$$= \iint\limits_{D} \left(12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \tfrac{4}{9}y^2 + \tfrac{4}{3}y\right)dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \tfrac{4}{9}y^2 + \tfrac{4}{3}y\right)dy,$$

pentru că domeniul D este simplu în raport cu Oy.
Calculăm integrala interioară:

$$\int_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \tfrac{4}{9}y^2 + \tfrac{4}{3}y\right)dy = 27x - 14 - \tfrac{33}{2}x^2 + \tfrac{13}{4}x^3$$

şi avem în final $\iiint\limits_{\Omega} (x - y - z)dxdydz =$

$$= 2\int_0^2 \left(27x - 14 - \tfrac{33}{2}x^2 + \tfrac{13}{4}x^3\right)dx = -\,10. \ \blacksquare$$

Observaţie. Formula lui Gauss – Ostrogradski transformă, în anumite condiţii, o integrală de suprafaţă în raport cu coordonatele pe o suprafaţă închisă într-o integrală triplă pe domeniul compact limitat de suprafaţă. Uneori, formula se poate aplica şi dacă suprafaţa este deschisă, asemănător ca în problema anterioară.

Problema 41

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a). $\int\limits_{C} xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz$, unde curba C este dată prin

$$C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \\ z = 2\cos t + 5\sin t \end{cases}, \ t \in [0,2\pi];$$

Să se verifice rezultatul prin calcul direct.

b). $\int\limits_{C} z^2dx + x^2dy + y^2dz$, unde curba $C : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ este orientată astfel încât proiecţia sa Γ pe planul xOy, cu orientarea indusă, este orientată pozitiv faţă de domeniul compact pe care îl limitează.

c). $\displaystyle\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, unde curba $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases}$

este orientată astfel încât proiecţia sa pe planul xOy, cu orientarea indusă, este orientată pozitiv faţă de domeniul compact pe care îl limitează.

Rezolvare. a). Deoarece ecuaţiile carteziene ale curbei C sunt $C: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} = 1 \\ z = x + y \end{cases}$, C este intersecţia cilindrului eliptic de ecuaţie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} = 1$ cu planul de ecuaţie $z = x + y$.

În aplicarea Formulei lui Stokes (vezi Teorema 11.3.1), luăm drept suprafaţă S ce are pe C ca bordură orientată porţiunea din planul de ecuaţie $z = x + y$ situată în interiorul cilindrului $\frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} = 1$, orientată după normala la faţa superioară în raport cu Oz.

Conform formulei, avem

$$\int_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz = \iint_S dydz - dzdx + dxdy.$$

Pentru calculul integralei de suprafaţă, apelăm la formula din Teorema 10.3.2, pentru că S este proiectabilă pe planul xOy:

$$S : z = x + y,\ (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} \leq 1\}.$$

Avem $p(x,y) = -1$, $q(x,y) = -1$ şi atunci,

$$\iint_S dydz - dzdx + dxdy = \iint_D dxdy = \text{aria } (D) = 10\pi.$$

Aşadar, $\displaystyle\int_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz = 10\pi.$

Calculul direct se face cu formula din Teorema 8.2.1 (şi cu precizările din Remarca 8.2.4):

$$\int_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[63 \sin t \cos t + 30 \cos^2 t - 20 \sin^2 t\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{63}{2}\sin 2t + 25\cos 2t + 5\right]dt = 10\pi.$$

b). Curba C este intersecţia paraboloidului de ecuaţie $z = x^2 + y^2$ cu planul de ecuaţie $x + y + z = 1$ sau, echivalent, este intersecţia cilindrului de ecuaţie $x^2 + y^2 + x + y = 1$ cu planul de ecuaţie $x + y + z = 1$. Proiecţia curbei C pe planul xOy este curba de ecuaţie $\Gamma : x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$, orientată pozitiv faţă de domeniul compact D pe care îl limitează.

În aplicarea Formulei lui Stokes (vezi Teorema 11.3.1), luăm drept suprafaţă S ce are pe C ca bordură orientată porţiunea din planul de ecuaţie $x + y + z = 1$ situată în interiorul cilindrului de ecuaţie $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$, orientată după normala la faţa superioară în raport cu Oz.

Conform formulei, avem

$$\int_C z^2dx + x^2dy + y^2dz = 2\iint_S ydydz + zdzdx + xdxdy.$$

Pentru calculul integralei de suprafaţă, apelăm la formula din Teorema 10.3.2, pentru că S este proiectabilă pe planul xOy:

$$S : z = 1 - x - y, (x,y) \in D$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \le \frac{3}{2}\}$.

Avem $p(x,y) = -1$, $q(x,y) = -1$ şi atunci,

$$2\iint_S ydydz + zdzdx + xdxdy = 2\iint_D (2x - 1)dxdy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble, se trece la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{2} + \rho\sin\theta \end{cases}$, unde $(\rho,\theta) \in \Delta = [0,\sqrt{\frac{3}{2}}] \times [0,2\pi]$, iar $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$. Aşadar,

$$2\iint_D (2x - 1)dxdy = 4\iint_\Delta \rho^2\cos\theta d\rho d\theta = 4\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho\int_0^{2\pi} \rho^2\cos\theta d\theta = 0.$$

c). Curba C este intersecţia emisferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$ cu cilindrul de ecuaţie $x^2 + y^2 = Rx$ (curba lui Viviani).

În aplicarea Formulei lui Stokes (vezi Teorema 11.3.1), luăm drept suprafaţă S ce are pe C ca bordură orientată porţiunea din emisfera

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = Rx$ (numită fereastra lui Viviani). Aşadar, S se poate preciza prin

$$S : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in D$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq Rx\}$.

Sensul pe C induce o anume orientare pe S, şi anume orientarea după normala la faţa superioară în raport cu Oz. Conform formulei, avem

$$\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz = -2\iint_S zdydz + xdzdx + ydxdy.$$

Pentru calculul integralei de suprafaţă, apelăm la formula din Teorema 10.3.2, pentru că S este proiectabilă pe planul xOy. Avem $p(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $q(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ şi atunci,

$$\iint_S zdydz + xdzdx + ydxdy = \iint_D \left(x + \frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + y\right)dxdy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble, se trece la coordonate polare prin formulele $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Deoarece discul D este tangent în origine la axa Oy, avem, evident, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi atunci, inegalitatea $x^2 + y^2 \leq Rx$ ne conduce la $0 \leq \rho \leq R\cos\theta$. Ca urmare,

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \mid \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ 0 \leq \rho \leq R\cos\theta\}$$

şi atunci, integrala dublă devine $\iint_D \left(x+y+\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)dxdy =$

$$= \iint_D \left(\rho(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \left(\rho^2(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{\rho^3\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)d\rho =$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3\theta(\cos\theta + \sin\theta)\right)d\theta -$$

$$- \frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\left((2 + \cos^2\theta) \mid \sin\theta \mid - 2\right)d\theta =$$

$$= \frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{R^3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right)d\theta = \frac{\pi R^3}{8}.$$

În concluzie, $\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz = -\frac{\pi R^3}{4}$. ■

Observaţie. Formula lui Stokes transformă, în anumite condiţii, o integrală curbilinie în raport cu coordonatele pe o curbă din spaţiu într-o integrală de suprafaţă în raport cu coordonatele pe o suprafaţă ce se sprijină pe curba respectivă. Deoarece fiecare din cele două integrale depinde de orientarea pe curbă respectiv pe suprafaţă, este necesară o compatibilitate între cele două orientări (vezi Teorema 11.3.1 şi Definiţia 5.9.16).

Observaţie. Formula lui Stokes generalizează (de la plan la spaţiu) formula lui Green-Riemann.

Observaţie. Orientarea unei curbe în spaţiu dată ca intersecţie a două suprafeţe (adică precizarea sensului de parcurs pe curbă) se face prin context. Uneori formulările sunt greoaie. Nu acelaşi lucru se întâmplă când curba este dată parametric (vezi §5.9/5.9.2).

Problema 42

Se dau câmpurile

$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\vec{v}(x,y,z) = (xyz + x^3)\vec{i} + (y^2 + y^3)\vec{j} + (xz^2 + z^3)\vec{k}$,

$\vec{w}(x,y,z) = (yz + xy^2)\vec{i} + (xyz + yz^2)\vec{j} + (3xy + x^2z)\vec{k}$.

a). Să se calculeze grad φ şi $\Delta\varphi$;

b). Să se calculeze derivata câmpului scalar φ după direcţia vectorului $\vec{s} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ în punctul (1,2,3);

c). Să se calculeze grad div $\vec{v}$ şi rot rot $\vec{w}$.

Rezolvare. Avem în vedere definiţiile derivatei după o direcţie, gradientului, divergenţei şi rotorului date în §12.3.

a). Conform cu Definiţia 12.3.2,

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

Conform cu Definiţia 12.3.6, $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 6$.

b). Conform cu Definiţia 12.3.1 şi Propoziţia 12.3.1,

$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}(1,2,3) = \vec{s}\cdot \text{grad}_{(1,2,3)}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\cdot(2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k})) = 4\sqrt{3}$.

c). Conform cu Definiţia 12.3.3,

$$\begin{aligned}\text{div}\,\vec{v} &= \tfrac{\partial}{\partial x}(xyz + x^3) + \tfrac{\partial}{\partial y}(y^2 + y^3) + \tfrac{\partial}{\partial z}(xz^2 + z^3) = \\ &= yz + 3x^2 + 2y + 3y^2 + 2xz + 3z^2 = \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y\end{aligned}$$

şi ca urmare,

$$\begin{aligned}\text{grad div}\,\vec{v} &= \tfrac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y)\vec{i} + \\ &+ \tfrac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y)\vec{j} + \\ &+ \tfrac{\partial}{\partial z}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y)\vec{k} = \\ &= (6x + 2z)\vec{i} + (6y + z + 2)\vec{j} + (6z + y + 2x)\vec{k}.\end{aligned}$$

Apoi, cu Definiţia 12.3.4, avem

$$\text{rot}\,\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + xy^2 & xyz + yz^2 & 3xy + x^2z \end{vmatrix} =$$

$$= (3x - xy - 2yz)\vec{i} + (-\,2y - 2xz)\vec{j} + (yz - z - 2xy)\vec{k}$$

şi ca urmare,

$$\text{rot rot}\,\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - xy - 2yz & -\,2y - 2xz & yz - z - 2xy \end{vmatrix} = z\vec{i} + x\vec{k}.$$

Problema 43

Se dau câmpurile vectoriale

$$\vec{u}(x,y) = -\,y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$$

$$\vec{v}(x,y,z) = (2x - x^2y + 5y)\vec{i} + (5x - y)\vec{j} - \vec{k}.$$

a). Să se calculeze circulaţia câmpului vectorial $\vec{u}(x,y)$ pe frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$, parcursă în sens trigonometric şi apoi să se verifice rezultatul folosind formula lui Green – Riemann.

b). Să se verifice formula integrală a rotorului pentru câmpul vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ şi corpul compact $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \le z \le 4\}$.

Rezolvare. a). Fie C frontiera domeniului D, parcursă în sens trigonometric. Circulaţia câmpului vectorial $\vec{u}(x,y)$ pe curba C este (vezi Definiţia 12.5.2) integrala curbilinie $\int_C -\,y^2dx + x^2dy$.

Curba C este jumătatea superioară E a elipsei de ecuaţie $x^2 + 4y^2 = 4$, completată cu diametrul mare al său [AB] pe care ea se sprijină (evident, A(–2,0), B(2,0)) şi este parcursă în sens trigonometric. Definiţia 8.2.5 ne permite să scriem

$$\int_C - y^2dx + x^2dy = \int_{[AB]} - y^2dx + x^2dy + \int_E - y^2dx + x^2dy$$

Cu Teorema 8.2.1 şi cu reprezentările parametrice ale celor două curbe, $[AB] : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $t \in [-2,2]$, $E : \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [0,\pi]$,

avem $\displaystyle\int_{[AB]} - y^2dx + x^2dy = 0$ respectiv

$$\int_E - y^2dx + x^2dy = \int_0^\pi \big(2\sin^3\theta + 4\cos^3\theta\big)d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \big(\tfrac{3}{2}\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 3\theta + \cos 3\theta + 3\cos\theta\big)d\theta = \tfrac{8}{3}.$$

Ca urmare, $\displaystyle\int_C - y^2dx + x^2dy = \tfrac{8}{3}$.

Calculăm acum integrala curbilinie cu formula lui Green – Riemann (vezi Teorema 11.1.1): $\displaystyle\int_C - y^2dx + x^2dy = \iint_D 2(x + y)dxdy$.

Integrala dublă se calculează folosind Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5), trecând la coordonate polare generalizate (vezi Exemplul 5.6.1): $\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $(\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi]$.

Ca urmare,

$$\iint_D 2(x + y)dxdy = \int\int_{[0,1]\times[0,\pi]} 4\,(2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^\pi 4\,(2\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\,\rho d\theta = 8\int_0^1 \rho^2 d\rho = \tfrac{8}{3},$$

ceea ce confirmă rezultatul obţinut mai sus.

b). Formula integrală a rotorului pentru câmpul vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ şi corpul compact Ω este (vezi Teorema 12.5.2)

$$\iint_S \vec{n} \times \vec{v}(x,y,z)d\sigma = \iiint_\Omega \text{rot } \vec{v}dxdydz,$$

unde S este suprafaţa închisă care limitează corpul Ω, orientată după normala exterioară $\vec{n}$ (vezi Teorema 11.2.1).
Suprafaţa S (frontiera lui Ω) este formată din două porţiuni de suprafaţă elementară:

$$\mathrm{S}_1 : \mathrm{z} = \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{y}^2,\ (\mathrm{x,y}) \in \mathrm{D} \text{ şi } \mathrm{S}_2 : \mathrm{z} = 4,\ (\mathrm{x,y}) \in \mathrm{D},$$

unde $\mathrm{D} = \{(\mathrm{x,y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{y}^2 \leq 4\}$, care au în comun doar bordura lor, o elipsă.
Deoarece S este orientată după normala exterioară, S_1 trebuie orientată după normala la faţa inferioară în raport cu Oz iar S_2 după normala la faţa superioară în raport cu Oz. Ca urmare, pe S_1 avem $\vec{n} = \frac{2\mathrm{x}\vec{i} + 8\mathrm{y}\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4\mathrm{x}^2 + 64\mathrm{y}^2}}$, iar pe S_2, $\vec{n} = \vec{k}$ (vezi Remarca 5.9.8).
Având în vedere proprietăţile integralei de suprafaţă în raport cu coordonatele (vezi Remarca 10.3.3) precum şi formula de calcul a unei astfel de integrale (vezi Teorema 10.3.2), membrul stâng din formula integrală a rotorului de mai sus devine succesiv

$$\iint_{\mathrm{S}} (\vec{n} \times \vec{v}(x,y,z))\mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathrm{S}_1} (\vec{n} \times \vec{v}(x,y,z))\mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \iint_{\mathrm{S}_2} (\vec{n} \times \vec{v}(x,y,z))\mathrm{d}\sigma = \left(\iint_{\mathrm{D}} (8\mathrm{y} - 10\mathrm{x})\mathrm{dxdy}\right)\vec{i} +$$

$$+ \left(\iint_{\mathrm{D}} 2\mathrm{xdxdy}\right)\vec{j} + \left(\iint_{\mathrm{D}} (10\mathrm{x}^2 - 18\mathrm{xy} + 8\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 - 40\mathrm{y}^2)\mathrm{dxdy}\right)\vec{k}.$$

Integralele duble se calculează folosind Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5), trecând la coordonate polare generalizate (vezi Exemplul 5.6.1): $\begin{cases} \mathrm{x} = 2\rho\cos\theta \\ \mathrm{y} = \rho\sin\theta \end{cases}$, $(\rho,\theta) \in \Delta = [0,1] \times [0,2\pi]$.
Aşadar,

$$\iint_{\mathrm{D}} (8\mathrm{y} - 10\mathrm{x})\mathrm{dxdy} = 8\iint_{\Delta} \rho^2(2\sin\theta - 5\cos\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = 0,$$

$$\iint_{\mathrm{D}} 2\mathrm{xdxdy} = 8\iint_{\Delta} \rho^2\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = 0,$$

$$\iint_{\mathrm{D}} (10\mathrm{x}^2 - 18\mathrm{xy} + 8\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 - 40\mathrm{y}^2)\mathrm{dxdy} =$$

$$=\iint\limits_{\Delta} 2\rho^3\left(40\cos 2\theta - 18\sin 2\theta + 32\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \tfrac{8\pi}{3}$$

şi ca urmare, $\iint\limits_{S} (\vec{n}\times\vec{v}(x,y,z))\mathrm{d}\sigma = \frac{8\pi}{3}\vec{k}.$

Deoarece rot $\vec{v} = \mathrm{x}^2\vec{k}$, membrul drept din formula integrală a rotorului de mai sus devine succesiv

$$\iiint\limits_{\Omega} (\nabla\times\vec{v}(x,y,z))\mathrm{dxdydz} = \iiint\limits_{\Omega}\left(\mathrm{x}^2\vec{k}\right)\mathrm{dxdydz} =$$

$$= \vec{k}\iint\limits_{D}\mathrm{dxdy}\int\limits_{\mathrm{x}^2+4\mathrm{y}^2}^{4}\mathrm{x}^2\mathrm{dz} = \vec{k}\iint\limits_{D}\mathrm{x}^2\left(4-\mathrm{x}^2-4\mathrm{y}^2\right)\mathrm{dxdy}.$$

Integrala dublă se calculează ca mai sus:

$$\iint\limits_{D}\mathrm{x}^2\left(4-\mathrm{x}^2-4\mathrm{y}^2\right)\mathrm{dxdy} = 32\iint\limits_{\Delta}\left(1-\rho^2\right)\rho^3\cos^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \tfrac{8\pi}{3}$$

şi ca urmare, $\iiint\limits_{\Omega} (\nabla\times\vec{v}(x,y,z))\mathrm{dxdydz} = \frac{8\pi}{3}\vec{k}.$

Formula integrală a rotorului pentru câmpul vectorial $\vec{v}$(x,y,z) şi corpul compact Ω date se verifică. ■

Observaţie. Verificarea uneia sau alteia dintre formulele integrale cunoscute presupune calculul integralelor din cei doi membri din formulă şi constatarea faptului că ele sunt egale.

Problema 44

a). În expresia câmpului scalar $\varphi = \frac{2\mathrm{xyz}+\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}$, să se treacă la coordonate cilindrice şi apoi să se calculeze grad φ şi $\Delta\varphi$.

b). În expresia câmpului vectorial $\vec{v} = \frac{\mathrm{y}\vec{i}-\mathrm{x}\vec{j}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}}$ să se treacă la coordonate sferice şi apoi să se calculeze rot $\vec{v}$ şi div $\vec{v}$ şi un potenţial vector pentru $\vec{v}$.

Rezolvare. a). Formulele de trecere la coordonatele cilindrice sunt $\begin{cases}\mathrm{x}=\rho\cos\theta\\ \mathrm{y}=\rho\sin\theta\\ \mathrm{z}=\mathrm{z}\end{cases}$, $\rho>0$, $\theta\in[0,2\pi)$, $\mathrm{z}\in\mathbb{R}$.

Ca urmare,

$$\varphi = \varphi(\mathrm{x,y,z}) = \frac{2\mathrm{xyz} + \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} =$$
$$= \frac{2\mathrm{z}\rho^2\cos\theta\sin\theta + \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}} = \rho\left(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right),$$
care reprezintă expresia câmpului scalar φ în coordonate cilindrice. Având în vedere expresia gradientului unui câmp scalar în coordonate cilindrice dată în Exemplul 12.4.4, avem
$$\mathrm{grad}\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\mathrm{z} =$$
$$= \left(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right)\vec{e}_\rho + \left(2\mathrm{z}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta\right)\vec{e}_\theta + \rho\sin 2\theta\vec{e}_\mathrm{z}.$$
Având în vedere expresia laplaceianului unui câmp scalar în coordonate cilindrice dată în Exemplul 12.4.10, avem
$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{z}^2} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\left(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\left(2\mathrm{z}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\rho\sin 2\theta\right) =$$
$$= \frac{1}{\rho}\left(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right) - \frac{4}{\rho}\left(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right) =$$
$$= -\frac{3}{\rho}\left(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right) = -\frac{3\varphi}{\rho^2}$$
b). Formulele de trecere la coordonatele sferice sunt
$$\begin{cases} \mathrm{x} = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \mathrm{y} = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \mathrm{z} = \rho\cos\varphi \end{cases}, \ \rho > 0,\ \theta \in [0,2\pi),\ \varphi \in (0,\pi).$$
Ca urmare, (vezi Propoziţia 12.4.1)
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{y}\vec{i} - \mathrm{x}\vec{j}}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}} = \frac{\rho\sin\theta\sin\varphi\vec{i} - \rho\cos\theta\sin\varphi\vec{j}}{\rho} =$$
$$= \sin\theta\sin\varphi\vec{i} - \rho\cos\theta\sin\varphi\vec{j} = -\sin\varphi\vec{e}_\theta,$$
reprezintă expresia câmpului vectorial $\vec{v}$ în coordonate sferice. Având în vedere expresiile rotorului şi divergenţei unui câmp vectorial în coordonate sferice date în Exemplele 12.4.5, 12.4.7, avem
$$\mathrm{rot}\ \vec{v} = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \rho\sin\varphi\vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ 0 & 0 & -\rho\sin^2\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{-\rho\sin 2\varphi\vec{e}_\rho + \rho\sin^2\varphi\vec{e}_\varphi}{\rho^2\sin\varphi} = \frac{-2\cos\varphi}{\rho}\vec{e}_\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho}\vec{e}_\varphi$$
şi apoi, div $\vec{v} = \frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\varphi\right) = 0.$
Deci, conform cu Definiţia 12.6.3, câmpul vectorial $\vec{v}$ este solenoidal. Ca urmare, el admite un potenţial vector, adică există un câmp vectorial $\vec{w}$ astfel încât rot $\vec{w} = \vec{v}$. Urmând ideile din demonstraţia

Teoremei 12.6.2, căutăm pe $\vec{w}$ sub forma $\vec{w} = \mathrm{w}_1\vec{e}_\rho + \mathrm{w}_2\vec{e}_\varphi$; se subînţelege că $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1(\rho,\varphi,\theta)$ şi la fel w_2. Condiţia rot $\vec{w} = \vec{v}$ se scrie acum

$$\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \rho\sin\varphi\vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_2 & 0 \end{vmatrix} = -\sin\varphi\vec{e}_\theta.$$

Calculând determinantul după regulile cunoscute, egalitatea devine

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial\theta} & = & 0 \\ \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial\theta} & = & 0 \\ \frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial\rho} - \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial\varphi} & = & -\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale; mai exact, căutăm *o soluţie* a acestui sistem. Primele două ecuaţii ne dau $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1(\rho,\varphi)$ şi $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_2(\rho,\varphi)$. A treia ecuaţie se verifică, *de exemplu,* de $\mathrm{w}_1 = \rho\cos\varphi$ şi $\mathrm{w}_2 = 0$.

În concluzie, *un* potenţial vector pentru câmpul vectorial $\vec{v}$ este

$$\vec{w} = \rho\cos\varphi\vec{e}_\rho. \ \blacksquare$$

Observaţie. Pentru a fi absolut corecţi, ar fi trebuit să scriem astfel:

$$\varphi = \varphi(\mathrm{x,y,z}) = \varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \mathrm{z}) = \ldots =$$
$$= \rho(\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta) = \Phi(\rho,\theta,\mathrm{z})$$

şi $\Phi = \Phi(\rho,\theta,\mathrm{z})$ este expresia câmpului scalar φ în coordonate cilindrice.

Apoi, expresia gradientului lui φ în coordonate cilindrice este

$$\mathrm{grad}\ \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\mathrm{z} =$$
$$= (\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta)\,\vec{e}_\rho + (2\mathrm{z}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta)\,\vec{e}_\theta + \rho\sin 2\theta\vec{e}_\mathrm{z}.$$

Dacă în această expresie se înlocuiesc versorii $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ şi $\vec{e}_\mathrm{z}$ cu expresiile lor (din Propoziţia 12.4.2)

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}, \\ \vec{e}_\mathrm{z} = \vec{k}. \end{cases}$$

şi se reordonează termenii, obţinem

$$\mathrm{grad}\ \Phi = (\mathrm{z}\sin 2\theta + \cos 2\theta)\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) +$$
$$+ (2\mathrm{z}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta)\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + \rho\sin 2\theta\vec{k} =$$
$$= \left(2\mathrm{z}\sin^3\theta + \cos\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta\right)\vec{i} +$$
$$+ \left(2\mathrm{z}\cos^3\theta - \sin\theta - 2\cos^2\theta\sin\theta\right)\vec{j} + (2\rho\sin\theta\cos\theta)\,\vec{k}.$$

Înlocuind aici coordonatele cilindrice în funcţie de cele carteziene (în fond, înlocuind pe $\rho, \cos\theta$ şi $\sin\theta$ în funcţie de x, y, z), avem în continuare, după cum uşor se constată, calculând şi derivatele parţiale ale lui φ

$$\text{grad } \Phi = \frac{x^3 + 3xy^2 + 2y^3z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}\vec{i} + \frac{2x^3z - 3x^2y - y^3}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}\vec{j} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \text{grad } \varphi$$

egalitate ce trebuie înţeleasă ca

$$\text{grad}_{(\rho,\theta,z)} \Phi =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\vec{j} +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\vec{k} =$$

$$= \text{grad}_{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)}\varphi.$$

Tocmai această egalitate a fost folosită în rezolvarea de mai sus. Ea ilustrează un fapt general valabil, şi anume acela că gradientul unui câmp scalar este invariant faţă de sistemul de coordonate considerat. Rezultate similare sunt pentru divergenţă şi rotor.
Egalitatea anterioară poate fi stabilită şi folosind formulele de derivare ale funcţiilor compuse (vezi §5.3, Teoremele 5.3.1 şi 5.3.2).
Este clar că şi pentru laplaceianului unui câmp scalar avem un rezultat similar

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}.$$

(vezi o Problemă anterioară).

Problema 45

a). Să se arate că fiecare din câmpurile vectoriale de mai jos este armonic pe un domeniu ce se cere a fi precizat şi apoi să se determine câte un potenţial scalar şi un potenţial vector al lor:
i). $\vec{v} = (4y + 7z)\vec{j} + (7y - 4z)\vec{k}$,
ii). $\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$,

b). Să se arate că $\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{z}\vec{k}$ este un câmp vectorial biscalar pe un domeniu ce se cere a fi precizat şi apoi să se scrie sub forma $\vec{v} = \varphi$ grad ψ.

Rezolvare. a). Conform cu Definiţia 12.6.5, câmpul vectorial $\vec{v}$ este armonic pe o mulţime deschisă $G \subset \mathbb{R}^3$ (sau $\mathbb{R}^2$) dacă el este:
– irotaţional pe G (adică rot $\vec{v} = 0$ pe G – vezi Definiţia 12.6.1)
– solenoidal pe G (adică div $\vec{v} = 0$ pe G – vezi Definiţia 12.6.3).
i). Având în vedere Definiţiile 12.3.4 şi 12.3.3 ale rotorului respectiv divergenţei în coordonate carteziene, se constată cu uşurinţă că au loc relaţiile rot $\vec{v} = 0$ şi div $\vec{v} = 0$ pe $\mathbb{R}^3$.

Conform cu Definiţia 12.6.2, Teorema 12.6.1 şi Remarca 12.6.1, câmpul vectorial irotaţional $\vec{v}$ are potenţialul scalar

$$\varphi(\mathrm{x,y,z}) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(\mathrm{x,y,z})} \vec{v}(\mathrm{x,y,z}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{c} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\mathrm{y}} (4\mathrm{t} + 7\mathrm{z})\mathrm{dt} + \int\limits_{0}^{\mathrm{z}} -4\mathrm{tdt} + \mathrm{c} = 2\mathrm{y}^2 + 7\mathrm{yz} - 2\mathrm{z}^2 + \mathrm{c}.$$

Când c parcurge mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, mulţimea de funcţii $\varphi(\mathrm{x,y,z}) = 2\mathrm{y}^2 + 7\mathrm{yz} - 2\mathrm{z}^2 + \mathrm{c}$ este mulţimea tuturor potenţialelor scalare pe mulţimea $\mathbb{R}$ pentru câmpul vectorial irotaţional $\vec{v}$.

Conform cu Definiţia 12.6.4 şi Teorema 12.6.2, câmpul vectorial solenoidal $\vec{v}$ are potenţialul vector $\vec{w} = \mathrm{w}_1(\mathrm{x,y,z})\vec{i} + \mathrm{w}_2(\mathrm{x,y,z})\vec{j}$ cu componentele w_1 şi w_2 soluţii ale sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial \mathrm{z}} & = & 0 \\ \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial \mathrm{z}} & = & 4\mathrm{y} + 7\mathrm{z} \\ \frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial \mathrm{y}} & = & 7\mathrm{y} - 4\mathrm{z} \end{cases}.$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului rezultă $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_2(\mathrm{x,y})$ şi respectiv $\mathrm{w}_1 = 4\mathrm{yz} + \frac{7}{2}\mathrm{z}^2 + \mathrm{A}(\mathrm{x,y})$. Punând condiţia ca aceste funcţii să verifice şi a treia ecuaţie a sistemului, se obţine condiţia

$$\frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{y}} = 7\mathrm{y}.$$

Există o infinitate de funcţii w_2 şi A care verifică această ecuaţie. Luăm, *de exemplu*, $\mathrm{w}_2 = 7\mathrm{xy}$, $\mathrm{A} = 0$ şi atunci,

$$\vec{w} = \left(4\mathrm{yz} + \tfrac{7}{2}\mathrm{z}^2\right)\vec{i} + 7\mathrm{xy}\vec{j}$$

este *un* potenţialul vector pe mulţimea $\mathbb{R}$ pentru câmpul vectorial solenoidal $\vec{v}$.

Conform cu Remarca 12.6.3, mulţimea potenţialelor vectoare ale lui $\vec{v}$ pe mulţimea $\mathbb{R}$ este

$$\vec{w} = \left(4\mathrm{yz} + \tfrac{7}{2}\mathrm{z}^2\right)\vec{i} + 7\mathrm{xy}\vec{j} + \mathrm{grad}\ \varphi,$$

unde φ este un câmp scalar de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$, arbitrar.

ii). Considerăm că $\vec{v}$ este dat în coordonate cilindrice, pe domeniul

$$\Delta : \rho > 0,\ \theta \in [0,2\pi),\ \mathrm{z} \in \mathbb{R}.$$

Având în vedere expresiile rotorului şi divergenţei în coordonate cilindrice (vezi Exemplele 12.4.6, 12.4.8),

$$\mathrm{rot}\ \vec{v} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\theta & \vec{e}_\mathrm{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \mathrm{div}\ \vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(1)}{\partial\rho} = 0.$$

Ca urmare, câmpul vectorial $\vec{v}$ este armonic pe domeniul considerat.

Un potenţial scalar $\Phi = \Phi(\rho,\theta,\mathrm{z})$ pentru $\vec{v}$ presupune egalitatea grad $\Phi = \vec{v}$, adică $\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\mathrm{z} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$, ceea ce conduce la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}} = 0 \end{cases}$$

(vezi în Exemplul 12.4.4 expresia gradientului în coordonate cilindrice).

Ultimele două ecuaţii arată că Φ nu depinde de θ şi z; rămâne deci $\Phi = \Phi(\rho)$ şi atunci, din prima ecuaţie avem $\Phi = \ln\rho + \mathrm{c}$.

Aşadar, mulţimea potenţialelor scalare pentru $\vec{v}$ pe domeniul Δ este

$$\Phi = \ln\rho + \mathrm{c},\ \mathrm{c} \in \mathbb{R}.$$

Un potenţial vector $\vec{w}$ pentru $\vec{v}$ presupune egalitatea rot $\vec{w} = \vec{v}$; căutând $\vec{w}$ de forma $\vec{w} = \mathrm{w}_1(\rho,\theta,\mathrm{z})\vec{e}_\rho + \mathrm{w}_2(\rho,\theta,\mathrm{z})\vec{e}_\theta$, această egalitate devine

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\theta & \vec{e}_\mathrm{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$$

şi conduce la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial \mathrm{z}} = 1 \\ \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial \mathrm{z}} = 0 \\ \frac{\partial \mathrm{w}_2}{\partial\rho} - \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial\theta} = 0 \end{cases}.$$

Din primele două ecuaţii rezultă $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1(\rho,\theta)$, $\mathrm{w}_2 = -\,\mathrm{z} + \mathrm{B}(\rho,\theta)$; acum, a treia ecuaţie devine $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial\rho} - \frac{\partial \mathrm{w}_1}{\partial\theta} = 0$. Luăm $\mathrm{w}_1 = 0$, $\mathrm{B} = 0$ şi această condiţie se verifică.

Am obţinut că $\vec{w} = -\,\mathrm{z}\vec{e}_\theta$ este un potenţial vector pentru câmpul vectorial $\vec{v}$ pe domeniul Δ.

Ca şi mai sus, mulţimea potenţialelor vectoare pentru câmpul vectorial $\vec{v}$ este $\vec{w} = -\,\mathrm{z}\vec{e}_\theta + \text{grad}\ \Phi$, unde Φ este un câmp scalar arbitrar de clasă C^2 pe domeniul Δ.

Considerăm acum că $\vec{v}$ este dat în coordonate sferice, pe domeniul $\Delta : \rho > 0,\ \theta \in [0,2\pi),\ \varphi \in (0,\pi)$. Având în vedere expresiile rotorului şi divergenţei în coordonate sferice (vezi Exemplele 12.4.5, 12.4.7),

$$\text{rot}\ \vec{v} = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \rho\sin\varphi\vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{div}\ \vec{v} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho^2},$$

ceea ce arată că $\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$ este doar câmp irotaţional pe Δ.
Un potenţial scalar $\Phi = \Phi(\rho,\varphi,\theta)$ pentru $\vec{v}$ presupune egalitatea grad $\Phi = \vec{v}$, adică $\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$, ceea ce conduce la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 \end{cases}$$

(vezi în Exemplul 12.4.3 expresia gradientului în coordonate sferice).
Ultimele două ecuaţii arată că Φ nu depinde de φ şi θ; rămâne deci $\Phi = \Phi(\rho)$ şi atunci, din prima ecuaţie avem $\Phi = \ln\rho + \mathrm{c}$.
Aşadar, mulţimea potenţialelor scalare pentru câmpul vectorial $\vec{v}$ pe domeniul Δ este $\Phi = \ln\rho + \mathrm{c}$, $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$.
b). Pentru câmpul vectorial $\vec{v} = 2\mathrm{x}\vec{i} + 2\mathrm{y}\vec{j} - \frac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}{\mathrm{z}}\vec{k}$ care este de clasă C^1 pe domeniul $\mathrm{D} = (0,\infty)^3$, avem

$$\mathrm{rot}\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ 2\mathrm{x} & 2\mathrm{y} & -\frac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}{\mathrm{z}} \end{vmatrix} = -\frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{z}}\vec{i} + \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{z}}\vec{j}.$$

Se constată cu uşurinţă că $\vec{v} \cdot \mathrm{rot}\ \vec{v} = 0$. Conform Teoremei 12.6.4, câmpul vectorial $\vec{v}$ este biscalar. Conform cu Definiţia 12.6.6, există două câmpuri scalare φ şi ψ astfel încât $\vec{v} = \varphi$ grad ψ.
Se observă că

$$\frac{1}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}\vec{v} = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}\vec{i} + \frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}\vec{j} - \frac{1}{\mathrm{z}}\vec{k} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\ln(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\ln(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)\right)\vec{j} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\ln \mathrm{z})\,\vec{k} =$$
$$= \mathrm{grad}\left(\ln\frac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}{\mathrm{z}}\right),$$

de unde rezultă $\vec{v} = \left(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2\right)\mathrm{grad}\left(\ln\frac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}{\mathrm{z}}\right)$. ■

Observaţie. Amănunte în legătură cu câmpurile vectoriale particulare amintite mai sus dar şi despre alte câmpuri, se află în §12.6.

Problema 46

a). Să se determine un câmp scalar Φ cunoscând gradientul său pe un domeniu simplu conex D ce se cere a fi precizat:
i). grad $\Phi = -2\mathrm{xy}\vec{i} + (\mathrm{y}^2 - \mathrm{x}^2)\vec{j} - \vec{k}$,
ii). grad $\Phi = \mathrm{e}^{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$.
b). Să se determine un câmp vectorial irotaţional $\vec{v}$ ştiind divergenţa sa pe un domeniu simplu conex ce se cere a fi precizat:

i). div $\vec{v}$ = xy + yz + xz,
ii). div $\vec{v} = -\frac{\cos\theta}{\rho^4}$.

c). Să se determine un câmp vectorial solenoidal $\vec{v}$ ştiind rotorul său pe un domeniu simplu conex ce se cere a fi precizat:
i). rot $\vec{v} = y(1-2x)\vec{i} + (z - x^2 + y^2)\vec{j} + (x-1)\vec{k}$,
ii). rot $\vec{v} = \vec{e}_\theta$.

d). Să se determine un câmp vectorial $\vec{v}$ cunoscând divergenţa şi rotorul său pe un domeniu simplu conex D ce se cere a fi precizat:
i). div $\vec{v} = -$ xy, rot $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$,
ii). div $\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, rot $\vec{v} = \rho\vec{e}_\rho - 2z\vec{e}_z$,

Rezolvare. a). Avem în vedere cele spuse în §12.7/12.7.1.
i). Deoarece câmpul vectorial $\vec{v} = -2xy\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} - \vec{k}$ este irotaţional pe $\mathbb{R}^3$ (adică rot $\vec{v}$ = 0 pe $\mathbb{R}^3$ – vezi Definiţia 12.6.1), Teorema 12.7.1 ne asigură că există un câmp scalar Φ astfel încât

$$\text{grad } \Phi = -2xy\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} - \vec{k} \text{ pe } \mathbb{R}^3.$$

Apoi, Remarca 12.6.1 ne dă $\Phi(x,y,z) = \int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} + c =$

$$= \int\limits_0^x -2ty\,dt + \int\limits_0^y t^2 dt + \int\limits_0^z -\,dt + c = -x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 - z + c.$$

Când c parcurge mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, mulţimea de funcţii $\Phi(x,y,z) = -x^2y + \frac{1}{3}y^3 - z + c$ este mulţimea câmpurilor scalare cerute.
ii). Acum, câmpul vectorial $\vec{v} = e^z\vec{e}_z$ este dat în coordonate cilindrice. Având în vedere expresia rotorului în astfel de coordonate dată în Exemplul 12.4.6, se constată că rot $\vec{v}$ = 0. Aşadar, există un câmp scalar $\Phi = \Phi(\rho, \theta, z)$ astfel încât grad $\Phi = e^z\vec{e}_z$. Având în vedere expresia gradientului în coordonate cilindrice dată în Exemplul 12.4.4, această egalitate devine $\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z = e^z\vec{e}_z$ şi conduce la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = e^z \end{cases}.$$

Din primele două ecuaţii rezultă că $\Phi = \Phi(z)$, iar din ultima,

$\Phi = e^z + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Această mulţime de funcţii este mulţimea câmpurilor scalare cerute.
b). Avem în vedere cele spuse în §12.7/12.7.2/1. Ca urmare, soluţia sistemului

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{v} = 0 \\ \text{div } \vec{v} = \Phi \end{cases}$$

este $\vec{v} = \text{grad } \psi$, cu $\Delta\psi = \Phi$.
i). Concret, ecuaţia lui Poisson $\Delta\psi = \Phi$ devine

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = xy + yz + xz.$$

Căutăm o soluţie ψ de forma unei funcţii polinomiale de gradul trei în x, y, z. Se constată cu uşurinţă că $\psi = \frac{1}{6}\left(x^3y + y^3z + xz^3\right)$ este o soluţie a acestei ecuaţii.
Ca urmare,
$\vec{v} = \text{grad } \psi = \frac{1}{6}\left(3x^2y + z^3\right)\vec{i} + \frac{1}{6}\left(x^3 + 3y^2z\right)\vec{j} + \frac{1}{6}\left(y^3 + 3xz^2\right)\vec{k}$
este un câmp vectorial irotaţional cu div $\vec{v} = xy + yz + xz$.
ii). Câmpul scalar $\Phi = -\frac{\cos\theta}{\rho^4}$ este dat în coordonate cilindrice. În astfel de coordonate, ecuaţia lui Poisson $\Delta\psi = \Phi$ devine (vezi expresia laplaceianului în coordonate cilindrice în Exemplul 12.4.10)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{\cos\theta}{\rho^4}.$$

Căutăm o soluţie ψ de forma $\psi = \psi(\rho,\theta) = \frac{f(\theta)}{\rho^2}$. Ecuaţia devine (după eliminarea numitorului ρ^4) $f'' + 4f = -\cos\theta$.
O soluţie a acestei ecuaţii este $f(\theta) = -\frac{1}{3}\cos\theta$ şi deci, $\psi = -\frac{1}{3\rho^2}\cos\theta$ este o soluţie a ecuaţiei lui Poisson de mai sus.
Acum, $\vec{v} = \text{grad } \psi = \frac{2}{3\rho^3}\cos\theta\vec{e}_\rho + \frac{1}{3\rho^3}\sin\theta\vec{e}_\theta$ este un câmp vectorial irotaţional ce are divergenţa div $\vec{v} = -\frac{\cos\theta}{\rho^4}$.
c). Avem în vedere cele spuse în §12.7/12.7.2/2. Ca urmare, soluţia sistemului $\begin{cases} \text{rot } \vec{v} = \vec{V} \\ \text{div } \vec{v} = 0 \end{cases}$ (în care div $\vec{V} = 0$) este $\vec{v} = \vec{w} + \text{grad } \psi$ cu $\Delta\psi = -$ div $\vec{w}$, $\vec{w}$ fiind un potenţial vector pe $\mathbb{R}^3$ pentru $\vec{V}$.
i). Concret, pentru $\vec{V} = y(1 - 2x)\vec{i} + (z - x^2 + y^2)\vec{j} + (x - 1)\vec{k}$, avem div $\vec{V} = 0$, după cum uşor se poate constata. Ca urmare (vezi Definiţia 12.6.3 şi Teorema 12.6.2), există un potenţial vector (vezi Definiţia 12.6.4) pe $\mathbb{R}^3$ pentru $\vec{V}$. Căutăm acest potenţial vector sub forma $\vec{w} = w_1(x,y,z)\vec{i} + w_2(x,y,z)\vec{j}$.
Condiţia rot $\vec{w} = \vec{V}$ se transformă în sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial z} & = & -\,y(1-2x) \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial z} & = & z - x^2 + y^2 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x} - \dfrac{\partial w_1}{\partial y} & = & x - 1 \end{cases}.$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului rezultă

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}z^2 + (y^2 - x^2)z + A(x,y) \\ w_2 = (2x-1)yz + B(x,y) \end{cases},$$

care duse în a treia ne dă condiţia pentru A şi B: $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = x - 1$.
Luăm $A = -\,yx$ şi $B = -\,x$ şi această condiţie se verifică.
În consecinţă, $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}z^2 + (y^2 - x^2)z - yx\right)\vec{i} + ((2x-1)yz - x)\,\vec{j}$ este un potenţial vector pe $\mathbb{R}^3$ pentru $\vec{V}$.
Deoarece div $\vec{w} = -\,y - z$, rezultă că ecuaţia $\Delta\psi = -\mathrm{div}\vec{w}$ devine (vezi Definiţia 12.3.6) $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = y + z$.
O soluţie a acestei ecuaţii este $\psi = \frac{1}{6}\left(y^3 + z^3\right)$.
Acum avem grad $\psi = \frac{1}{2}y^2\vec{j} + \frac{1}{2}z^2\vec{k}$ şi atunci, soluţia $\vec{v}$ căutată este

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}z^2 + (y^2 - x^2)z - yx\right)\vec{i} + \\ + \left((2x-1)yz - x + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{j} + \frac{1}{2}z^2\vec{k}.$$

ii). Considerăm că cerinţa rot $\vec{v} = \vec{e}_\theta$ este dată în coordonate cilindrice. Procedăm ca mai sus, lucrând în astfel de coordonate.
Concret, pentru $\vec{V} = \vec{e}_\theta$, avem (vezi Exemplul 12.4.8) div $\vec{V} = 0$, după cum uşor se poate constata. Ca urmare (vezi Definiţia 12.6.3 şi Teorema 12.6.2), există un potenţial vector (vezi Definiţia 12.6.4) pe $\mathbb{R}^3$ pentru $\vec{V}$. Căutăm acest potenţial vector sub forma

$$\vec{w} = w_1(\rho,\theta,z)\vec{e}_\rho + w_3(\rho,\theta,z)\vec{e}_z.$$

Condiţia rot $\vec{w} = \vec{V}$ se scrie (vezi expresia rotorului în coordonate cilindrice în Exemplul 12.4.6)

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_\theta$$

şi se transformă în sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_3}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial z} - \dfrac{\partial w_3}{\partial\rho} = 1 \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial\theta} = 0 \end{cases}.$$

Se constată că o soluţie a acestui sistem este $w_1 = 0$ şi $w_3 = -\,\rho$. Ca urmare, $\vec{w} = -\,\rho\vec{e}_z$ este un potenţial vector pe domeniul $\Delta : \rho > 0$,

$\theta \in [0,2\pi)$, z $\in \mathbb{R}$ pentru câmpul solenoidal $\vec{V}$. Deoarece div $\vec{w} = 0$, rezultă că ecuaţia $\Delta\psi = -$ div $\vec{w}$ devine (vezi Definiţia 12.4.10)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = 0.$$

Putem lua $\psi = 0$. Soluţia $\vec{v}$ este $\vec{v} = \vec{w} + \mathrm{grad}\ \psi = -\rho\vec{e}_z$.
Dacă cerinţa rot $\vec{v} = \vec{e}_\theta$ este dată în coordonate sferice, se procedează asemănător.
d). i). Conform cu Teorema 12.7.2, o soluţie a sistemului

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\ \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k} \\ \mathrm{div}\ \vec{v} = -xy \end{cases}$$

se poate determina sub forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, unde $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt soluţii ale sistemelor

$$(S_1) : \begin{cases} \mathrm{rot}\ \vec{v} = 0 \\ \mathrm{div}\ \vec{v} = -xy \end{cases}, \ (S_2) : \begin{cases} \mathrm{rot}\ \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k} \\ \mathrm{div}\ \vec{v} = 0 \end{cases}.$$

Determinarea unei soluţii $\vec{v}_1$ pe $\mathbb{R}^3$ a sistemului (S_1) se face asemănător ca la pct. b). Se obţine, de exemplu, $\vec{v}_1 = -\frac{1}{2}x^2y\vec{i} - \frac{1}{6}x^3\vec{j}$.
Analog, determinarea unei soluţii $\vec{v}_2$ pe $\mathbb{R}^3$ a sistemului (S_2) se face asemănător ca la pct. c). Se obţine, de exemplu, $\vec{v}_2 = yz\vec{i} - xz\vec{j}$.
Ca urmare, o soluţie pe $\mathbb{R}^3$ a sistemului dat este

$$\vec{v} = \left(yz - \tfrac{1}{2}x^2y\right)\vec{i} - \left(\tfrac{1}{6}x^3 + xz\right)\vec{j}.$$

ii). Procedăm ca mai sus, lucrând în coordonate cilindrice. Se obţine, de exemplu, $\vec{v}_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\vec{e}_\rho + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\vec{e}_z$, ca soluţie a sistemului

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\ \vec{v} = 0 \\ \mathrm{div}\ \vec{v} = \dfrac{2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{cases}$$

şi $\vec{v}_2 = 2\theta\rho z\vec{e}_\rho - \frac{2}{3}\frac{z^3}{\rho}\vec{e}_\theta + \left(\theta\rho^2 - 2\theta z^2\right)\vec{e}_z$, ca soluţie a sistemului

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\ \vec{v} = \rho\vec{e}_\rho - 2z\vec{e}_z \\ \mathrm{div}\ \vec{v} = 0 \end{cases}.$$

Ca urmare, o soluţie pe domeniul $\Delta : \rho > 0,\ \theta \in [0,2\pi),\ z \in \mathbb{R}$ a sistemului dat este

$$\vec{v} = \left(2\theta\rho z + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)\vec{e}_\rho - \frac{2}{3}\frac{z^3}{\rho}\vec{e}_\theta + $$
$$+ \left(\theta\rho^2 - 2\theta z^2 + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)\vec{e}_z. \ \blacksquare$$

Observaţie. Toate problemele de mai sus au o infinitate de soluţii. Determinarea tuturor acestor soluţii necesită cunoştinţe avansate de Ecuaţii diferenţiale.
Amănunte în legătură cu astfel de probleme se pot găsi în §12.7.