1 Spaţii punctual euclidiene reale

Un spaţiu afin $\mathcal{E}$ se numeşte *spaţiu punctual euclidian* dacă pe spaţiul său vectorial director V este dat un produs scalar, adică V este un spaţiu vectorial euclidian cu corpul scalarilor $\mathbb{R}$.

În cele ce urmează:

1. $\mathcal{E}$ va desemna un spaţiu punctual euclidian real cu spaţiul vectorial director V; produsul scalar va fi notat cu un punct

   $< \bar{v}_1, \bar{v}_2 > \stackrel{\text{not.}}{=} \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$, iar norma vectorului $\bar{v} \in V$ va fi notată cu $|\bar{v}| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$.

2. $\mathcal{E}_n$ va desemna spaţiul punctual euclidian canonic pe $\mathbb{R}^n$, unde spaţiul afin este $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^n)$, iar spaţiul euclidian director este E_n (adică $\mathbb{R}^n$ pe care se consideră produsul scalar canonic).

Un reper afin $(O, \mathcal{B})$ în care $\mathcal{B} \subset V$ este o bază ortonormată se numeşte *reper euclidian*.

Distanţa dintre două puncte $A, B \in \mathcal{E}$ este, prin definiţie, lungimea vectorului $\overline{AB}$, adică $d(A, B) = |\overline{AB}|$.

Dacă $(O, \mathcal{B})$ este un reper euclidian $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ şi $A(a^1, \ldots, a^n)$, $B(b^1, \ldots, b^n) \in \mathcal{E}$, atunci

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + \cdots + (a^n - b^n)^2}. \tag{1}$$

Distanţa dintre două mulţimi $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{E}$ este, prin definiţie

$$\inf_{\substack{P_1 \in \mathcal{M}_1 \\ P_2 \in \mathcal{M}_2}} |P_1 P_2| \stackrel{\text{not.}}{=} d(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2).$$

Unghiul a două drepte d_1, $d_2 \subset \mathcal{E}$, care au ca vectori directori $\bar{a}_1$, respectiv $\bar{a}_2$, este unghiul celor doi vectori directori, adică

$$\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|}.$$

Toate unghiurile considerate vor avea măsura în intervalul $[0, \pi)$.

Dacă $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ este un hiperplan, atunci un vector nenul $\bar{v} \in V$, perpendicular pe subspaţiul vectorial director al hiperplanului se numeşte *vector normal* la hiperplan. Un vector normal la hiperplanul $\mathcal{H}$ este transvers subspaţiului vectorial director al lui $\mathcal{H}$, deci defineşte o orientare pe $\mathcal{H}$. Dacă $P_0 \in \mathcal{H}$ este un punct fixat, atunci un punct $P \in \mathcal{H}$ dacă şi numai dacă $\overline{P_0P} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \overline{P_0P} \cdot \bar{v} = 0$. Dacă $O \in \mathcal{E}$ este un punct (de obicei originea unui reper euclidian) şi notăm $\bar{r}_0 = \overline{OP_0}$, $\bar{r} = \overline{OP}$ (numiţi *vectori de poziţie* ai punctelor P_0, respectiv P, faţă de punctul O), obţinem

$$(\mathcal{H}) : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{v} = 0, \tag{2}$$

(numită *ecuaţia vectorială* a hiperplanului).

Unghiul a două hiperplane $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}$ orientate, de vectori normali $\bar{v}_1$, respectiv $\bar{v}_2$, este dat de unghiul acestor vectori:

$$\cos\left(\widehat{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}\right) = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2|}.$$

Fie V de dimensiune n şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ o bază ortonormată. Dacă $P_0(x_0^1, \ldots, x_0^n) \in \mathcal{H}$ şi $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ este un vector normal la hiperplan, atunci un punct $P(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow$ are loc (2), care se mai scrie:

$$(\mathcal{H}) : v_1 \left(x^1 - x_0^1\right) + \cdots + v_n \left(x^n - x_0^n\right) = 0, \tag{3}$$

(numită *ecuaţia carteziană* a hiperplanului).

Fie $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ un vector nenul. Mulţimea punctelor $P(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{E}$ ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(\mathcal{H}) : v_1 x^1 + \cdots + v_n x^n + \alpha = 0 \tag{4}$$

este un hiperplan care are vectorul $\bar{v}$ ca vector normal. Ecuaţia (4) este numită tot *ecuaţia carteziană generală* a hiperplanului.

Fie $\mathcal{S} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-1}\} \subset V$ un sistem de $n - 1$ vectori liniar independenţi. Atunci orice hiperplan $\mathcal{H}$, care are ca subspaţiu director subspaţiul lui V generat de $\mathcal{S}$, admite ca vector normal produsul vectorial $\bar{v}_1 \times \cdots \times \bar{v}_{n-1}$.

Propoziţia 1 *Fie $\mathcal{H}$ un hiperplan şi fie punctul $A \in \mathcal{E}$.*

1. *Dacă hiperplanul este dat prin ecuaţia vectorială (2) şi vectorii de poziţie în raport cu un punct O, al lui A şi al unui punct $P_0 \in \mathcal{H}$, sunt $\overline{OA} = \bar{r}_A$ şi $\overline{OP_0} = \bar{r}_0$, atunci*
$$d(A, \mathcal{H}) = \frac{|(\bar{r}_A - \bar{r}_0) \cdot \bar{v}|}{|\bar{v}|}.$$

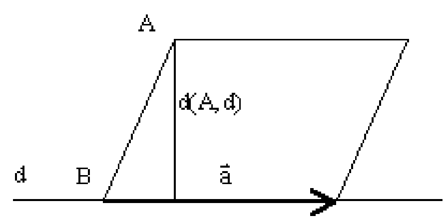
2. *Dacă hiperplanul este dat prin ecuaţia carteziană (3) şi $A(a^1, \ldots, a^n)$, atunci*
$$d(A, \mathcal{H}) = \frac{|v_1 \left(a^1 - x_0^1\right) + \cdots + v_n \left(a^n - x_0^n\right)|}{\sqrt{(v_1)^2 + \cdots + (v_n)^2}}..$$

3. *Dacă hiperplanul este dat prin ecuaţia carteziană generală (4) şi $A(a^1, \ldots, a^n)$ atunci*
$$d(A, \mathcal{H}) = \frac{|v_1 a^1 + \cdots + v_n a^n + \alpha|}{\sqrt{(v_1)^2 + \cdots + (v_n)^2}}. \tag{5}$$

Propoziţia 2 *Distanţa dintre două hiperplane paralele $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$, date de ecuaţiile:*
$$(\mathcal{H}_1) : v_1 x^1 + \cdots + v_n x^n + \alpha = 0,$$
$$(\mathcal{H}_2) : v_1 x^1 + \cdots + v_n x^n + \beta = 0$$
este:
$$d(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{(v_1)^2 + \cdots + (v_n)^2}}.$$

Propoziţia 3 *Distanţa de la un punct A la o dreaptă d, care are vectorul director $\bar{a}$, este dată de formula*
$$d(A, d) = \frac{|\bar{a} \times \overline{AB}|}{|\bar{a}|}, \tag{6}$$
unde $B \in d$ este un punct oarecare, iar produsul vectorial se consideră într-un subspaţiu vectorial euclidian arbitrar, de dimensiune 3, $W \subset V$, care conţine vectorii $\bar{a}$ şi $\overline{AB}$.

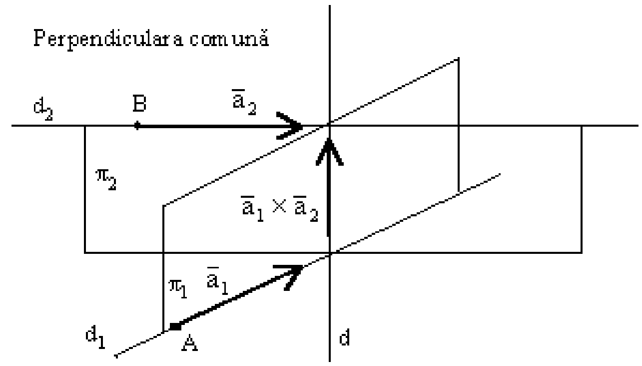
Remarcă. Se poate considera, de exemplu, O neconţinut în 2-planul determinat de A şi d, iar ca $W \subset V$ se consideră 3-subspaţiul director al subspaţiului afin al lui $\mathcal{E}$ generat de O, A şi d. Dacă $\dim \mathcal{E} = 3$ (adică $\dim V = 3$), atunci produsul vectorial se poate considera în $\mathcal{E}$.



O perpendiculară comună a două drepte d_1 şi d_2 este o dreaptă care intersectează şi este perpendiculară pe d_1 şi d_2.

Propoziţia 4 *Dacă d_1 şi d_2 sunt două drepte neparalele care nu se intersectează, atunci perpendiculara comună a celor două drepte există, este unică şi are următoarele ecuaţii în $\mathcal{E}' = \mathcal{A}ffin(d_1 \cup d_2)$:*
$$\begin{cases} \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_A) = 0 \\ \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_B) = 0 \end{cases},$$
unde d_1 conţine punctul A şi are vectorul director $\bar{a}_1$, iar d_2 conţine punctul B şi are vectorul director $\bar{a}_2$.

În $\mathcal{E}_3$, dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$ şi $d_1 \neq d_2$, perpendiculara comună are aceleaşi ecuaţii.



Vectorul $\bar{a} = (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)$ este perpendicular pe $\bar{a}_1$ şi pe $\bar{a}_2$. Fie π_1 planul care conţine pe A şi are ca vectori directori pe $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}$ (deci vector normal $\bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)$), iar π_2 planul care conţine pe B şi are ca vectori directori pe $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}$ (deci vector normal $\bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)$). Rezultă că $d_1 \subset \pi_1$ şi $d_2 \subset \pi_2$, iar $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ este o dreaptă care are ca vector director pe $\bar{a}$ (vectorul director comun). Avem că $d_1 \perp d$, $d_2 \perp d$, d_1, $d \subset \pi_1$, d_2, $d \subset \pi_2$. Dreapta d este deci perpendiculară comună. Din construcţia lui $d = \pi_1 \cap \pi_2$, rezultă unicitatea ei (pentru că orice dreaptă d' care ar fi perpendiculară comună ar trebui să fie inclusă în $\pi_1 \cap \pi_2$). Cum $(\pi_1) : \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_A) = 0$ şi $(\pi_2) : \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_B) = 0$, rezultă că ecuaţiile lui d se obţin ca în enunţ.

În $\mathcal{E}_3$, dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$ şi $d_1 \neq d_2$, perpendiculara comună se obţine ca $\pi_1 \cap \pi_2$, cu notaţiile anterioare, deci are aceleaşi ecuaţii.□

Să remarcăm că dacă $d_1 \parallel d_2$, $d_1 \neq d_2$, cu vectorul director $\bar{a}$, atunci există o infintate de perpendiculare comune. Acestea sunt incluse în planul π determinat de d_1 şi d_2, având ca vector director un vector paralel cu π şi perpendicular pe vectorul $\bar{a}$.

Propoziţia 5 *Fie d_1, $d_2 \subset \mathcal{E}$ două drepte neparalele, care au vectorii directori $\bar{a}_1$, respectiv $\bar{a}_2$, iar $A \in d_1$, $B \in d_2$ şi fie $\mathcal{E}' = \mathcal{A}ffin(d_1 \cup d_2)$ (subspaţiul afin generat de d_1 şi d_2). Atunci distanţa dintre cele două drepte este*

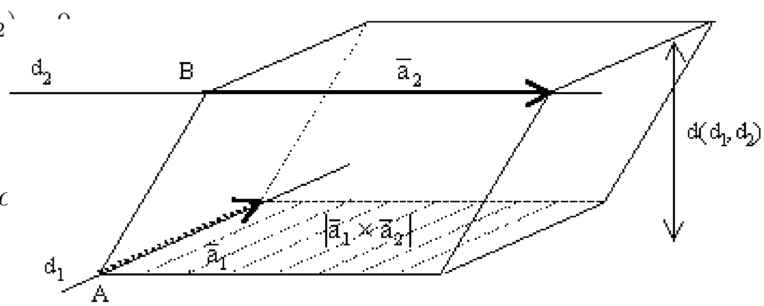
$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \overline{AB}]\right|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|},$$

unde produsul mixt este calculat în $\mathcal{E}'$.

Dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, atunci $d(d_1, d_2$

Dacă $d_1 \parallel d_2$, atunci

În $\mathcal{E}_3$, $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, sau $d_1 \parallel d_2$, (adic



Proiecţia unui punct A pe un k-plan $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ este:

- punctul A, dacă $A \in \mathcal{E}'$, sau
- punctul $A' \in \mathcal{E}'$ pentru care $\overline{AA'}$ este vector normal la hiperplanul $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}ffin(\mathcal{E}' \cup \{A\})$.

Se notează $A' = pr_{\mathcal{E}'}A$. Proiecţia unei mulţimi de puncte pe $\mathcal{E}'$ este proiecţia pe $\mathcal{E}'$ a tuturor punctelor mulţimii.

Propoziţia 6 *Proiecţia unui subspaţiu punctual euclidian $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$ pe un alt subspaţiu punctual euclidian $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ este o aplicaţie afină, iar aplicaţia liniară indusă între spaţiile vectoriale directoare este un proiector ortogonal (de spaţii vectoriale euclidiene).*

Propoziţia 7 *Proiecţia unui subspaţiu punctual euclidian $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}$ pe un alt subspaţiu punctual euclidian $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ este un subspaţiu punctual euclidian $pr_{\mathcal{E}'}\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}'$.*

Un alt exemplu de aplicaţie afină este aplicaţia izometrică. O *aplicaţie izometrică* este o aplicaţie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ între două spaţii punctual euclidiene care are proprietatea că păstrează distanţa, adică $|AB|_{\mathcal{E}} = |f(A)f(B)|_{\mathcal{E}'}$, $(\forall)A, B \in \mathcal{E}$.

Propoziţia 8 *O aplicaţie izometrică, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, este o aplicaţie afină injectivă.*

O *izometrie* este o aplicaţie surjectivă şi izometrică. Folosind propoziţia 8 rezultă că o izometrie este un izomorfism afin. Dacă se consideră repere ortonormate, atunci aplicaţia liniară indusă între spaţiile vectoriale euclidiene este, de asemenea, o izometrie, prin urmare matricea acestei aplicaţii liniare corespunzătoare bazelor ortonormate este o matrice ortogonală.

Simetricul unui punct A faţă de un k-plan $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ este punctul $A'' \in \mathcal{E}$ astfel că punctul $A' = pr_{\mathcal{E}'}A$ (proiecţia lui A pe $\mathcal{E}'$) este mijlocul segmentului $[AA'']$. Se notează $A'' = s_{\mathcal{E}'}A$. Simetrica unei mulţimi de puncte faţă de $\mathcal{E}'$ este obţinută din simetricele tuturor punctelor mulţimii faţă de $\mathcal{E}'$.

Propoziţia 9 *Fie d_1, $d_2 \in \mathcal{E}$ două drepte concurente în O, cu vectorii directori $\bar{a}_1$ şi respectiv $\bar{a}_2$. Atunci cele două bisectoare ale dreptelor d_1 şi d_2 trec prin O' şi au vectorii directori $\frac{1}{|\bar{a}_1|}\bar{a}_1 \pm \frac{1}{|\bar{a}_2|}\bar{a}_2$.*

Unghiul dintre o dreaptă şi un hiperplan este unghiul pe care îl face dreapta cu un vector normal la hiperplan. Pentru mai multă claritate, se defineşte noţiunea de orientare a unui spaţiu punctual euclidian (deci în particular a unui hiperplan), ca fiind o orientare a spaţiului vectorial director. Deoarece o orientare a unui spaţiu vectorial este dată prin fixarea orientării pozitive definite de o bază dată, rezultă că orientarea unui spaţiu punctual euclidian se face prin fixarea orientării pozitive definite de un reper cartezian dat. În cazul unui hiperplan $\mathcal{H}$, fixarea unui vector normal $\bar{n}$ la hiperplan şi a unei orientări a spaţiului euclidian $\mathcal{E}$ induce o orientare a hiperplanului $\mathcal{H}$.

Propoziţia 10 *Dacă $(O, \mathcal{B})$ este un reper euclidian care defineşte o orientare pozitivă a spaţiului punctual euclidian $\mathcal{E}$ şi $\bar{n}$ este un vector unitar, normal la un hiperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, atunci există o singură orientare a hiperplanului $\mathcal{H}$ astfel încât pentru orice reper euclidian $(O_1, \mathcal{B}_1)$ al lui $\mathcal{H}$, reperul euclidian $(O_1, \mathcal{B}' = \{\bar{n}\} \cup \mathcal{B}_1)$ al lui $\mathcal{E}$ este pozitiv orientat.*

2 Spaţiul euclidian tridimensional canonic

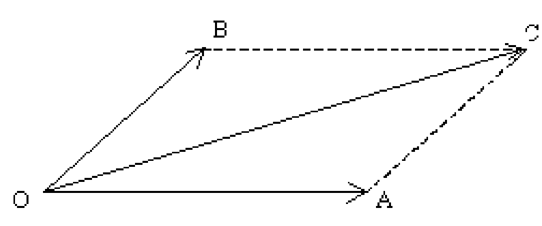
Vom defini în continuare spaţiul vectorial al *vectorilor legaţi* cu originea O fixată şi spaţiul vectorial *al vectorilor liberi* din spaţiul (euclidian) $\mathcal{S}$, studiat în liceu.

Spaţiul $\mathcal{S}$ este format din puncte, iar o mulţime de puncte formează o *figură geometrică*. Figuri geometrice în spaţiu sunt: dreptele, planele, semidreptele, semiplanele, segmentele de dreaptă, triunghiurile, poligoanele, poliedrele, interioarele de poligoane şi de poliedre convexe etc. Planele, dreptele şi punctele sunt *noţiuni primare*. Un sistem de axiome (care poate fi sistemul axiomatic al lui Hilbert, ori al lui Birkhoff, ori alt sistem echivalent), enunţă un set de proprietăţi primare (numite axiome) pe care le au noţiunile primare. În continuare vom presupune cunoscute definiţiile şi proprietăţile legate de geometria euclidiană a spaţiului $\mathcal{S}$.

Un *segment orientat* (sau *vector legat*) se defineşte ca fiind un dublet de puncte (P, Q), notat $\overrightarrow{PQ}$, unde punctul P se numeşte *origine*, iar punctul Q se numeşte *extremitate.* Dacă $P \neq Q$, dreapta PQ se numeşte *dreapta suport* a lui $\overrightarrow{PQ}$. Dacă $P = Q$, atunci $\overrightarrow{PP}$ se numeşte *vectorul nul* şi orice dreaptă care trece prin P este dreaptă suport pentru aceste.

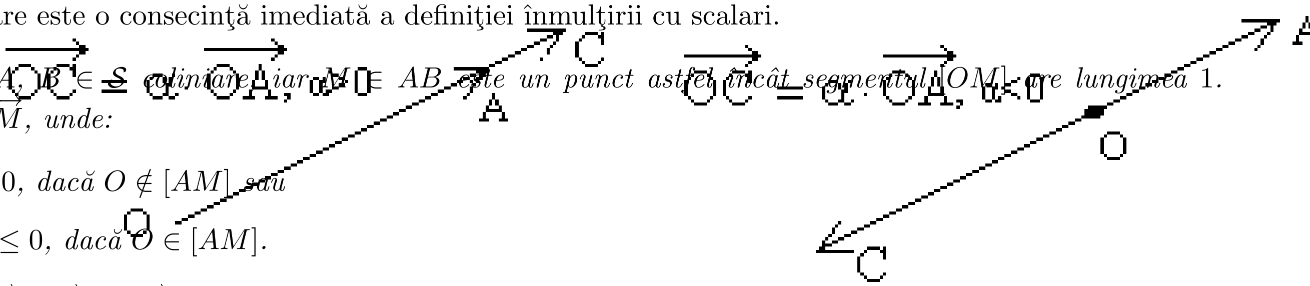
Dacă se fixează un punct $O \in \mathcal{P}$, atunci se poate considera mulţimea $\mathcal{V}_O = \{\overrightarrow{OA} | A \in \mathcal{P}\}$, a segmentelor orientate cu originea în punctul O (sau a vectorilor legaţi în O). Pe mulţimea $\mathcal{V}_O$ se definesc două legi de compoziţie:

- o lege de compoziţie internă $+ : \mathcal{V}_O \times \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$, numită *adunarea vectorilor* din $\mathcal{V}_O$, care asociază vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \mathcal{V}_O$ vectorul $\overrightarrow{OC}$, notat $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, unde C este al patrulea vârf al paralelogramului $[OACB]$ (posibil degenerat, dacă O, A şi B sunt coliniare) construit pe cei doi vectori, ca laturi;



- o lege de compoziţie externă $\cdot : I\!R \times \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$, numită *înmulţirea cu scalari* a vectorilor din $\mathcal{V}_O$, care asociază unui număr $\alpha \in I\!R$ şi unui vector $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O$ vectorul $\overrightarrow{OC}$, notat $\alpha \cdot \overrightarrow{OA}$, unde C este un punct coliniar cu O şi A, definit astfel: dacă $\alpha > 0$, atunci segmentul $[OC]$ are lungimea α înmulţită cu lungimea segmentului $[OA]$ şi $O \notin [AC]$, dacă $\alpha = 0$, atunci $C = O$, iar dacă $\alpha < 0$, atunci segmentul $[OC]$ are lungimea $-\alpha$ înmulţită cu lungimea segmentului $[OA]$ şi $O \in [AC]$.

Lema următoare este o consecinţă imediată a definiţiei înmulţirii cu scalari.



Lema 1 *Fie O, A, $B \in \mathcal{S}$ coliniare, iar $M \in AB$ este un punct astfel încât segmentul $[OM]$ are lungimea 1. Atunci $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OM}$, unde:*

1. $\alpha = |OA| > 0$, *dacă* $O \notin [AM]$ *sau*
2. $\alpha = -|OA| \leq 0$, *dacă* $O \in [AM]$.

Trei vectori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ se spune că sunt *coplanari* dacă punctele O, A, B şi C se găsesc în acelaşi plan şi *necoplanari* în caz contrar.

Propoziţia 11 *Tripletul $(\mathcal{V}_O, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial real, numit* spaţiul vectorial al vectorilor legaţi *în O, în care orice trei vectori necoplanari formează o bază.*

Să considerăm în continuare vectori legaţi care nu au neapărat aceeaşi origine.

Doi vectori legaţi $\overrightarrow{PQ}$ şi $\overrightarrow{P'Q'}$ se numesc

- *echipolenţi* şi se scrie $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{P'Q'}$, dacă ambii vectori legaţi sunt nuli, ori, în caz contrar, poligonul $PQQ'P'$ este un paralelogram, eventual degenerat ($\Leftrightarrow$ segmentele $[PQ']$ şi $[P'Q]$ au acelaşi mijloc);
- *paraleli* şi se scrie $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{P'Q'}$, dacă dreptele lor suport sunt paralele.

Propoziţia 12 *Relaţiile de echipolenţă şi de paralelism ale vectorilor legaţi din spaţiu sunt relaţii de echivalenţă.*

Evident că doi vectori echipolenţi sunt paraleli, proprietatea recprocă nefiind adevărată (contraexemplu: doi vectori paraleli care nu au aceeaşi lungime).

Relaţia de echipolenţă fiind o relaţie de echivalenţă pe mulţimea tuturor vectorilor legaţi $\mathcal{V}_{leg}$, se poate considera mulţimea claselor de echivalenţă, care este mulţimea $\mathcal{V}_{lib}$, a vectorilor liberi. Astfel, dacă $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_{leg}$ este un vector legat, atunci clasa sa de echivalenţă, care se notează cu $\overline{AB}$, este formată din mulţimea tuturor vectorilor $\overrightarrow{A'B'} \in \mathcal{V}_{leg}$ care au proprietatea că $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'}$. Se observă că, dacă se fixează un punct $O \in \mathcal{S}$, există o aplicaţie bijectivă $F_O : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_{lib}$, care asociază unui vector legat $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O$ clasa sa de echivalenţă $\overline{AB} \in \mathcal{V}_{lib}$. Prin inversa acestei bijecţii, fiecărui vector liber $\bar{a} \in \mathcal{V}_{lib}$ i se poate asocia în mod unic un vector $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_{leg}$ astfel încât $\bar{a} = \overline{OA}$.

Se poate constata că dacă se consideră două puncte O, $O' \in \mathcal{P}$, atunci aplicaţia $\varphi = F_{O'}^{-1} \circ F_O : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_{O'}$ este o bijecţie şi are proprietăţile $\varphi(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \varphi(\overrightarrow{OA}) + \varphi(\overrightarrow{OB})$ şi $\varphi(\alpha \cdot \overrightarrow{OA}) = \alpha \cdot \varphi(\overrightarrow{OA})$, $(\forall)$ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \mathcal{V}_O$ şi $\alpha \in I\!R$, deci φ este un izomorfism de spaţii vectoriale reale.

Rezultă astfel că:

- dacă $\overrightarrow{OA} \equiv \overrightarrow{O'A'}$ şi $\overrightarrow{OB} \equiv \overrightarrow{O'B'} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \equiv \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$, $(\forall) O, O' \in \mathcal{S}$ (prin adunarea a doi vectori legaţi într-un punct O se obţine un vector echipolent cu vectorul ce rezultă prin adunarea vectorilor echipolenţi legaţi într-un oricare alt punct O');
- dacă $\alpha \in I\!R$ şi $\overrightarrow{OA} \equiv \overrightarrow{O'A'} \Rightarrow \alpha \cdot \overrightarrow{OA} \equiv \alpha \cdot \overrightarrow{O'A'}$, $(\forall) O, O' \in \mathcal{S}$ (prin înmulţirea unui vector legat într-un punct O cu un număr real α, se obţine un vector echipolent cu vectorul ce rezultă prin înmulţirea vectorului echipolent legat în O' cu α).

Pe mulţimea $\mathcal{V}_{lib}$ se definesc două legi de compoziţie:

- o lege de compoziţie internă $+ : \mathcal{V}_{lib} \times \mathcal{V}_{lib} \to \mathcal{V}_{lib}$, numită *adunarea vectorilor liberi*, care asociază la doi vectori $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB} \in \mathcal{V}_{lib}$ vectorul liber $\overline{OC}$, unde $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, notat $\bar{a} + \bar{b}$ (după cum am văzut, definiţia nu depinde de punctul O) şi

- o lege de compoziţie externă $\cdot : I\!R \times \mathcal{V}_{lib} \to \mathcal{V}_{lib}$, numită *înmulţirea cu scalari* a vectorilor din $\mathcal{V}_{lib}$, care asociază unui număr $\alpha \in I\!R$ şi unui vector $\bar{a} = \overline{OA} \in \mathcal{V}_{lib}$, vectorul corespunzător clasei $\alpha \cdot \overrightarrow{OA}$, notat $\alpha \cdot \bar{a}$ (după cum am văzut deja, definiţia nu depinde de punctul O).

Următorul rezultat se poate demonstra prin verificarea axiomelor specifice unui spaţiu vectorial.

Lema 2 *Fie $(V, +, \cdot)$ un K-spaţiu vectorial, M este o mulţime şi $\varphi : V \to M$ o bijecţie. Se consideră:*

legea de compoziţie internă $\boxplus : M \times M \to M$, $x \boxplus y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))$ şi

legea de compoziţie externă $\boxdot : K \times M \to M$, $\alpha \boxdot x = \varphi(\alpha \cdot \varphi^{-1}(x))$.

Atunci $(M, \boxplus, \boxdot)$ este un K-spaţiu vectorial, iar φ este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Trei vectori liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ se spune că sunt *coplanari* dacă pentru trei reprezentanţi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$, punctele O, A, B şi C se găsesc în acelaşi plan şi *necoplanari* în caz contrar. Evident, definiţia nu depinde de punctul O.

Propoziţia 13 $(\mathcal{V}_{lib}, +, \cdot)$ *este un spaţiu vectorial real în care orice trei vectori necoplanari formează o bază.*

Propoziţia 14 *Mulţimea $\mathcal{S}$, a punctelor spaţiului, formează un spaţiu punctual euclidian.*

Următorul rezultat este o consecinţă imediată a celor demonstrate anterior. Reamintim că $\mathcal{E}_3$ este spaţiul punctual euclidian canonic.

Teorema 1 *Fie patru puncte O, E_1, E_2, $E_3 \in \mathcal{S}$, astfel încât dreptele OE_1, OE_2, OE_3 sunt perpendiculare două câte două, segmentele $[OE_1]$, $[OE_2]$ şi $[OE_3]$ au lungimea 1. Să considerăm aplicaţia $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{E}_3$, care asociază lui $A \in \mathcal{S}$, punctul $\Phi(A) = (a, b, c) \in \mathcal{E}_3$, unde*
$\overline{OA} = a\overline{OE_1} + b\overline{OE_2} + c\overline{OE_3}$.

Atunci Φ este un izomorfism de spaţii punctual euclidiene.

În spaţiul euclidian canonic $\mathcal{E}_3$ se poate considera reperul canonic $(O, \mathcal{B}_{can})$, unde $O(0,0,0)$ este originea, iar $\mathcal{B}_{can} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ şi $\bar{e}_3 = (0,0,1)$. Reperul canonic defineşte orientarea directă a planului euclidian $\mathcal{E}_3$. Un reper euclidian în $\mathcal{E}_3$ este un dublet $(O', \mathcal{B})$, unde $\mathcal{B} \subset E_3$ este o bază ortonormată şi $O' \in \mathcal{E}_3$. Dacă
$\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ este o bază pozitiv orientată, atunci matricea de trecere de la $\mathcal{B}_{can}$ la $\mathcal{B}$ se poate exprima cu ajutorul unghiurilor lui Euler. În continuare vom scrie explicit această matrice. Să presupunem că $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_3\} \neq \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Fie:

$\bar{f}_1$ vectorul unitar care este vector director al subspaţiului
$\mathcal{L}(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}) \cap \mathcal{L}(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\})$;

$\bar{f}_2$ vectorul unitar astfel încât baza $\mathcal{B}_1 = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{e}_3\}$ este ortonormată şi direct orientată;

$\bar{f}_1'$ vectorul unitar astfel încât baza $\mathcal{B}_2 = \{\bar{f}_1, \bar{f}_1', \bar{v}_3\}$este ortonormată şi direct orientată.

Matricile de trecere succesive sunt de forma:

$$[\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_1] = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$[\mathcal{B}_2, \mathcal{B}] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

prin urmare $[\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}] =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos\psi\cos\varphi - \\ -\sin\psi\cos\theta\sin\varphi \end{matrix} & \begin{matrix} -\cos\psi\sin\varphi - \\ -\sin\psi\cos\theta\cos\varphi \end{matrix} & \sin\psi\sin\theta \\ & & \\ \begin{matrix} \sin\psi\cos\varphi + \\ +\cos\psi\cos\theta\sin\varphi \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin\psi\sin\varphi + \\ +\cos\psi\cos\theta\cos\varphi \end{matrix} & -\cos\psi\sin\theta \\ & & \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Cei trei parametri $\psi, \theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ nu sunt unic determinaţi. Pentru a obţine o reprezentare biunivocă cu schimbările de bază directe, se iau punctele corespunzătoare $(\cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \sin\psi\cos\theta, \sin\theta) \in S^3$ (unde S^3 este sfera centrată în origine, de rază 1, din E_4).

Rezultă că o schimbare de reper ortogonal în $\mathcal{E}_3$ este determinată de şase parametri (trei provin de la schimbarea originii şi trei de la schimbarea bazei).

Ne vom ocupa în continuare de subspaţiile spaţiului euclidian canonic $\mathcal{E}_3$.

Ecuaţiile canonice ale unei drepte determinate de un punct $A(a, b, c)$ şi vectorul director $\bar{v} = (p, q, r)$ se scriu:

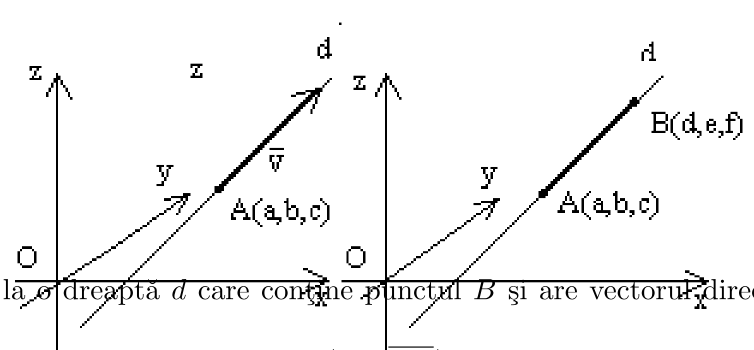
$$(d) : \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q}. = \frac{z-c}{r}.$$

Ecuaţiile parametrice ale aceleiaşi drepte sunt:

$$(d) : \begin{cases} x = & a+ & pt \\ y = & b+ & qt \\ z = & c+ & rt \end{cases}, \quad t \in I\!R.$$

Ecuaţiile canonice ale unei drepte determinate de punctele $A(a, b, c)$ şi $B(d, e, f)$ sunt:

$$(d) : \frac{x-a}{d-a} = \frac{y-b}{e-b}. = \frac{z-c}{f-c}.$$



Distanţa de la un punct A la o dreaptă d care conţine punctul B şi are vectorul director $\bar{a}$, se calculează cu formula (6):

$$d(A, d) = \frac{|\bar{a} \times \overline{AB}|}{|\bar{a}|}.$$

Distanţa dintre dreptele neparalele d_1 (care conţine punctul A şi are ca vector director vectorul $\bar{a}_1$) şi d_2 (care conţine punctul B şi are ca vector director vectorul $\bar{a}_2$) este dată de formula:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \overline{AB}]\right|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|};$$

dacă $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, atunci $d(d_1, d_2) = 0$; dacă $d_1 \parallel d_2$ atunci:

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|\bar{a}_1 \times \overline{AB}\right|}{|\bar{a}_1|}$$

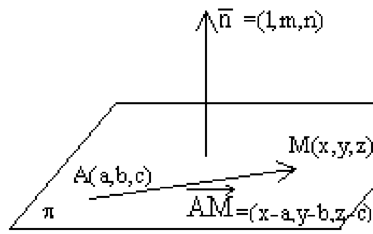
(propoziţia 5).

Din propoziţia 4 rezultă ecuaţia perpendicularei comune a două drepte:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_A) = 0 \\ \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_A) = 0 \end{cases}.$$

Un plan π care conţine un punct $A(a,b,c)$ şi are ca vector normal $\bar{n} = (l,m,n) \neq (0,0,0)$, are *ecuaţia carteziană*:

$$(\pi) : l(x-a) + m(y-b) + n(z-c) = 0.$$



Un plan π care conţine un punct $A(a,b,c)$ şi are ca vectori directori vectorii necoliniari $\bar{v}_1 = (l,m,n)$ şi $\bar{v}_2 = (l',m',n')$ are *ecuaţiile parametrice*:

$$\begin{cases} x = & a + ls + l't \\ y = & b + ms + m't \\ z = & c + ns + n't \end{cases}, s,t \in I\!R.$$

Prin eliminarea parametrilor $s,t \in I\!R$, se regăseşte ecuaţia carteziană a planului π sub forma:

$$(\pi) : n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-a) = 0,$$

unde:

$$(n_1,n_2,n_3) = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} =$$
$$= (mn' - nm', nl' - ln', lm' - ml').$$

Ecuaţia anterioară se poate scrie sub forma:

$$(\pi) : \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$(\pi) : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ l & m & n & 0 \\ l' & m' & n' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă planul π conţine punctele $A(a,b,c)$, $B(a',b',c')$ şi vectorul $\bar{v} = (l,m,n)$ (necoliniar cu vectorul $\overline{AB}$) este conţinut în subspaţiul director, atunci are ecuaţia

$$(\pi) : \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$(\pi) : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă planul π conţine punctele $A(a,b,c)$, $B(a',b',c')$ şi $C(a'',b'',c'')$, astfel că vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ sunt necoliniari, atunci ecuaţia planului este:

$$(\pi): \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a'-a & b'-b & c'-c \\ a''-a & b''-b & c''-c \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$(\pi): \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Două plane (neparalele) π şi π' se intersectează după o dreaptă d . Fie $(\pi) : lx+my+nz+p=0$ şi $(\pi') : l'x+m'y+n'z+p'=0$ ecuaţiile celor două plane, cu vectorii normali $\bar{n}=(l,m,n)$ şi $\bar{n}'=(l',m',n')$. Presupunerea că planele π şi π' nu sunt paralele este echivalentă cu oricare din condiţiile:

- vectorii $\bar{n}$ şi $\bar{n}'$ nu sunt coliniari;
- $rang \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2;$
- $\bar{n}\times\bar{n}' \neq \bar{0}.$

În condiţiile considerate, se obţin *ecuaţiile dreptei de intersecţie*:

$$(d): \begin{cases} lx+my+nz+p=0 \\ l'x+m'y+n'z+p'=0 \end{cases}.$$

Să remarcăm că un vector director al dreptei d este vectorul $\bar{a}=\bar{n}\times\bar{n}'$.

Ecuaţia unui plan π'' care conţine dreapta d este:

$$(\pi''): \alpha(lx+my+nz+p)+\beta(l'x+m'y+n'z+p')=0, \tag{8}$$

numită *ecuaţia fasciculului de plane* care conţine dreapta d. Într-adevăr, dacă π'' este un plan care conţine dreapta d, cu vectorul director $\bar{a}=\bar{n}\times\bar{n}'$, vectorul său normal $\bar{n}''=(l'',m'',n'')$ este perpendicular pe vectorul $\bar{a}$, la fel ca vectorii $\bar{n}=(l,m,n)$ şi $\bar{n}'=(l',m',n')$. Rezultă că $\bar{n}$, $\bar{n}'$ şi $\bar{n}''\in(\mathcal{L}(\{\bar{a}\}))^\perp$ ($(\mathcal{L}(\{\bar{a}\}))^\perp$ are dimensiunea 2); deoarece vectorii $\bar{n}$ şi $\bar{n}'$ sunt necoliniari, ei formează o bază în acest subspaţiu, deci $(\exists)\alpha,\beta\in I\!R$ astfel încât $\bar{n}''=\alpha\bar{n}+\beta\bar{n}'$. Rezultă că $l''=\alpha l+\beta l'$, $m''=\alpha m+\beta m'$ şi $n''=\alpha n+\beta n'$. Fie $A(a,b,c)\in d$. Au loc relaţiile $l(x-a)+m(y-b)+$ $+n(z-c)=0$, de unde $p=-la-mb-nc$; analog $p'=-l'a-m'b-n'c$ şi $p''=-l''a-m''b-n''c$. Deci are loc şi $p''=\alpha p+\beta p'$, de unde rezultă ecuaţia (8).

Distanţa de la un punct $A(a,b,c)$ la un plan de ecuaţie $(\pi): lx+my+nz+p=0$ este dată de

$$d(A,\pi)=\frac{|la+mb+nc+p|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

(formula (5)). Un alt mod de a deduce această formulă este acela de a determina mai întâi proiecţia punctului A pe planul π, punctul $A'=pr_\pi A$. Ecuaţiile parametrice ale dreptei d' care conţine pe A şi are ca vector director vectorul $n=l\bar{e}_1+m\bar{e}_2+n\bar{e}_3=(l,m,n)$ sunt:

$$\begin{cases} x=lt+a \\ y=mt+b \\ z=nt+c \end{cases}.$$

Punctul $A'(a',b',c')$ se găseşte la intersecţia dreptei d' şi a planului π, deci $a'=lt_0+a$, $b'=mt_0+b$, $c'=nt_0+c$, unde $l(lt_0+a)+m(mt_0+b)+n(nt_0++c)+p=0$, de unde $t_0=\dfrac{-la-mb-nc-p}{l^2+m^2+n^2}$. Rezultă $d(A,\pi)=|AA'|=$ $=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}=|t_0|\sqrt{l^2+m^2+n^2}==\dfrac{|la+mb+nc+p|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$

Perpendiculara comună d' a două drepte date se obţine ca dreaptă de intersecţie a două plane (propoziţia 4):

$$(d') : \begin{cases} \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_A) = 0 \\ \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_B) = 0 \end{cases} .$$

Astfel, dacă d_1 conţine punctul $A(a,b,c)$ şi are vectorul director $\bar{a}_1$, iar d_2 conţine punctul $B(a',b',c')$ şi are vectorul director $\bar{a}_2$, atunci $\bar{n}_1 = = \bar{a}_1 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2)\bar{a}_1 - (\bar{a}_1^2)\bar{a}_2 = (n_1^1, n_1^2, n_1^3)$, $\bar{n}_2 = \bar{a}_2 \times (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = = (\bar{a}_2^2)\bar{a}_1 - (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2)\bar{a}_2 = (n_2^1, n_2^2, n_2^3)$ şi ecuaţiile anterioare se scriu:

$$(d') : \begin{cases} n_1^1(x-a) + n_1^2(y-b) + n_1^3(z-c) = 0 \\ n_2^1(x-a') + n_2^2(y-b') + n_2^3(z-c') = 0 \end{cases} .$$

Vom studia în continuare izometriile spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$. Fie $(O, \mathcal{B})$ un reper al spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$.

Orice izometrie a lui $\mathcal{E}_3$ care păstrează orientarea se poate descompune sub forma (7), folosind unghiurile lui Euler. Aceasta arată că izometriile lui $\mathcal{E}_3$ care păstrează orientarea se pot descrie de cei trei parametri, ceea ce realizează o bijecţie între izometriile lui $\mathcal{E}_3$ care păstrează orientarea şi punctele sferei $S^3 \subset E_4$, centrată în origine şi de rază 1. În continuare vom studia forma canonică a unei izometrii, adică vom găsi un reper în care izometria să aibă o formă cât mai simplă.

Fie $\bar{v} \in E_3$ un vector, iar $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$. *Translaţia* de vector $\bar{v}$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ este transformarea $t_{\bar{v}} : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ de forma $t_{\bar{v}}(A) = A'$, unde $\overline{AA'} = \bar{v}$. Ecuaţiile translaţiei $t_{\bar{v}}$ sunt:

$$\begin{cases} x' = x + v^1 \\ y' = y + v^2 \\ z' = z + v^3 \end{cases} . \tag{I}$$

Să remarcăm că aplicaţia liniară indusă pe E_3 este 1_{E_3}, adică identitatea lui E_3.

Fie $O'(a,b,c) \in \mathcal{E}_3$ un punct. *Simetria centrală* (cu centrul în O') este transformarea $t_{\bar{v}} : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, unde $s_O(A) = A'$ fiind unicul punct pentru care O este mijlocul segmentului $[AA']$, adică $A' = 2O' - A$. Folosind coordonate, ecuaţiile simetriei $s_{O'}$ sunt:

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \\ z' = -z + 2c \end{cases} . \tag{II}$$

Să remarcăm că aplicaţia liniară indusă pe E_3 este -1_{E_3}.

Propoziţia 15 *Fie $f : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ o izometrie. Dacă f nu este translaţie ($\bar{f} \neq 1_{E_3}$) sau simetrie centrală ($\bar{f} \neq -1_{E_3}$), atunci există un reper ortonormat $(O', \mathcal{B}')$ în care f este dată prin:*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases} \tag{III}$$

(translaţie paralelă cu planul yOz compusă cu o simetrie faţă de acelaşi plan);

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases} , \tag{IV}$$

(translaţie în lungul axei $x'x$ compusă cu o simetrie faţă de aceaşi axă);

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases} , \alpha \in (0, 2\pi) \tag{V}$$

(simetrie faţă de planul yOz compusă cu o cu o rotaţie în jurul axei $x'x$);

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases} , \alpha \in (0, 2\pi) \tag{VI}$$

(translaţie în lungul axei $x'x$ compusă cu o rotaţie în jurul aceleiaşi axe).

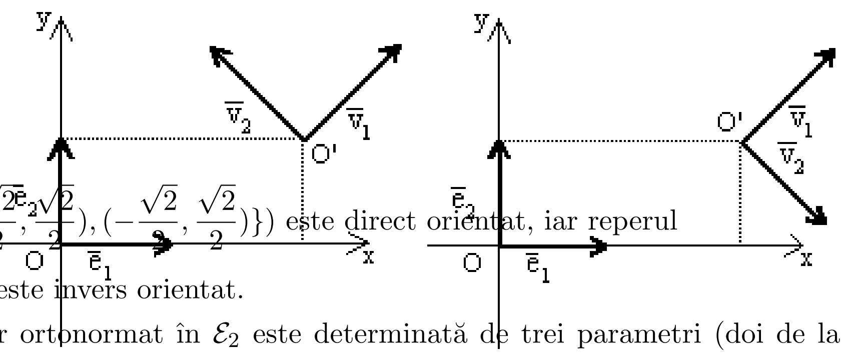
3 Planul euclidian bidimensional canonic

Din considerente analoge, planul euclidian $\mathcal{P}$ este un spaţiu punctual euclidian izomorf cu spaţiul punctual euclidian canonic pe $\mathcal{E}_2$. Dacă se consideră $O, E_1, E_2 \in \mathcal{P}$ astfel încât $OE_1 \perp OE_2$ şi lungimea segmentelor $[OE_1]$ şi $[OE_2]$ este 1, atunci $(\forall) A \in \mathcal{P}$, avem $\overline{OA} = a \cdot \overline{OE_1} + b \cdot \overline{OE_2}$, iar izomorfismul $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{E}_2$ se defineşte prin $\Phi(\overline{OA}) = (a, b)$.

În planul punctual euclidian $\mathcal{E}_2$ se poate considera reperul canonic $(O, \mathcal{B}_{can})$, unde O este originea $(0,0)$, iar $\mathcal{B}_{can} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\bar{e}_1 = (1,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1)$. Reperul canonic defineşte orientarea directă a planului punctual euclidian $\mathcal{E}_2$. Un reper euclidian în $\mathcal{E}_2$ este un dublet $(O', \mathcal{B})$, unde $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} \subset E_2$ este o bază ortonormată şi $O' \in \mathcal{E}_2$. Deoarece un vector unitar $\bar{n} \in E_2$ are forma $\bar{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, iar un vector $\bar{n}' \perp \bar{n}$ are forma $\pm(-\sin\varphi, \cos\varphi)$, rezultă că vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ pot fi:

$$\bar{v}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \bar{v}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \text{ dacă } (O', \mathcal{B}') \text{ este pozitiv orientată, pentru că } \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1;$$

$$\bar{v}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \bar{v}_2 = (\sin\varphi, -\cos\varphi), \text{ dacă } (O', \mathcal{B}') \text{ este negativ orientată, pentru că } \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -1.$$



De exemplu, reperul $((2,1), \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\})$ este direct orientat, iar reperul $((1,-1), \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\})$ este invers orientat.

Rezultă că o schimbare de reper ortonormat în $\mathcal{E}_2$ este determinată de trei parametri (doi de la schimbarea originii şi unul de la schimbarea bazei).

Ecuaţia dreptei determinate de un punct $A(a,b)$ şi vectorul director $\bar{v} = (p,q)$ este:

$$(d) : \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q},$$

sau

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ p & q & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia dreptei determinate de punctele $A(a,b)$ şi $B(c,d)$ este:

$$(d) : \frac{x-a}{c-a} = \frac{y-b}{d-b},$$

sau

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia dreptei determinate de un punct $A(a,b)$ şi vectorul normal $\bar{n} = (l,m)$ este:

$$(d) : l(x-a) + m(y-b) = 0.$$

Orientarea unei drepte este dată fie prin fixarea unui vector director $\bar{v}$ al dreptei, fie prin fixarea unui vector normal $\bar{n}$ al dreptei. Dacă vectorul normal $\bar{n}$ este dat, există un singur vector director unitar $\bar{v}$ astfel încât reperul $\{\bar{v}, \bar{n}\}$ este direct orientat. *Măsura unghiului* a două drepte d_1 şi d_2 orientate de vectorii directori (nenuli) $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ este măsura unghiului vectorilor $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$, adică este $\alpha \in [0, \pi]$ dat de $\cos\alpha = \dfrac{<\bar{a}_1, \bar{a}_2>}{|\bar{a}_1|\,|\bar{a}_2|} \in [-1, 1]$.

În cele ce urmează vom studia izometriile spaţiului euclidian $\mathcal{E}_2$. Am văzut (propoziţia 8) că o izometrie $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ este o aplicaţie afină. Mai mult, este un izomorfism afin. Dacă $(O, \mathcal{B})$ este un reper ortonormat, atunci aplicaţia liniară $\bar{f} : E_2 \to E_2$ indusă între spaţiile vectoriale euclidiene directoare este o izometrie, prin urmare matricea $[\bar{f}]_{\mathcal{B}}$ este o ortogonală, având una din formele:

1. $[\bar{f}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, când $\det \bar{f} = 1$, caz în care izometria f se numeşte de *speţa întâi* (sau *deplasare*) sau
2. $[\bar{f}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, când $\det \bar{f} = -1$, caz în care izometria f se numeşte de *speţa a doua* (sau *antideplasare*).

Propoziţia 16 *Fie o izometrie $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$.*

1. *Dacă f este o izometrie de speţa întâi, atunci:*
   (a) *dacă f nu are puncte fixe, atunci f este o translaţie: $\bar{f} = 1_{E_2}$ şi în orice reper ortonormat $(O', \mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$, f este dată prin*
   $$\begin{cases} x' = & x + a \\ y' = & y + b \end{cases}, \tag{9}$$
   unde $\bar{v} = a\bar{e}'_1 + b\bar{e}'_2$ este vectorul translaţiei;
   (b) *dacă f are puncte fixe, atunci are un singur punct fix O', fiind o rotaţie cu centrul în O' şi în orice reper ortonormat $(O', \mathcal{B}')$, cu centrul în O', f este dată prin*
   $$\begin{cases} x' = & x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = & x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}, \tag{10}$$
   unde $\alpha \in [0, 2\pi)$ este unghiul de rotaţie.
2. *Dacă f este o izometrie de speţa a doua, atunci există un reper ortonormat $(O', \mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$, în care f este dată prin*
   $$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & y + b \end{cases}, \tag{11}$$
   adică f este o simetrie (faţă de dreapta care trece prin O' şi are $\bar{v}'_2$ ca vector director), compusă cu o translaţie (de vector $b\bar{v}'_2$).

Să remarcăm că o izometrie de speţa a doua dată prin (11) are puncte fixe dacă şi numai dacă $b = 0$, caz în care orice punct al axei de simetrie este punct fix (deci există o infinitate de puncte fixe).

4 Hipersuprafeţe de ordinul al doilea în spaţii euclidiene reale

4.1 Hipercuadrice

Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu vectorial euclidian real de dimensiune n, cu spaţiul vectorial director V şi $(O; \mathcal{B})$ un reper euclidian.

Mulţimea $\mathcal{H}$ a punctelor $M(x^1, \ldots, x^n)$ ale căror coordonate verifică o ecuaţie de tipul

$$(\mathcal{H}) : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x^i + c = 0, \tag{12}$$

unde $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, $c \in I\!R$, $(\forall) i, j = \overline{1, n}$, se numeşte *hiprcuadrică* în $\mathcal{E}$. În cele ce urmează vom considera doar cazul $\mathcal{H} \neq \emptyset$ (cu excepţia situaţiei când vom face clasificarea hipercuadricelor). Notăm membrul stâng al ecuaţiei (12) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j + 2 \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x^i + c \equiv F(x^1, \ldots, x^n)$. Ceficienţii polinomiali ai lui F se numesc *coeficienţii hipercuadricei.*

În cazul $n = 2$, hipercuadricele sunt curbe şi se numesc *conice*, iar în cazul $n = 3$ hipercuadricele sunt suprafeţe şi se numesc *cuadrice*.

Ecuaţia (12) se poate scrie matricial în două moduri. Dacă se notează $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(I\!R)$, $b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$, $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$, atunci ecuaţia (12) devine:

$$(\mathcal{H}) : X^t \cdot A \cdot X + 2X^t \cdot b + c = 0, \tag{13}$$

sau

$$(\mathcal{H}) : \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{14}$$

Fie $(O; \mathcal{B})$ şi $(O'; \mathcal{B}')$ două repere euclidiene şi fie $\begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea schimbării de coordonate. Avem:

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Ecuaţia (14) devine $\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, de unde rezultă că

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ (b')^t & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

adică $\begin{pmatrix} A' & b' \\ (b')^t & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^t A P & P^t A p + P^t b \\ p^t A P + b^t P & p^t A p + 2p^t b + c \end{pmatrix}$. De aici rezultă următoarele reguli de schimbare a coeficienţilor hipercuadricei:

$$\begin{aligned} A' &= P^t A P, \\ b' &= P^t A p + P^t b, \\ c' &= p^t A p + 2p^t b + c. \end{aligned} \tag{17}$$

Se notează $\delta = \det A$ şi $\Delta = \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$. Avem $A' = P^t A P$, deci $\delta' = \det A' = \det(P^t A P) = (\det P^t)(\det A)(\det P) = (\det A)(\det P)^2 = = \delta (\det P)^2$, deci

$$\delta' = \delta (\det P)^2.$$

Analog, avem $\Delta' = \det \begin{pmatrix} A' & b' \\ (b')^t & c' \end{pmatrix} =$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\det \begin{pmatrix} P & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} = (\det P)^2 \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} = = (\det P)^2 \Delta, \text{ deci}$$

$$\Delta' = \Delta \left(\det P \right)^2.$$

Dar dacă schimbările de reper sunt ortogonale, avem $(\det P)^2 = 1$, deoarece $P^t P = I_n$. Rezultă că

$$\delta' = \delta \text{şi } \Delta' = \Delta,$$

deci numerele δ şi Δ nu depind de reperul ortonormat ales. Dacă ecuaţia hipercuadricei se scrie $-F(x^1, \ldots, x^n) = 0$, atunci $\delta' = (-1)^n \delta$ şi $\Delta' = (-1)^{n+1}\Delta$, deci semnul lui δ sau Δ se poate schimba, dar faptul că δ sau Δ sunt sau nu sunt nule, nu depinde de ecuaţia considerată sau de reperul ortonormat ales. Anularea lui δ sau Δ este importantă pentru că oferă informaţii privitoare la hipercuadrică. Astfel, dacă $\delta \neq 0$, hipercuadrica *are centru unic*, iar dacă $\delta = 0$, hipercuadrica *nu are centru unic*; dacă $\Delta \neq 0$, hipercuadrica este *nedegenerată*, iar dacă $\delta = 0$, hipercuadrica este *degenerată*.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ atunci:

- valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricii A sunt rădăcinile ecuaţiei $\det(A - \lambda I_n) = 0$;
- un vector propriu al matricii A este o matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$ pentru care există o valoare (proprie) $\lambda \in I\!R$ astfel încât $AX = \lambda X$.

Dacă V este spaţiu vectorial euclidian, $\mathcal{B} \subset V$ este o bază ortonormată şi $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ este o matrice simetrică asociată unei forme biliniare pe V, atunci se pot considera

- un endomorfism simetric $f : V \to V$, care în baza $\mathcal{B}$ are matricea $[f]_{\mathcal{B}} = A$ şi
- o formă biliniară simetrică $b : V \times V \to I\!R$, care în baza $\mathcal{B}$ are matricea $[b]_{\mathcal{B}} = A$.

Dacă $\mathcal{B}'$ este o altă bază ortonormată, atunci matricea de trecere $P = [\mathcal{B}, \mathcal{B}']$ este o matrice ortogonală (adică $P^{-1} = P^t$). Rezultă că $[f]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}AP = P^t AP = [b]_{\mathcal{B}'}$, deci endomorfismul simetric f şi forma biliniară simetrică b au aceeaşi matrice în orice bază ortonormată. Deoarece toate valorile proprii ale endomorfismului f sunt reale şi vectorii proprii corespunzători pot forma o bază a lui $\mathcal{B}$ în care matricea endomorfismului f este diagonală, rezultă că aceleaşi proprietăţi le are şi forma biliniară simetrică asociată. Rezultă că pentru o formă biliniară simetrică:

- valorile proprii ale matricii simetrice asociate sunt toate reale şi
- există o bază ortogonală a spaţiului euclidian V în care matricea asociată este diagonală.

Vectorii proprii ai matricii A sunt numiţi *direcţii principale* ale hipercuadricei $\mathcal{H}$.

Vom studia în continuare intersecţia unei hipercuadrice cu o dreaptă.

Fie $P_0(x_0^1, \ldots, x_0^n) \in \mathcal{E}$ şi vectorul $\bar{v}_0$ astfel că $[\bar{v}_0]_{\mathcal{B}} = V_0$. Fie $X = X_0 + tV_0$ ecuaţia parametrică a dreptei d care conţine punctul P_0 şi are ca vector director vectorul $\bar{v}_0 \neq \bar{0}$; $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$.

Intersecţia dreptei d cu hipercuadrica, ţinând seama de ecuaţia (14), conduce la

$$\begin{pmatrix} X_0 + tV_0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 + tV_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ sau:}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} X_0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+t \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} V_0 \\ 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ sau}$$

$$X_0^t A X_0 + 2b^t X_0 + c + 2t(X_0^t A V_0 + b^t V_0) + t^2 V_0^t A V_0 = 0. \tag{18}$$

Vectorii $\bar{v}_0$, cu $[\bar{v}_0]_{\mathcal{B}} = V_0$, pentru care $V_0^t A V_0 = 0$ definesc *direcţiile asimptotice* ale hipercuadricei. Dacă $\bar{v} = (v^1, \ldots, v^n) \in V$ defineşte o direcţie asimptotică, atunci spunem că hiperplanul dat prin

$$v^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial F}{\partial x^n} = 0$$

este *conjugat* cu direcţia asimptotică $\bar{v}$.

Dacă punctul P_0 aparţine hipercuadricei ($X_0^t A X_0 + 2b^t X_0 + c = 0$), atunci dreapta d este *tangentă* hipercuadricei dacă ecuaţia de gradul doi în t (18) are rădăcinile $t_1 = t_2 = 0$, adică $X_0^t A V_0 + b^t V_0 = 0$. Fie $P(x^1, \ldots, x^n)$ un punct oarecare al unei drepte tangente, corespunzător lui $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = X_0 + tV_0$. Atunci din relaţia $X_0^t A X_0 + 2b^t X_0 + c = 0$ adunată cu relaţia $X_0^t A V_0 + b^t V_0 = 0$ înmulţită cu t, rezultă $X_0^t A(X_0 + tV_0) + b^t(2X_0 + tV_0) + c = 0$, sau

$$X_0^t A X + b^t(X_0 + X) + c = 0,$$

sau:

$$(\mathcal{H}_0) : \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x^i x_0^i + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}(x^i x_0^j + x^j x_0^i) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x^i + x_0^i) + c = 0.$$

Punctul $P_0 \in \mathcal{H}$ fiind dat, ecuaţia de mai sus reprezintă ecuaţia unui hiperplan care conţine pe P_0, numit *hiperplan tangent la hipercuadrică* în P_0. Ecuaţia sa se obţine prin *dedublarea* ecuaţiei hipercuadricei. Hiperplanul tangent într-un punct la o hipercuadrică este format aşadar din reunirea tuturor dreptelor tangente la hipercuadrică, care trec prin acel punct.

Un punct P_0 se spune că este *centru de simetrie* al hipercuadricei dacă există două puncte $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ astfel încât P_0 este mijlocul segmentului $[A_1 A_2]$.

Propoziţia 17 *Fie $\mathcal{H}$ o hipercuadrică a cărei ecuaţie este (13).*
Un punct P_0 este centru al hipercuadricei dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică sistemul de ecuaţii liniare

$$AX_0 + b = 0_n. \tag{19}$$

Coordonatele centrului de simetrie se obţin aşadar din sistemul:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j + b_i = 0, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^n) = 0, i = \overline{1,n} \Leftrightarrow \tag{21}$$

$$AX + b = 0_n. \tag{22}$$

Hipercuadricele pentru care $\delta = \det A \neq 0$ au aşadar un centru unic, existenţa centrului nedepinzând de sistemul de coordonate ales.

Hipercuadricele pentru care $\delta = \det A = 0$ nu au centru unic; pot exista o infinitate de centre (dacă sistemul de ecuaţii (19) este compatibil) sau nu există nici un centru (dacă sistemul de ecuaţii (19) este incompatibil).

Propoziţia 18 *Există un reper ortonormat $(O'; \mathcal{B}')$, unde baza $\mathcal{B}' \subset V$ este formată din vectori care dau direcţii principale, corespunzătoare valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricii A, astfel că ecuaţia hipercuadricei $\mathcal{H}$ are una din formele:*

1. $\lambda_1 \left(y^1\right)^2 + \cdots + \lambda_r \left(y^r\right)^2 + c' = 0$;
2. $\lambda_1 \left(y^1\right)^2 + \cdots + \lambda_r \left(y^r\right)^2 + 2b' y^{r+1} = 0$, *unde* $\lambda_1 \cdots \lambda_r \neq 0$ *şi* $b' \neq 0$.

Observaţii.

1. În cazul când hipercuadrica are un centru, se poate lua O' acel centru şi termenii de gradul întâi nu mai apar în forma canonică. Dacă cel puţin o valoare proprie $\lambda_{i_0} = 0$ şi $b'_{i_0} \neq 0$, atunci hipercuadrica nu are nici un centru şi termenul liber nu apare în forma canonică.

2. Am văzut (propoziţia 20) că rangurile $r = rang\ A$ şi $r' = rang \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$ sunt invarianţi izometrici, adică sunt aceeaşi în orice reper ortonormat. Din formele canonice de mai sus, rezultă că între r şi r' pot exista numai următoarele relaţii: $r = r'$, $r' = r + 1$ sau $r' = r + 2$.

3. Să considerăm subspaţiul afin al lui $\mathcal{E}$ care trece prin O' şi are ca subspaţiu director subspaţiul vectorial al lui V generat de vectorii:

$\{\bar{v}'_1, \ldots, \bar{v}'_r\}$, dacă ecuaţia hipercuadricii poate avea forma 1. din propoziţia 18 (avem $c' = 0 \Leftrightarrow r' = r$ şi $c' \neq 0 \Leftrightarrow r' = r + 1$);

$\{\bar{v}'_1, \ldots, \bar{v}'_{r+1}\}$, dacă ecuaţia hipercuadricii poate avea forma 2. din propoziţia 18 $\Leftrightarrow r' = r + 2$.

Prin restricţie la acest subspaţiu afin, hipercuadrica defineşte o nouă hipercuadrică. Dimensiunea p a acestui subspaţiu ($p = n - r$, dacă are loc forma 1., sau $p = n - r - 1$, dacă are loc forma 2. pentru ecuaţia hipercuadricii), se mai numeşte *indicele cilindric* al hipercuadricei $\mathcal{H}$. Prin urmare are loc următorul rezultat.

Propoziţia 19 *Dacă p este indicele cilindric al unei hipercuadrice $\mathcal{H}$, atunci există două subspaţii afine $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0^\perp \subset \mathcal{E}$, cu subspaţiile directoare ortogonale şi complementare de dimensiuni p şi respectiv $n-p$, astfel că restricţia lui $\mathcal{H}$ la $\mathcal{E}_0$ este o hipercuadrică $\mathcal{H}_0$, iar restricţia lui $\mathcal{H}$ la $\mathcal{E}_0^\perp$ este sau mulţimea vidă (dacă $\mathcal{H}_0 = \emptyset$) sau întreg $\mathcal{E}_0^\perp$ (dacă $\mathcal{H}_0 \neq \emptyset$).*

De exemplu, în $\mathcal{E}^3$, pentru hipercuadricele $(\mathcal{H}_1) : (x^1)^2 + (x^2)^2 + 1 = 0$ şi $(\mathcal{H}_2) : (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0$ se poate lua $(\mathcal{E}_0) : x^3 = 0$ şi $(\mathcal{E}_0^\perp) : x^1 = x^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Restricţiile lui $\mathcal{H}_1$ la $\mathcal{E}_0$ şi $\mathcal{E}_0^\perp$ sunt mulţimea vidă; restricţia lui $\mathcal{H}_2$ la $\mathcal{E}_0$ este un cerc, iar restricţia la $\mathcal{E}_0^\perp$ este $\mathcal{E}_0^\perp$.

Să notăm că pentru o hipercuadrică nevidă nedegenerată ($\Delta \neq 0$), sau degenerată şi cu centru unic ($\Delta = 0$, $\delta \neq 0$), $\mathcal{E}_0$ este un punct.

O mărime sau o proprietate se numeşte *invariant euclidian* al hipercuadricei date $\mathcal{H}$ dacă mărimea sau proprietatea nu depinde de reperul considerat. De exemplu, mărimile δ şi Δ sunt invarianţi euclidieni.

Anumite mărimi sau proprietăţi ale hipercuadricei sunt invariate numai de anumite schimbări de repere euclidiene; acestea se numesc *seminvarianţi euclidieni.* De exemplu, la o schimbare de reper $(O; \mathcal{B}) \to (O; \mathcal{B}')$ (numită schimbare de reper centroafină, sau central afină), termenul liber din ecuaţia hipercuadricei nu se schimbă, prin urmare termenul liber este un semiinvariant euclidian (la schimbările de reper centroafine). La fel, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j$ din ecuaţia hipercuadricei rămâne neschimbată la o schimbare de reper de forma $(O; \mathcal{B}) \to (O'; \mathcal{B})$, numită *translaţie de reper.* Cum orice reper afin (euclidian) se poate obţine printr-o schimbare centroafină de reper, urmată de o translaţie de reper, rezultă că semiinvarianţii euclidieni comuni acestor două tipuri de schimbări de reper sunt invarianţii euclidieni.

Observaţie. Suma $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j$ din ecuaţia hipercuadricei (12) defineşte o formă biliniară pe spaţiul vectorial director, pe care o notăm $b_{\mathcal{H}}$ (vezi (17)). Dacă ecuaţia $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$ se înlocuieşte cu ecuaţia $-F(x^1, \ldots, x^n) = 0$, atunci forma biliniară $b_{\mathcal{H}}$ se înlocuieşte cu forma biliniară $-b_{\mathcal{H}}$. Deducem astfel că forma biliniară $b_{\mathcal{H}}$ este determinată de hipercuadrică, abstracţie făcând de semn.

Propoziţia 20 *Există următorii invarianţi euclidieni pentru o hipercuadrică dată $\mathcal{H}$ de ecuaţie (12):*

- $r = rang\ A$ *şi* $r' = rang \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$;
- *indexul negativ şi indexul pozitiv al formei biliniare simetrice $b_{\mathcal{H}}$, asociate cuadricei $\mathcal{H}$;*
- δ *şi* Δ;
- *valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricii A, adică rădăcinile ecuaţiei caracteristice* $\det(A - \lambda I_n) = 0$ *(şi, implicit, coeficienţii polinomului caracteristic* $\det(A - \lambda I_n) = \delta - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\delta_{n-1}\lambda^{n-1} + +(-1)^n\lambda^n$*);*
- *subspaţiile proprii V_{λ_i}, $i = \overline{1, n}$, corespunzătoare valorilor proprii ale matricii A.*

Observaţie. Nu toţi invarianţii din enunţul propoziţiei (20) sunt independenţi unul de celălalt. De exemplu, numărul valorilor proprii pozitive (negative, nenule) ale matricii A este egal cu indexul pozitiv (indexul negativ, respectiv rangul) formei biliniare.

Propoziţia 21 *Pentru o hipercuadrică $\mathcal{H}$, de ecuaţie (14), într-un reper ortonormat $(O; \mathcal{B})$:*

- *coeficienţii polinomului* $Q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$ *sunt semiinvarianţi euclidieni relativ la schimbările centroafine de reper;*
- *coeficienţii formei pătratice* $b_{\mathcal{H}}$ $([b]_{\mathcal{H}} = A)$ *sunt semiinvarianţi euclidieni relativ la translaţiile de reper;*
- *termenul liber al polinomului* $Q(\lambda) = \Delta_0 - \Delta_1\lambda + \Delta_2\lambda^2 - \cdots + (-1)^n\lambda^n$ *este* $\Delta_0 = \Delta$ *şi este un invariant euclidian;*
- *dacă* $\Delta_0 = \Delta_1 = \cdots = \Delta_{n-r-1} = 0$, $r \geq 0$, *atunci* Δ_{n-r} *şi indicele cilindric al hipercuadricei sunt invarianţi euclidieni.*

Se pot determina formele canonice ale ecuaţiei unei hipercuadrice, folosind invarianţii euclidieni.

Propoziţia 22 *Pentru o hipercuadrică* $\mathcal{H}$ *dată prin (14), există un reper* $(O'; \mathcal{B}')$ *în care ecuaţia hipercuadricei are una din formele:*

1. $\lambda_1(y^1)^2 + \cdots + \lambda_r(y^r)^2 + \dfrac{\Delta_{n-r}}{\delta_{n-r}} = 0$, *dacă indicele cilindric este* $n - r$ $(\Delta_0 = \Delta_1 = \cdots = \Delta_{n-r-1} = 0$ *şi* $\delta_0 = \delta_1 = \cdots = \delta_{n-r-1} = 0$, $\delta_{n-r} \neq 0)$;
2. $\lambda_1(y^1)^2 + \cdots + \lambda_r(y^r)^2 + 2\sqrt{\dfrac{\Delta_{n-r-1}}{-\delta_{n-r}}}y^{r+1} = 0$, *dacă indicele cilindric este* $n - r - 1$ $(\Delta_0 = \Delta_1 = \cdots = \Delta_{n-r-2} = 0$, $\Delta_{n-r-1} \neq 0$ *şi* $\delta_0 = \delta_1 = \cdots = \delta_{n-r-1} = 0$, $\delta_{n-r} \neq 0)$.

4.2 Conice

Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu punctual euclidian (real) de dimensiune doi. Hipercuadricele spaţiului $\mathcal{E}$ se numesc conice.
Fie $(O; \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ un reper euclidian în $\mathcal{E}$.
O *conică* Γ este, aşadar, mulţimea punctelor $M(x, y) \in \mathcal{E}$, ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(\Gamma) : F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + b_2y + c = 0, \tag{23}$$

unde a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, $c \in I\!R$.
Ecuaţia (23) se scrie matricial sub una din formele:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c = 0,$$

sau

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Propoziţia 23 *Pentru conica* Γ *definită de ecuaţia (23), există următorii invarianţi euclidieni:*

- $r = rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ *şi* $r' = rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$;
- *indexul negativ şi indexul pozitiv al formei biliniare simetrice* b_Γ *asociate;*
- $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ *şi* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$;
- λ_1, λ_2 *(valorile proprii ale matricii* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*);*
- *direcţiile definite de vectorii proprii ai matricii* A, *dacă* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Propoziţia 24 *O conică Γ dată de ecuaţia (23) are următorii semiinvarianţi euclidieni:*

- *coeficienţii polinomului* $Q(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} = = c\lambda^2 - K\lambda + \Delta$ *sunt invariaţi de schimbările centoafine de reper;*
- *matricea A este invariată de translaţiile de reper;*

Pentru conicele degenerate ($\Delta = 0$), K este un invariant euclidian.

Vom prezenta în continuare aducerea la formă canonică a ecuaţiei unei conice.

Fie conica $(\Gamma) : F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Forma pătratică asociată conicei este

$$p(\bar{v}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

unde $\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$, iar $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset V$ este o bază ortonormată. Avem $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A$.

Conica este de tip eliptic, parabolic ori hiperbolic, după cum $\delta > 0$, $\delta = 0$, ori $\delta < 0$, unde $\delta = \det A$.

Ecuaţia caracteristică este $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0$, care are rădăcinile λ_1 şi λ_2 (valorile proprii), întotdeauna reale. Avem $\delta = \lambda_1\lambda_2$.

Fie $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ versorii proprii corespunzători valorilor proprii λ_1, respectiv λ_2. Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$; dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ se pot alege perpendiculari în subspaţiul propriu corespunzător. Sistemele din care rezultă coordonatele vectorilor proprii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sunt de forma:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_j)\alpha + a_{12}\beta & = 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda_j)\beta & = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 & = 1 \end{cases},$$

$j = \overline{1,2}$. Dacă (α_1, β_1) şi (α_2, β_2) sunt soluţiile celor două sisteme, vectorii proprii sunt $\bar{v}_j = \alpha_j\bar{e}_1 + \beta_j\bar{e}_2$, $j = \overline{1,2}$. Fie schimbarea de reper

$(O; \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}) \to (O; \mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\})$. Avem $[\mathcal{B}, \mathcal{B}'] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = P$, care este matrice ortogonală. Din relaţia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, deducem că $x = \alpha_1x' + \alpha_2y'$ şi $y = \beta_1x' + \beta_2y'$. Prin înlocuirea în expresia formei pătratice p, se obţine $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, deci:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c = F_1(x', y').$$

-Dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, atunci:

$$F_1(x', y') = \lambda_1\left(x' + a'\right)^2 + \lambda_2\left(y' + b'\right)^2 + c'.$$

Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x' + a'$, $y'' = y' + b'$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a', -b')$ (considerat în reperul $(O; \mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O'; \mathcal{B}')$ ecuaţia conicei este:

$$F_2(x'', y'') \equiv \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + c' = 0.$$

-Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ şi $b_2' \neq 0$, avem

$$F_1(x', y') = \lambda_1\left(x' + a''\right)^2 + 2b_2'\left(y' + b''\right).$$

Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x' + a''$, $y'' = y' + b''$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a'', -b'')$ (considerat în reperul $(O; \mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O'; \mathcal{B}')$ ecuaţia conicei este:

$$F_2(x'', y'') \equiv \lambda_1(x'')^2 + 2b_2'y'' = 0.$$

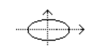
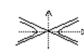
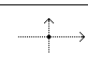
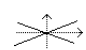
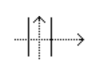
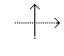
-Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ şi $b_2' = 0$, avem

$$F_1(x', y') = \lambda_1 \left(x' + a'''\right)^2 + c''.$$

Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x' + a'''$, $y'' = y'$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a''', 0)$ (considerat în reperul $(O; \mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O'; \mathcal{B}')$ ecuaţia conicei este:

$$F_2(x'', y'') \equiv \lambda_1 (x'')^2 + c'' = 0.$$

Următorul tabel sistematizează formele canonice ale conicelor.

	Ecuaţie (Γ) :	Denumire	Centru Degen	Semiin- varianţi	Figura
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Elipsă reală	Da Nu	$\Delta\lambda_i < 0$ $i = \overline{1,2}$	
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	Elipsă imaginară	- Nu	$\Delta\lambda_i > 0$ $i = \overline{1,2}$	$\emptyset$
3	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Hiperbolă	Da Nu	$\delta < 0$ $\Delta \neq 0$	
4	$\frac{x^2}{a^2} - 2y = 0$	Parabolă	Da Nu	$\delta = 0$ $\Delta \neq 0$	
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Punct dublu	Nu Nu	$\delta > 0,$ $\Delta = 0$	
6	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Drepte concurente	Nu Nu	$\delta < 0,$ $\Delta = 0$	
7	$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$	Drepte imaginare	- Da	$\Delta = 0$ $\delta = 0$ $K > 0$	$\emptyset$
8	$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$	Drepte paralele	Da Da	$\Delta = 0$ $\delta = 0$ $K < 0$	
9	$\frac{x^2}{a^2} = 0$	Drepte confundate	Da Da	$\Delta = 0$ $\delta = 0$ $K = 0$	

4.3 Cuadrice

Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu punctual euclidian (real) de dimensiune trei. Hipercuadricele spaţiului $\mathcal{E}$ se numesc *cuadrice*. Fie $(O; \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ un reper euclidian în $\mathcal{E}$.

O *cuadrică* Γ este, aşadar, mulţimea punctelor $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, ale căror coordonate verifică ecuaţia:

$$(\Gamma) : F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz +$$

$$+2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \tag{24}$$

unde a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}, b_1, b_2, b_3, $c \in I\!R$.

Ecuaţia (24) se scrie matricial sub una din formele:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + c = 0,$$

sau

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Demonstraţiile următoarelor două propoziţii sunt analoage cu cele din cazul conicelor.

Propoziţia 25 *Pentru cuadrica Γ definită de ecuaţia (24), există următorii invarianţi euclidieni:*

- $r = rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ *şi* $r' = rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}$;
- *indexul negativ şi indexul pozitiv al formei biliniare simetrice b_Γ asociate;*
- $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ *şi* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}$;
- λ_1, λ_2, λ_3 *(valorile proprii ale matricii* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$*);*
- *subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii ale matricii A, care sunt perpendiculare două câte două.*

Propoziţia 26 *Pentru cuadrica Γ definită de ecuaţia (24), există următorii semiinvarianţi euclidieni:*

- *coeficienţii polinomului* $Q(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} =$
  $= c\lambda^3 - L\lambda^2 + K\lambda - \Delta$ *sunt invariaţi de schimbările centroafine de reper;*
- *matricea A este invariată de translaţiile de reper.*

Pentru cuadricele degenerate ($\Delta = 0$), K este un invariant euclidian.
Dacă $\Delta = K = 0$, atunci L este, de asemenea, un invariant euclidian.

Vom prezenta în continuare aducerea la formă canonică a ecuaţiei unei cuadrice.
Fie cuadrica $(\Gamma) : F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + +2a_{13}xz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$.
Forma pătratică asociată cuadricei este

$$p(\bar{v}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz =$$
$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

unde $\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$, iar $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \subset V$ este o bază ortonormată. Avem $[p]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A$.

Ecuaţia caracteristică este $\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \delta_2\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta = 0$, care are rădăcinile λ_1, λ_2 şi λ_3 (valorile proprii), întotdeauna reale. Avem $\delta_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ şi $\delta = \det A$, unde $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $\delta_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$ şi $\delta_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Fie $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ şi $\bar{v}_3$ versorii proprii corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2, respectiv λ_3. Dacă λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt diferiţi doi câte doi, atunci versorii sunt perpendiculari doi câte doi; dacă valorile proprii nu sunt diferite, atunci versorii corespunzători aceleeaşi valori proprii se pot alege perpendiculari în subspaţiul propriu corespunzător. Sistemele din care rezultă coordonatele vectorilor proprii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ şi $\bar{v}_3$ sunt de forma:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_j)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma & = 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22}-\lambda_j)\beta + a_{23}\gamma & = 0 \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + (a_{33}-\lambda_j)\gamma & = 0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & = 1 \end{cases},$$

$j=\overline{1,3}$. Dacă $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j=\overline{1,3}$, sunt soluţiile celor trei sisteme, vectorii proprii sunt $\bar{v}_j = \alpha_j\bar{e}_1 + \beta_j\bar{e}_2 + \gamma_j\bar{e}_3$, $j=\overline{1,3}$. Fie schimbarea de reper $(O;\mathcal{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}) \to (O;\mathcal{B}'=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\})$. Avem $[\mathcal{B},\mathcal{B}'] = = P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, care este matrice ortogonală. Din relaţia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, deducem că $x = \alpha_1x' + \alpha_2y' + \alpha_3\gamma'$, $y = \beta_1x' + \beta_2y' + \beta_3z'$ şi $z = \gamma_1x' + \gamma_2y' + \gamma_3z'$. Prin înlocuirea în expresia formei pătratice p, se obţine $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + +2a_{13}xz = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2$, deci:

$$F_1(x',y',z') \equiv \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + 2b_3'z' + c = 0.$$

-Dacă $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, atunci:

$$F_1(x',y',z') = \lambda_1\left(x'+a'\right)^2 + \lambda_2\left(y'+b'\right)^2 + \lambda_2\left(z'+c'\right)^2 + d'.$$

Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x'+a'$, $y'' = y'+b'$, $z'' = z'+c'$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a', -b', -c')$ (considerat în reperul $(O;\mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O';\mathcal{B}')$ ecuaţia cuadricei este:

$$F_2(x'',y'',z'') \equiv \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + d' = 0.$$

-Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ şi $b_3' \neq 0$, atunci:

$$F_1(x',y',z') = \lambda_1\left(x'+a''\right)^2 + \lambda_2\left(y'+b''\right)^2 + 2b_3'\left(z'+c''\right).$$

Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x'+a''$, $y'' = y'+b''$, $z'' = z'+c''$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a'', -b'', -c'')$ (considerat în reperul $(O;\mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O';\mathcal{B}')$ ecuaţia cuadricei este:

$$F_2(x'',y'',z'') \equiv \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2b_3'z'' = 0.$$

-Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ şi $b_3' = 0$, atunci:

$$F_1(x',y',z') = \lambda_1(x'+a''')^2 + \lambda_2(y'+b''')^2 + c''$$

Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x'+a'''$, $y'' = y'+b'''$, $z'' = z'$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a''', -b''', 0)$ (considerat în reperul $(O;\mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O';\mathcal{B}')$ ecuaţia cuadricei este:

$$F_2(x'',y'',z'') \equiv \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + c'' = 0.$$

-Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi $(b_2')^2 + (b_3')^2 \neq 0$, atunci:

$$F_1(x',y',z') = \lambda_1\left(x'+a''\right)^2 + 2\rho\left(\frac{b_2'}{\rho}y' + \frac{b_3'}{\rho}z' + c''\right),$$

unde $\rho = \sqrt{(b_2')^2 + (b_3')^2}$. Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x'+a''$, $y'' = \frac{b_2'}{\rho}y' + \frac{b_3'}{\rho}z' + c''$, $z'' = \frac{-b_3'}{\rho}y' + \frac{b_2'}{\rho}z'$; se obţine un reper $(O';\mathcal{B}')$, în care ecuaţia cuadricei este:

$$F_2(x'',y'',z'') \equiv \lambda_1(x'')^2 + 2\rho y'' = 0.$$

-Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi $b'_2 = b'_3 = 0$, atunci:

$$F_1(x', y', z') = \lambda_1 \left(x' + a''\right)^2 + c''.$$

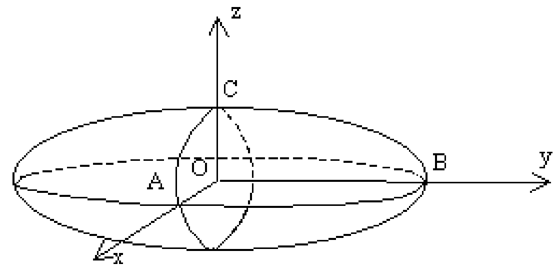
Fie schimbarea de coordonate dată prin $x'' = x' + a''$, $y'' = y'$, $z'' = z'$, care provine dintr-o translaţie de reper. Noul reper are originea în punctul $O'(-a'', 0, 0)$ (considerat în reperul $(O; \mathcal{B}')$). Rezultă că în reperul $(O'; \mathcal{B}')$ ecuaţia cuadricei este:

$$F_2(x'', y'', z'') \equiv \lambda_1 (x'')^2 + c'' = 0.$$

Următorul tabel sistematizează formele canonice ale cuadricelor.

	Ecuaţie (Γ) :	Denumire	Cen. Deg.	Semi-invarianţi
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Elipsoid real	Da Nu	$\Delta \cdot \lambda_i < 0$ $i = \overline{1,3}$
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	Elipsoid imaginar	- Nu	$\Delta \cdot \lambda_i > 0$ $i = \overline{1,3}$
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Hiprboloid cu o pânză	Da Nu	$\Delta \cdot \lambda_i :$ $+, -, -$
4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Hiprboloid cu două pânze	Da Nu	$\Delta \cdot \lambda_i :$ $+, +, -$
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	Paraboloid eliptic	Nu Nu	$\delta = 0, \Delta \neq 0$ $\lambda_1\lambda_2 > 0$
6	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	Paraboloid hiperbolic	Nu Nu	$\delta = 0,$ $\lambda_1\lambda_2 < 0$
7	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punct dublu	Da Da	$\Delta = 0,$ $\lambda_i > 0$
8	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Con pătratic	Da Da	$\Delta = 0,$ $\delta \neq 0$
9	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	Cilindru imaginar	- Da	$\Delta = \delta = 0,$ $K\lambda_1,$ $K\lambda_2 > 0$
10	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Cilindru eliptic	Da Da	$\Delta = \delta = 0,$ $K\lambda_1,$ $K\lambda_2 < 0$
11	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Cilindru hiperbolic	Da Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_1\lambda_2 < 0,$ $K \neq 0$
12	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Dreaptă dublă	Da Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_1\lambda_2 > 0$ $K = 0$
13	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Plane secante	Da Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_1\lambda_2 < 0$ $K = 0$
14	$x^2 - 2py = 0$	Cilindru parabolic	Nu Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_2, \lambda_3 = 0$ $K \neq 0$
15	$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$	Plane $i$maginare	- Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $K = 0, L > 0$
16	$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$	Plane paralele	Da Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $K = 0, L < 0$
17	$x^2 = 0$	Plan dublu	Da Da	$\Delta = \delta = 0,$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $K = L = 0$

Elipsoidul real are ecuaţia $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$



Numerele pozitive a, b, c se numesc *semiaxele elipsoidului*; dacă $a = b = c$, E defineşte o sferă cu centrul în originea reperului, de rază a.

Punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$ şi $C'(0, 0, -c)$ se numesc *vârfurile elipsoidului.*

Planele de coordonate sunt plane de simetrie, axele de coordonate sunt axe de simetrie, iar originea reperului este centru de simetrie pentru elipsoid.

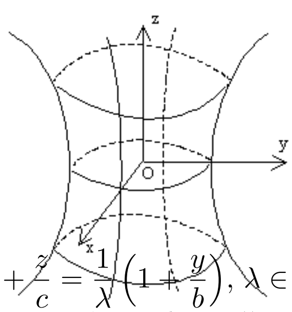
Intersecţia unui plan de coordonate cu elipsoidul este o elipsă; intersecţia unui plan, paralel cu un plan de coordonate, cu elipsoidul este o elipsă reală, un punct sau mulţimea vidă.

Hiperboloidul cu o pânză are ecuaţia $(H_1): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ şi $B'(0, -b, 0)$ se numesc *vârfurile hiperboloidului cu o pânză.*

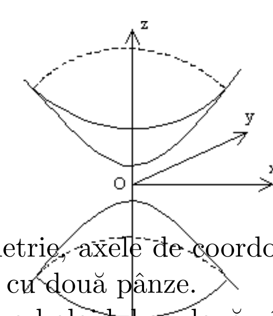
Planele de coordonate sunt plane de simetrie, axele de coordonate sunt axe de simetrie, iar originea reperului este centru de simetrie pentru hiperboloidul cu o pânză.

Intersecţia unui plan de coordonate cu hiperboloidul cu o pânză este o elipsă (xOy) sau hiperbolă $(xOz$ sau $yOz)$; intersecţia unui plan π, paralel cu un plan de coordonate, cu hiperboloidul cu o pânză este: o elipsă reală $(\pi \parallel xOy)$ sau o hiperbolă $(\pi \parallel xOz$ sau $\pi \parallel yOz)$.



Familiile de drepte $\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right)$, $\lambda \in I\!R^*$, sunt incluse în hiperboloidul cu o pânză, fiind generatoare rectilinii (prin fiecare punct trece câte o dreaptă a fiecărei familii).

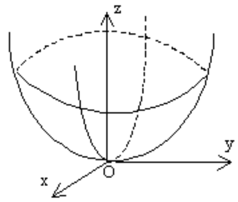
Hiperboloidul cu două pânze are ecuaţia $(H_2): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$



Planele de coordonate sunt plane de simetrie, axele de coordonate sunt axe de simetrie, iar originea reperului este centru de simetrie pentru hiperboloidul cu două pânze.

Intersecţia unui plan de coordonate cu hiperboloidul cu două pânze poate fi: mulţimea vidă (xOy) sau hiperbolă $(xOz$ sau $yOz)$; intersecţia unui plan π, paralel cu un plan de coordonate, cu hiperboloidul cu două pânze poate fi: o elipsă reală, un punct sau mulţimea vidă $(\pi \parallel xOy)$ sau o hiperbolă $(\pi \parallel xOz$ sau $\pi \parallel yOz)$.

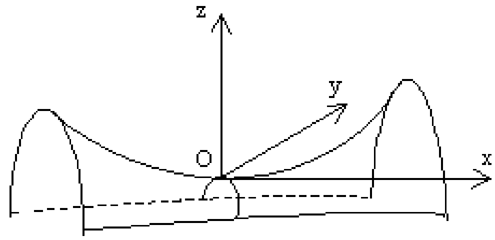
Paraboloid eliptic are ecuaţia $(PE): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2z = 0.$



Planele de coordonate xOz şi yOz sunt plane de simetrie, planul xOy este tangent în origine (în vârf) la paraboloidul eliptic, axa Oz este axă de simetrie.

Intersecţia unui plan de coordonate cu paraboloidul eliptic poate fi: un punct (xOy) sau o parabolă (xOz sau yOz); intersecţia unui plan π, paralel cu un plan de coordonate, cu paraboloidul eliptic poate fi: o elipsă reală, un punct sau mulţimea vidă ($\pi \parallel xOy$) sau o parabolă ($\pi \parallel xOz$ sau $\pi \parallel yOz$).

Paraboloidul hiperbolic are ecuaţia $(PH): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 2z = 0$.

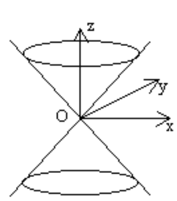


Planele de coordonate xOz şi yOz sunt plane de simetrie, planul xOy este tangent în origine (în vârf) la paraboloidul hiperbolic, axa Oz este axă de simetrie.

Intersecţia unui plan de coordonate cu paraboloidul hiperbolic poate fi: două drepte concurente (xOy) sau o parabolă (xOz sau yOz); intersecţia unui plan π, paralel cu un plan de coordonate, cu paraboloidul hiperbolic poate fi: o hiperbolă ($\pi \parallel xOy$) sau o parabolă ($\pi \parallel xOz$ sau $\pi \parallel yOz$).

Familiile de drepte $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \lambda$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{\lambda} z$, $\lambda \in I\!R^*$, sunt incluse în paraboloidul hiperbolic, fiind generatoare rectilinii (prin fiecare punct trece câte o dreaptă a fiecărei familii).

Conul pătratic are ecuaţia $(CP): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.



Planele de coordonate sunt plane de simetrie, axele de coordonate sunt axe de simetrie, iar originea reperului este centru de simetrie pentru conul pătratic (vârful conului).

Intersecţia unui plan de coordonate cu conul pătratic poate fi: un punct (xOy) sau două drepte concurente (xOz sau yOz); intersecţia unui plan π, paralel cu un plan de coordonate, cu conul pătratic poate fi: o elipsă ($\pi \parallel xOy$) sau o hiperbolă ($\pi \parallel xOz$ sau $\pi \parallel yOz$).

Familiile de drepte care trec prin vârf $\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = -\dfrac{y}{b}\lambda$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{y}{\lambda b}$, $\lambda \in I\!R^*$, sunt incluse în conul pătratic, fiind generatoare rectilinii.

Cilindrul eliptic, *cilindrul parabolic* şi *cilindrul hiperbolic* au ecuaţiile:

$$(CE): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (CP): y^2 - 2px = 0, \quad (CH): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$