1 SPAŢII VECTORIALE

Fie V o mulţime nevidă şi K un corp comutativ (câmp). O structură de *spaţiu vectorial* pe mulţimea V, peste corpul comutativ K, (un
K*-spaţiu vectorial*) este definită de un triplet $(V, +, \cdot_{sc})$, unde $(V, +)$ este un grup, iar $\cdot_{sc} : K \times V \to V$ este o lege de compoziţie externă, astfel că au loc proprietăţile:

(V1) $\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$, $(\forall)\alpha \in K$, $\bar{x}, \bar{y} \in V$;

(V2) $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$, $(\forall)\alpha, \beta \in K$, $\bar{x} \in V$;

(V3) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x})$, $(\forall)\alpha, \beta \in K$, $\bar{x} \in V$;

(V4) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$, $(\forall)\bar{x} \in V$.

Elementele mulţimii V se numesc *vectori*, legea de compoziţie internă ,,+" pe V se numeşte *adunarea vectorilor*, iar legea de compoziţie externă ,,·" pe V este numită *produs cu scalari.* .

Un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale ($K = I\!R$) se numeşte *spaţiu vectorial real*, iar un spaţiu vectorial peste corpul numerelor complexe ($K = \mathbb{C}$) se numeşte *spaţiu vectorial complex*. Orice spaţiu vectorial considerat în continuare va fi real sau complex, dacă nu va fi făcută altă specificaţie.

Doi vectori $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ pentru care există un scalar $\alpha \in K$ astfel încât $\bar{x} = \alpha\bar{y}$ sau $\bar{y} = \alpha\bar{x}$ se numesc *vectori coliniari.*

Dacă $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in V$ sunt vectori şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ sunt scalari, atunci se spune că vectorul $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i$ este o *combinaţie liniară* a vectorilor $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Astfel, de exemplu, dacă $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ şi α, $\beta \in K$, atunci vectorul $\bar{z} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\bar{x}$ şi $\bar{y}$.

Exemple

1. Fie $I\!R^2 = I\!R \times I\!R$ şi legile de compoziţie:

$$+ : I\!R^2 \times I\!R^2 \to I\!R^2, (x, y) + (a, b) \overset{def.}{=} (x + a, y + b), (\forall)(x, y), (a, b) \in I\!R^2,$$

$$\cdot : I\!R \times I\!R^2 \to I\!R^2, \alpha \cdot (x, y) \overset{def.}{=} (\alpha x, \alpha y), (\forall)\alpha \in I\!R, (x, y) \in I\!R^2.$$

Tripletul $(I\!R^2, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial, numit *spaţiul vectorial aritmetic* $I\!R^2$.

2. Pentru $n \in I\!N^*$,pe $I\!R^n = \underbrace{I\!R \times \cdots \times I\!R}_{\text{n ori}}$ se definesc legile de compoziţie:

$$+ : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R^n,$$

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) + (y^1, y^2, \ldots, y^n) \overset{def.}{=} (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n),$$

$$(\forall)(x^1, x^2, \ldots, x^n), (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in I\!R^n,$$

$$\cdot : I\!R \times I\!R^n \to I\!R^n, \alpha \cdot (x^1, x^2, \ldots, x^n) \overset{def.}{=} (\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots, \alpha x^n),$$

$$(\forall)\alpha \in I\!R, (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in I\!R^n.$$

Tripletul $(I\!R^n, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial real, numit *spaţiul vectorial aritmetic* $I\!R^n$.

3. Un caz particular important al exemplului de mai sus este
$n = 1$. Astfel, corpul real $(I\!R, +\cdot)$ este un spaţiu vectorial real, numit *spaţiul vectorial aritmetic* $I\!R$.

4. În general, dacă $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ, atunci $(K, +, \cdot)$ este un K-spaţiu vectorial.

5. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ şi $n \in I\!N^*$. Pe $K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{\text{n ori}}$ se definesc legile de compoziţie:

$$+ : K^n \times K^n \to K^n,$$

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) + (y^1, y^2, \ldots, y^n) \overset{def.}{=} (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n),$$

$$(\forall)(x^1, x^2, \ldots, x^n), (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in K^n,$$

$$\cdot : K \times K^n \to I\!R^n, \alpha \cdot (x^1, x^2, \ldots, x^n) \overset{def.}{=} (\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots, \alpha x^n),$$

$$(\forall)\alpha \in K, (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in K^n.$$

Tripletul $(K^n, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial peste corpul K.

6. Corpul complex $(\mathbb{C}, +\cdot)$ este un spaţiu vectorial complex, conform exemplului 4. de mai sus.

7. Se poate defini un spaţiu vectorial real $(\mathbb{C}, +\cdot_{I\!R})$, cu legile de compoziţie $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de adunare a numerelor complexe, şi $\cdot_{I\!R} : I\!R \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de înmulţire a numerelor reale cu numerele complexe: $\alpha \cdot (a + ib) = \alpha a + i\alpha b$. Să remarcăm că este important să fie specificat corpul peste care este definit un spaţiu vectorial.

8. Ca un caz particular al exemplului 5. este spaţiul vectorial complex $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$.

9. Fie $p, q \in I\!N^*$ şi $\mathcal{M}_{p,q}(K) = \{(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}} | a_{ij} \in K, (\forall) i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,q}\}$, mulţimea matricilor cu p linii şi q coloane, cu elemente din corpul comutativ K. Se consideră legile de compoziţie
$+ : \mathcal{M}_{p,q}(K) \times \mathcal{M}_{p,q}(K) \to \mathcal{M}_{p,q}(K)$,
$(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p}, \\ j=\overline{1,q}}} + (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p}, \\ j=\overline{1,q}}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p}, \\ j=\overline{1,q}}}$, de adunare a matricilor, şi
$\cdot_{sc} : K \times \mathcal{M}_{p,q}(K) \to \mathcal{M}_{p,q}(K)$, $\alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p}, \\ j=\overline{1,q}}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p}, \\ j=\overline{1,q}}}$, de înmulţire a matricilor cu scalari din K. Tripletul $(\mathcal{M}_{p,q}(K), +, \cdot_{sc})$ este un spaţiu vectorial peste corpul K.

10. Fie K un corp comutativ şi
$K[X] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots | a_n \in K,\ (\forall) n \in I\!N$ şi $(\exists) n' \in I\!N$ a.î. $a_n = 0,\ (\forall) n > n'\}$,
mulţimea polinoamelor în nedeterminata X, cu coeficienţii din K. Se consideră legile de compoziţie
$+ : K[X] \times K[X] \to K[X]$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$, de adunare a polinoamelor şi $\cdot_{sc} : K \times K[X] \to K[X]$,
$\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) X^n$, de înmulţire a polinoamelor cu scalari din K.
Tripletul $(K[X], +, \cdot_{sc})$ este un spaţiu vectorial peste corpul K.

11. Fie M o mulţime şi V un K-spaţiu vectorial. Atunci mulţimea $F(M, V) = \{f : M \to V\}$, a funcţiilor cu domeniul M şi codomeniul V, cu legile de compoziţie $+ : F(M, V) \times F(M, V) \to F(M, V)$ şi
$\cdot : K \times F(M, V) \to F(M, V)$, definite prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ şi $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, $(\forall) f, g \in F(M, V)$, $\alpha \in K$, $x \in M$, este un K-spaţiu vectorial.

Fie un K-spaţiu vectorial $(V, +, \cdot)$. Sunt adevărate următoarele proprietăţi:

1. $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$, $(\forall) \bar{x} \in V$.
2. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$, $(\forall) \alpha \in K$.
3. Dacă $\alpha \in K$ şi $\bar{x} \in V$ sunt astfel încât $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{0}$, atunci $\alpha = 0$ sau $\bar{x} = \bar{0}$.
4. Dacă $\alpha, \beta \in K$ şi $\bar{x}, \bar{y} \in V$:
5. Dacă $\alpha \cdot \bar{x} = \beta \cdot \bar{x}$ şi $\bar{x} \neq \bar{0}$, atunci $\alpha = \beta$;
6. Dacă $\alpha \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{y}$ şi $\alpha \neq 0$, atunci $\bar{x} = \bar{y}$.
7. $(-1) \cdot \bar{x} = -\bar{x}$, $(\forall) \bar{x} \in V$.
8. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$, $(\forall) \bar{x}, \bar{y} \in V$, adică grupul $(V, +)$ este un grup comutativ.

2 Subspaţii vectoriale

Fie V un K-spaţiu vectorial. Un *subspaţiu vectorial* al lui V este o submulţime nevidă $W \subset V$ care are proprietatea că pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in W$ şi $\alpha \in K$ rezultă $\bar{x} + \bar{y}$, $\alpha \cdot \bar{x} \in W$.

Orice K-spaţiu vectorial V conţine ca subspaţii vectoriale pe el însuşi $(V \subset V)$ şi subspaţiul nul $\{\bar{0}\} \subset V$, care conţine numai vectorul nul. Acestea se numesc *subspaţii vectoriale improprii.* Celelalte subspaţii vectoriale se numec *proprii.* Aşadar, un subspaţiu vectorial W este propriu dacă conţine un vector nenul $((\exists) \bar{x} \in W \backslash \{\bar{0}\})$ şi există un vector V neconţinut în subspaţiul W $((\exists) \bar{y} \in V \backslash W)$.

Se observă că din condiţia că submulţimea $W \subset V$ este un subspaţiu vectorial, rezultă că $W + W \subset W$ şi $K \cdot W \subset W$, unde am notat
$W + W = \{\bar{w}_1 + \bar{w}_2 | \bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W\}$ şi $K \cdot W = \{\alpha \cdot \bar{w} | \alpha \in K,\ \bar{w} \in W\}$. Rezultă că restricţiile celor două operaţii la W definesc aplicaţiile induse $+ : W \times W \to W$ şi $\cdot : K \times W \to W$.

Propoziţia 1 *Fie V un K-spaţiu vectorial. Atunci $W \subset V$ este un subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară de două elemente ale lui W este în W, mai precis, dacă*
$\bar{w}_1,\ \bar{w}_2 \in W$ şi $\alpha_1,\ \alpha_2 \in K$, atunci $\alpha_1 \bar{w}_1 + \alpha_2 \bar{w}_2 \in W$.

Un subspaţiu vectorial este la rândul său ub spaţiu vectorial.

Propoziţia 2 *Dacă V este un K-spaţiu vectorial, atunci orice subspaţiu vectorial $W \subset V$ este la rândul său un K-spaţiu vectorial cu operaţiile induse de pe V.*

Exemple.

1. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $\bar{x} \in V$. Atunci submulţimea $\mathcal{V}_{\bar{x}} = \{\alpha \cdot \bar{x} | \alpha \in K\} \subset V$ este un subspaţiu vectorial. Dacă $\bar{x} \neq \bar{0}$, atunci $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ nu este spaţiu vectorial nul (pentru că îl conţine pe $\bar{x}$). Nu putem afirma însă, în general, că $\mathcal{V}_{\bar{x}} \subset V$ este un subspaţiu propriu, deoarece este posibil ca $\mathcal{V}_{\bar{x}} = V$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $K_n[X] \subset K[X]$ submulţimea polinoamelor cu elemente din K, care au gradul cel mult n (reaminitim că gradul unui polinom nenul $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ este cel mai mic număr $n' \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = 0$, $(\forall) n > n'$, iar gradul polinomului nul este $-\infty$).

Subspaţiul vectorial $K_n[X] \subset K[X]$ este propriu, deoarece conţine polinoamele constante nenule, care au gradul 0 (de exemplu, $f = 1 \in K_n[X]$), deci $K_n[X] \neq \{\bar{0}\}$, şi există polinomul $X^{n+1} \in K[X] \backslash K_n[X]$, deoarece are gradul $n+1$).

Propoziţia 3 *Intersecţia a două sau mai multe subspaţii vectoriale ale unui K-spaţiu vectorial V este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Fie $M \subset V$ o submulţime a unui spaţiu vectorial. Fie $\mathcal{L}(M)$ intersecţia toturor subspaţiilor vectoriale care conţin pe M, adică

$$\mathcal{L}(M) = \bigcap_{\substack{M \subset W \subset V \\ W \text{ subspaţiu}}} W.$$

Din propoziţia 3 rezultă că $\mathcal{L}(M) \subset V$ este un subspaţiu vectorial, care se numeşte *subspaţiul vectorial generat* de mulţimea M. Să remarcăm faptul că $M \subset \mathcal{L}(M)$, deoarece M este inclus în toate subspaţiile vectoriale care se intersectează pentru a se obţine $\mathcal{L}(M)$.

Definiţia subspaţiului vectorial generat de o mulţime este dificil de folosit în aplicaţii. De aceea, este util următorul rezultat, care exprimă concret forma elementelor lui $\mathcal{L}(M)$.

Propoziţia 4 *Fie V un spaţiu vectorial şi $M \subset V$ o submulţime a sa. Atunci $\mathcal{L}(M) = \{\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n | \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \in M,$
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K\}$ (adică subspaţiul vectorial generat de mulţimea M este format din mulţimea tuturor combinaţiilor liniare cu elemente din M şi scalari din K, numită* acoperirea liniară *a lui M).*

Aceasta arată că *subspaţiul liniar generat de o submulţime a unui spaţiu vectorial coincide cu acoperirea liniară a submulţimii.*

Se consideră spaţiul vectorial canonic $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ şi subspaţiile
$V_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $V_2 = \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Se observă că $V_1 \cup V_2 \subset \mathbb{R}^2$ *nu este un subspaţiu vectorial*, pentru că suma $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin V_1 \cup V_2$. Prin urmare reuniunea a două subspaţii vectoriale nu este, în general, un subspaţiu vectorial. În schimb, se poate demonstra rezultatul următor.

Propoziţia 5 *Fie V un K-spaţiu vectorial şi V_1, $V_2 \subset V$ sunt două subspaţii vectoriale. Atunci $V_1 + V_2 = \{\bar{x} + \bar{y} \mid \bar{x} \in V_1, \bar{y} \in V_2\}$ este un subspaţiu vectorial al lui V şi are loc egalitatea $V_1 + V_2 = \mathcal{L}(V_1 \cup V_2)$.*

Avem, în general, următorul rezultat.

Propoziţia 6 *Dacă M_1, $M_2 \subset V$ sunt două submulţimi ale spaţiului vectorial V, atunci $\mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(M_1 \cup M_2)$.*

Două subspaţii vectoriale V_1, $V_2 \subset V$ spunem că sunt *transverse* dacă $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$, adică dacă intersecţia lor este subspaţiul vectorial nul.

Dacă două subspaţii vectoriale V_1, $V_2 \subset V$ sunt transverse, atunci suma lor, $V_1 + V_2$, se notează $V_1 \oplus V_2$ şi se numeşte *sumă directă* a celor două subspaţii.

Propoziţia 7 *Fie două subspaţii vectoriale V_1, $V_2 \subset V$. Atunci sunt echivalente afirmaţiile:*

1. *V_1 şi V_2 sunt transverse;*
2. *$(\forall) \bar{v} \in V_1 + V_2$ se scrie în mod unic sub forma $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, cu $\bar{v}_1 \in V_1$ şi $\bar{v}_2 \in V_2$.*

Spunem că spaţiul vectorial V este *suma directă* a două subspaţii vectoriale V_1, $V_2 \subset V$, dacă $V = V_1 \oplus V_2$. În acest caz subspaţiile V_1 şi V_2 se spune că sunt *subspaţii suplimentare*.

Vom arăta în continuare că mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen poate fi privită ca un subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial de matrici coloană.

Un sistem liniar şi omogen, cu m ecuaţii şi n necunoscute, cu coeficienţii din corpul K, este un sistem de forma:

$$\begin{cases} a_{11} x^1 & + \cdots + & a_{1n} x^n & = & 0, \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} x^1 & + \cdots + & a_{mn} x^n & = & 0,. \end{cases} \tag{1}$$

unde $n, m \in I\!N^*$ şi $a_{ij} \in K$, $(\forall) i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Sistemul de mai sus se poate scrie matricial:

$$A \cdot X = 0_m, \tag{2}$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$,

$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ şi $0_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$.

O matrice $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ care verifică egalitatea (2) se numeşte *soluţie* a sistemului liniar şi omogen dat; notăm cu $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_{n,1}(K)$ mulţimea soluţiilor. După cum se ştie, mulţimea de matrici $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ este un K-spaţiu vectorial.

Propoziţia 8 *Submulţimea $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_{n,1}(K)$ a soluţiilor unui sistem liniar şi omogen de forma (2) este un subspaţiu vectorial al mulţimii matricilor coloană, $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.*

Exemplu. Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ -x & +y & -2z & = 0 \end{cases}$, care se scrie matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; soluţiile sunt de forma

$x = -\frac{5}{3}\alpha$, $y = \frac{1}{3}\alpha$, $z = \alpha$, $\alpha \in I\!R$, sau $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\alpha \\ \frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ în notaţie matricială. Rezultă că

$$\mathcal{S} = \left\{ X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\alpha \\ \frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R) | \alpha \in I\!R \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$$

este $\mathcal{L}(\{X_0\})$, subspaţiul generat de X_0, unde $X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fie două sisteme de ecuaţii liniare omogene cu acelaşi număr de necunoscute, scrise sub formă matricială: $A \cdot X = 0_m$ şi $A' \cdot Y = 0_{m'}$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $A' \in \mathcal{M}_{m',n}(K)$, $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. Să notăm cu $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subset \mathcal{M}_{n,1}(K)$ mulţimea soluţiilor celor două sisteme de ecuaţii şi să considerăm mulţimea soluţiilor $\mathcal{S}'' \subset \mathcal{M}_{n,1}(K)$ a sistemului liniar omogen $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot Z = 0_{m+m'}$, obţinut prin reunirea ecuaţiilor celor două sisteme. Atunci $\mathcal{S}'' = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$.

O submulţime $L \subset V$ a unui spaţiu vectorial V este o *subvarietate liniară* dacă există un subspaţiu vectorial $V' \subset V$, numit *subspaţiu vectorial director* al lui L şi un vector $\bar{x}_0 \in V$ astfel încât $L = \{\bar{x}_0\} + V$ $(= \{\bar{x}_0 + \bar{x} | \bar{x} \in V'\})$.

Exemplu. Fie mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi neomogen cu m ecuaţii şi n necunoscute, cu coeficienţii K:

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + & \cdots & +a_{n1}x^n & = & b_1 \\ \vdots \\ a_{1m}x^1 + & \cdots & +a_{nm}x^n & = & b_m \end{cases} \tag{3}$$

care se poate scrie matricial sub forma:

$$A \cdot X = b, \tag{4}$$

unde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K), \ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K),$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(K).$$

Prin scrierea matricială, mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare de m ecuaţii şi n necunoscute poate fi considerată ca o submulţime a mulţimii de matrici $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, (mulţimea matricilor cu n linii, unde n este numărul de necunoscute, şi o coloană, cu elemente din K).

Propoziţia 9 *Fie $A \cdot X = b$ un sistem compatibil de ecuaţii liniare, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ şi $b \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$.*
Atunci mulţimea soluţiilor sistemului dat este o subvarietate liniară a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, care are ca subspaţiu vectorial director subspaţiul vectorial al soluţiilor sistemului omogen asociat $A \cdot Z = 0_m$.

3 Sisteme de vectori

3.1 Dependenţă şi independenţă liniară

Fie V un K-spaţiu vectorial. O mulţime $S \subset V$ se numeşte *sistem de vectori.* Spunem că un sistem de vectori $S \subset V$ este *liniar independent* dacă din orice combinaţie liniară nulă cu elemente din S
($\alpha_1\bar{v}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{v}_n = \bar{0}$ cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ şi $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in S$) rezultă că toţi coeficienţii sunt nuli ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$).
Exemplu. Dacă $\bar{v} \in V \backslash \{\bar{0}\}$ este un vector nenul, atunci mulţimea $S = \{\bar{v}\}$ este liniar independentă, deoarece $\alpha \cdot \bar{v} = \bar{0}$, $\alpha \in K$ şi $\bar{v} \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

O mulţime $S \subset V$ se spune că este *liniar dependentă* dacă nu este liniar independentă. Aceasta revine la condiţia că există o combinaţie liniară nulă cu elemente din S, ai cărei coeficienţi nu sunt toţi nuli, adică există $\alpha_1\bar{v}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{v}_n = \bar{0}$ cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, nu toţi nuli, şi $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in S$.
Exemple.
1. O mulţime $S \subset V$ care conţine vectorul nul ($\bar{0} \in S$), este mulţime liniar dependentă, deoarece dacă $\bar{v} \in S$, atunci $0 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$, coeficienţii nefiind toţi nuli.
2. Dacă $\bar{v} \in V$ este un vector şi $\alpha \in K$ este un scalar, atunci mulţimea $S = \{\bar{v}, \alpha \cdot \bar{v}\}$ este liniar dependentă, deoarece $\alpha \cdot \bar{v} + (-1) \cdot (\alpha \cdot \bar{v}) = \bar{0}$, coeficienţii nefiind toţi nuli. Rezultă aşadar că doi vectori coliniari formează o mulţime liniar dependentă.

Propoziţia 10 *O mulţime de vectori $S \subset V$ este liniar dependentă dacă şi numai dacă unul dintre vectori este o combinaţie liniară a unui număr finit de vectori din S.*

Propoziţia 11 *Fie $S \subset V$ un sistem liniar independent. Atunci:*

1. *Dacă $S' \subset S$, atunci şi S' este liniar independent (adică orice subsistem al unui sistem liniar independent este tot liniar independent).*

2. *Dacă $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in S$ sunt diferiţi doi câte doi, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ şi $\bar{v} = \alpha_1\bar{v}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{v}_n$, atunci $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sunt unic determinaţi (adică coeficienţii prin care un vector este o combinaţie liniară a unor vectori liniar independenţi daţi, sunt deternminaţi în mod unic).*

Un sistem de vectori $S \subset V$ se spune că este *sistem de generatori* pentru V dacă acoperirea sa liniară coincide cu întreg spaţiul vectorial V, adică $\mathcal{L}(S) = V$.
Un sistem de vectori $\mathcal{B} \subset V$ se spune că este *bază* a spaţiului vectorial V dacă este liniar independent şi sistem de generatori pentru V.
Fie $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ o bază a lui V. Dacă $\bar{x} = \alpha^1\bar{v}_1 + \cdots \alpha^n\bar{v}_n$, atunci, cu propoziţia 11, coeficienţii $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ sunt unic determinaţi. Coeficienţii $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ se numesc *coordonatele* vectorului $\bar{x}$ în baza $\mathcal{B}$.
Exemple.
1. Fie $K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n \text{ ori}}$ şi K-spaţiul vectorial $(K^n, +, \cdot_{sc})$. Atunci $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset K^n$, unde

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

este o bază, numită *baza canonică* a spaţiului vectorial $(K^n, +, \cdot)$. Coordonatele unui vector $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n) = x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n$, în baza canonică, sunt $x^1, \ldots, x^n$.
2. Dacă corpul K are cel puţin $n+1$ elemente (de exemplu, K poate fi o mulţime infinită, cum este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $(K_n[X], +, \cdot_{sc})$ este K-spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n, atunci mulţimea de polinoame $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\} \subset K_n[X]$ formează o bază, numită *baza canonică.* Dacă $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K_n$, atunci coordonatele lui f în baza canonică sunt $a_0, \ldots, a_n$.

Propoziţia 12 *Dacă $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar independent, atunci $S \subset \mathcal{L}(S)$ este o bază a lui $\mathcal{L}(S)$.*

Propoziţia 13 *Fie $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ un sistem de vectori liniar independent, $\bar{x} = \alpha^1\bar{v}_1 + \alpha^2\bar{v}_2 + \cdots \alpha^n\bar{v}_n \in \mathcal{L}(S)$ şi $1 \leq k \leq n$. Fie sistemul de vectori $S' = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{k-1}, \bar{x}, \bar{v}_{k+1}, \ldots, \bar{v}_n\} \subset \mathcal{L}(S)$.*
Atunci sunt echivalente afirmaţiile:

1. *S' este un sistem de vectori liniar independent.*

2. *$\alpha^k \neq 0$.*

3. *$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S')$.*

Propoziţia 14 *Dacă $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar independent şi $S' = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k\} \subset \mathcal{L}(S)$ este de asemenea un sistem de vectori liniar independent, atunci $k \leq n$.*

Propoziţia 15 *Fie $S = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_p\} \subset V$ un sistem de generatori pentru V. Atunci există o bază $\mathcal{B} \subset V$ astfel că $\mathcal{B} \subset S$ (adică din orice sistem de generatori pentru V se poate extrage o bază a lui V).*

Propoziţia 16 *Orice spaţiu vectorial care admite un sistem finit de generatori admite o bază formată dintr-un număr finit de vectori.*

În general, se poate arăta că orice spaţiu vectorial admite o bază. Demonstraţia acestui fapt foloseşte cunoştinţe de matematică superioară (lema lui Zorn, echivalentă cu axioma alegerii).

Teorema 1 *(Teorema dimensiunii) Dacă $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ este o bază a lui V, atunci orice altă bază a lui V are acelaşi număr n de vectori.*

Numărul vectorilor dintr-o bază a lui V se numeşte *dimensiunea* lui V şi se notează cu $\dim_K V$, sau $\dim V$. Dacă $V = \{\bar{0}\}$, atunci se defineşte $\dim V = 0$. Un spaţiu vectorial care admite o bază finită se spune că este *finit dimensional.* Spaţiile vectoriale considerate în continuare sunt presupuse finit dimensionale.

Spaţiile vectoriale $(K^n, +, \cdot_{sc})$ şi $(K_n[X], +, \cdot_{sc})$ peste K au baze cu n, respectiv $n+1$ vectori, deci au dimensiunile $\dim K^n = n$ şi $\dim K_n[X] = n+1$.

Propoziţia 17 *Fie $W \subset V$ un subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial (finit dimensional) V. Atunci:*

1. *Orice bază a lui W se poate completa la o bază a lui V.*

2. *Există un subspaţiu vectorial $W' \subset V$ astfel încât $V = W \oplus W'$ (adică V este sumă directă a subspaţiilor vectoriale suplimentare W şi W').*

Propoziţia 18 *Dacă $\dim V = n$, atunci*

1. *orice sistem care conţine n vectori liniar independenţi formează o bază în V;*

2. *orice sistem de generatori care conţine n vectori formează o bază în V;*

3. *dacă $W \subset V$ este un subspaţiu vectorial, atunci $W = V$ dacă şi numai dacă $\dim W = n$.*

Propoziţia 19 *Fie $V_1, V_2 \subset V$ două subspaţii vectoriale (finit dimensionale) ale unui spaţiu vectorial V. Atunci:*

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2),$$

formulă cunoscută sub numele de formula dimensiunii *sau* formula lui Grassmann.

3.2 Rangul unui sistem de vectori

Dacă $M \subset V$ este un sistem de vectori din V, atunci *rangul* lui M este dimensiunea subspaţiului vectorial generat de M ($\operatorname{rang} M = \dim \mathcal{L}(M)$).

Propoziţia 20 *Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi fie sistemele de vectori: $C \subset \mathcal{M}_{m,1}(K)$, format din coloanele matricii A şi $L \subset \mathcal{M}_{1,n}(K)$, format din liniile matricii A. Au loc următoarele egalităţi între rangurile sistemelor de vectori C , L şi rangul matricii A:*

$$\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} L = \operatorname{rang} A,$$

rezultat cunoscut sub numele de formula rangului.

Propoziţia 21 *Fie $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\} \subset V$ un sistem finit de vectori din V şi $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ matricea coordonatelor vectorilor din $\mathcal{F}$ într-o bază oarecare $\mathcal{B} \subset V$, cu cordonatele scrise pe coloană. Atunci:*

1. *Rangul lui $\mathcal{F}$ este egal cu rangul matricii $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ (adică $\operatorname{rang} \mathcal{F} = \operatorname{rang} [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$).*

2. *Rangul matricii $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ este k ($\operatorname{rang} [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = k$) dacă şi numai dacă vectorii din $\mathcal{F}$ sunt liniar independenţi.*

3. *Rangul matricii* $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ *este strict mai mic decât* k *dacă şi numai dacă vectorii din* $\mathcal{F}$ *sunt liniar dependenţi.*

4. *Rangul matricii* $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ *este egal cu dimensiunea lui* V *(*$\text{rang } [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \dim V$*) dacă şi numai dacă vectorii din* $\mathcal{F}$ *formează o bază (adică* $\mathcal{F} \subset V$ *este o bază) a lui* V*.*

Exemplu.

Fie $\bar{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\bar{v}_1 = (-1, 1, 1)$ şi $\bar{v}_3 = (1, 1, -1) \in I\!R^3$. Matricea coordonatelor vectorilor este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, iar $\det A = -6$, prin urmare $\text{rang}A = 3$, deci $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset I\!R^3$ formează o bază.

Dată o bază $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$, fiecărui vector $\bar{x} \in V$ i se asociază o matrice coloană formată din cordonatele vectorului $\bar{x}$ în această bază:

$$V \ni \bar{x} \to [\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K), \text{ unde } \bar{x} = x^1\bar{v}_1 + \cdots + x^n\bar{v}_n.$$

Vom numi matricea $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$ *reprezentarea matricială* a vectorului $\bar{x}$ în baza $\mathcal{B}$.

Exemplu.

Fie baza $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1 = (1, -1, 2), \bar{v}_1 = (-1, 1, 1), \bar{v}_3 = (1, 1, -1)\} \subset I\!R^3$. Vectorul $\bar{x} = (2, 4, 1) \in I\!R^3$ se scrie sub forma $\bar{x} = 1 \cdot \bar{v}_1 + 2 \cdot \bar{v}_2 + 3 \cdot \bar{v}_3$. Reprezentarea matricială a lui $\bar{x}$ este $[\bar{x}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$.

Dacă $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n\} \subset V$ sunt două baze ale lui V, atunci *matricea de trecere* de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este, prin definiţie, matricea $A = (a^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $\bar{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i_j \bar{e}_i$, $n = \dim V$. Explicit, *cordonatele vectorilor din baza* $\mathcal{B}'$ *formează coloanele matricii* A. Notăm $A = [\mathcal{B}, \mathcal{B}']$.

Exemplu.

Fie baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0)\},\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset I\!R^3$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1 = (1, -1, 2), \bar{v}_2 = (-1, 1, 1), \bar{v}_3 = (1, 1, -1)\} \subset I\!R^3$ baza considerată în exemplele de mai sus. Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este matricea

$$[\mathcal{B}, \mathcal{B}'] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 22 *Fie* $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ *două baze. Pentru un vector* $\bar{x} \in V$*, între reprezentările sale matriciale în cele două baze şi matricea de trecere există relaţia:*

$$[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{B}, \mathcal{B}'] \cdot [\bar{x}]_{\mathcal{B}'}\ . \tag{5}$$

Dacă $n = \dim V$*,* $\mathcal{B} = \{\bar{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$*,* $\mathcal{B}' = \{\bar{f}_j\}_{j=\overline{1,n}}$*,* $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n =$ $= y^1\bar{f}_1 + \cdots + y^n\bar{f}_n$ *şi* $\bar{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^j_i \bar{f}_j$*,* $(\forall) i = \overline{1,n}$*, atunci:*

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Exemplu. Vectorul $\bar{x} = (2, 4, 1) \in I\!R^3$, are reprezentările matriciale $[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0),\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset I\!R^3$ şi $[\bar{x}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ în baza $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1 = (1, -1, 2),\ \bar{v}_2 = (-1, 1, 1), \bar{v}_3 = (1, 1, -1)\} \subset I\!R^3$. Matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este $[\mathcal{B}, \mathcal{B}'] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Într-adevăr, $[x]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{B}, \mathcal{B}'][x]_{\mathcal{B}'}$, pentru că $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Propoziţia 23 *Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n. Dacă $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sunt două baze ale sale, matricea de trecere $[\mathcal{B},\mathcal{B}']$, de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, este o matrice inversabilă, inversa sa fiind $[\mathcal{B}',\mathcal{B}]$. Reciproc, dacă $\mathcal{B}$ este o bază a lui V şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este o matrice inversabilă, atunci există o bază $\mathcal{B}'$ astfel încât $[\mathcal{B},\mathcal{B}'] = A$.*

Fiind dată o bază $\mathcal{B}$, să observăm că matricea unitate I_n poate fi considerată drept $I_n = [\mathcal{B},\mathcal{B}]$ (adică matricea de trecere care lasă baza neschimbată).

Propoziţia 24 *Fie $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ şi $\mathcal{B}''$ trei baze ale unui spaţie vectorial V. Atunci are loc egalitatea matricială:*

$$[\mathcal{B},\mathcal{B}'] \cdot [\mathcal{B}',\mathcal{B}''] = [\mathcal{B},\mathcal{B}''].$$

Dacă $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\} \subset V$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n\} \subset V$ sunt două baze ale unui spaţiu vectorial real V, atunci:

1. Dacă $\det[\mathcal{B},\mathcal{B}'] > 0$, atunci se spune că bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ sunt *la fel orientate*;

2. Dacă $\det[\mathcal{B},\mathcal{B}'] < 0$, atunci se spune că bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ sunt *invers orientate.*

Propoziţia 25 *Pe mulţimea tuturor bazelor unui spaţiu vectorial real V, relaţia „$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ dacă $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ sunt la fel orientate (adică $\det[\mathcal{B},\mathcal{B}'] > 0$)" este o relaţie de echivalenţă.*

Mulţimea tuturor bazelor se scrie ca reuniunea a două clase de echivalenţă; două baze din aceeaşi clasă sunt la fel orientate, iar două baze din clase diferite sunt invers orientate.

De exemplu, în $I\!R^2$, dacă se iau bazele $\mathcal{B}_0 = \{\bar{e}_1 = (1,0),\ \bar{e}_2 = (0,1)\}$ şi $\mathcal{B}_1 = \{\bar{f}_1 = (1,0),\ \bar{f}_2 = (0,-1)\}$, atunci cele două baze nu sunt echivalente, pentru că $[\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det[\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1] = -1$, deci $\mathcal{B}_0$ şi $\mathcal{B}_1$ determină două clase diferite.

3.3 Lema substituţiei

Propoziţia 26 *(Lema substituţiei) Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ o bază a unui K-spaţiu vectorial V, doi vectori $\bar{x}_0 = x_0^1\bar{e}_1 + \cdots + x_0^n\bar{e}_n \in V$ şi*
$\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n \in V$ şi un indice $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$. Atunci

1. *Mulţimea $\mathcal{B}' = \{\bar{e}_1,\ldots \bar{e}_{i_0-1},\bar{x}_0,\bar{e}_{i_0+1},\bar{e}_n\}$ este o bază a lui V dacă şi numai dacă $x_0^{i_0} \neq 0$.*

2. *Dacă $x_0^{i_0} \neq 0$ şi*
$\bar{x} = y^1\bar{e}_1 + \cdots + y^{i_0-1}\bar{e}_{i_0-1} + y^{i_0}\bar{x}_0 + y^{i_0+1}\bar{e}_{i_0+1} + \cdots + y^n\bar{e}_n$ este scrierea vectorului $\bar{x}$ în baza $\mathcal{B}'$, atunci:

$$y^{i_0} = \frac{x^{i_0}}{x_0^{i_0}},\ y^i = \frac{x^i x_0^{i_0} - x_0^i x^{i_0}}{x_0^{i_0}} = \frac{\begin{vmatrix} x_0^{i_0} & x^{i_0} \\ x_0^i & x^i \end{vmatrix}}{x_0^{i_0}},\ (\forall) i \neq i_0.$$

Numărul $x_0^{i_0}$ se numeşte *pivot*, iar regula de calcul a cordonatelor y^i, $i \neq i_0$, se numeşte *regula dreptunghiului*, deoarece din tabelul cordonatelor vectorilor:

		$\bar{x}_0$	$\bar{x}$
	$\bar{e}_1$	x_0^1	x^1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\bar{e}_{i_0-1}$	$\bar{x}_0^{i_0-1}$	$\bar{x}^{i_0-1}$
iese din bază $\longleftarrow$	$\bar{e}_{i_0}$	$\boxed{x_0^{i_0}}$	x^{i_0}
	$\bar{e}_{i_0+1}$	$\bar{x}_0^{i_0+1}$	$\bar{x}^{i_0+1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\bar{e}_i$	x_0^i	x^i
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\bar{e}_n$	x_0^n	x^n

$$: \quad \begin{array}{ccc} \boxed{x_0^{i_0}} & & x^{i_0} \\ & \swarrow\ \searrow & \\ x_0^i & & x^i \end{array}$$

se observă că y^i, care va lua locul lui x^i, se obţine ca rezultat al scăderii produselor $x^i x_0^{i_0} - x_0^i x^{i_0}$ (al elementelor aflate în colţurile dreptunghiului din dreapta), împărţit la pivolul $x_0^{i_0}$.

Se obţine:

	$\bar{x}_0$	$\bar{x}$
$\bar{e}_1$	0	$y^1 = \frac{x^1 x_0^{i_0} - x_0^1 x^{i_0}}{x_0^{i_0}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{e}_{i_0-1}$	0	$y^{i_0-1} = \frac{x^{i_0-1} x_0^{i_0} - x_0^{i_0-1} x^{i_0}}{x_0^{i_0}}$
$\bar{x}_0$	1	$y^{i_0} = \frac{x^{i_0}}{x_0^{i_0}}$
$\bar{e}_{i_0-1}$	0	$y^{i_0+1} = \frac{x^{i_0+1} x_0^{i_0} - x_0^{i_0+1} x^{i_0}}{x_0^{i_0}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{e}_i$	0	$y^i = \frac{x^i x_0^{i_0} - x_0^i x^{i_0}}{x_0^{i_0}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{e}_n$	0	$y^n = \frac{x^n x_0^{i_0} - x_0^n x^{i_0}}{x_0^{i_0}}$

Vom prezenta în continuare câteva aplicaţii ale lemei substituţiei.

3.3.1 Determinarea rangului unui sistem de vectori

Exemplu. Fie vectorii $\bar{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\bar{v}_2 = (1, -1, 1)$, $\bar{v}_3 = (2, 1, 0)$, $\bar{v}_4 = (0, 3, -2) \in \mathbb{R}^3$.

	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{v}_3$	$\bar{v}_4$
$\bar{e}_1$	$\boxed{1}$	1	2	0
$\bar{e}_2$	2	-1	1	3
$\bar{e}_3$	-1	1	0	-2
$\bar{v}_1$	1	1	2	0
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{-3}$	-3	3
$\bar{e}_3$	0	2	2	-2
$\bar{v}_1$	1	0	1	1
$\bar{v}_2$	0	1	1	-1
$\bar{e}_3$	0	0	0	0

S-au făcut două înlocuiri, deci rangul sistemului $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$ este 2 şi $\mathcal{L}(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}) = \mathcal{L}(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\})$.

3.3.2 Rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare

Exemple.

1. Sistemul următor este incompatibil:
$$\begin{cases} x^1 & -x^2 & +x^3 & = 0 \\ x^1 & +x^2 & +x^3 & = 6 \\ 3x^1 & +x^2 & +3x^3 & = 1 \end{cases}.$$
Avem:

	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	$\bar{b}$
$\bar{e}_1$	$\boxed{1}$	-1	1	0
$\bar{e}_2$	1	1	1	6
$\bar{e}_3$	3	1	3	1
$\bar{c}_1$	1	-1	1	0
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{2}$	0	6
$\bar{e}_3$	0	4	0	1
$\bar{c}_1$	1	0	1	3
$\bar{c}_2$	0	1	0	3
$\bar{e}_3$	0	0	0	-11

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 & & +x^3 & = 3 \\ & x^2 & & = 3 \\ & & 0 & = 11 \end{cases}$$

Sistemul este incompatibil, pentru că $-11 \neq 0$. Justificarea este următoarea: $\bar{b} = 3\bar{c}_1 + 3\bar{c}_2 - 11\bar{e}_2$, iar $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\} \subset \mathcal{L}(\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\})$ este bază, deci $\bar{b} \notin \mathcal{L}(\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\})$.

2. Sistemul următor este compatibil:
$$\begin{cases} 2x^1 & -x^2 & +x^3 & = 3 \\ x^1 & +2x^2 & +x^3 & = 6 \\ 3x^1 & +x^2 & +2x^3 & = 9 \end{cases}.$$

Sistemul este compatibil, pentru că $\bar{b} \in \mathcal{L}(\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\})$. Sistemul, în forma simplificată, din care putem scrie soluţiile, se scrie:

$$\begin{cases} x^1 & & +\frac{3}{5}x^3 & = \frac{12}{5} \\ & +x^2 & +\frac{1}{5}x^3 & = \frac{9}{5} \end{cases},$$

deci mulţimea soluţiilor este $\{(-\frac{3}{5}\alpha + \frac{12}{5}, -\frac{1}{5}\alpha + \frac{9}{5}, \alpha) \mid \alpha \in I\!R\}$. Necunoscuta x^3 este necunoscută secundară şi necunoscutele x^1 şi x^2 sunt necunoscute principale.Urmează tabelul:

	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	$\bar{b}$
$\bar{e}_1$	$\boxed{2}$	-1	1	3
$\bar{e}_2$	1	2	1	6
$\bar{e}_3$	3	1	2	9
$\bar{c}_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
$\bar{e}_3$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
$\bar{c}_1$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$
$\bar{c}_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\bar{e}_3$	0	0	0	0

3.3.3 Calcularea inversei unei matrici

Exemplu. Să se determine inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
$\bar{e}_1$	$\boxed{1}$	-1	1	1	0	0
$\bar{e}_2$	-1	1	0	0	1	0
$\bar{e}_3$	1	0	-1	0	0	1
$\bar{c}_1$	1	-1	1	1	0	0
$\bar{e}_2$	0	0	1	1	1	0
$\bar{e}_3$	0	1	$\boxed{-2}$	-1	0	1
$\bar{c}_1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\bar{c}_3$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\bar{c}_1$	1	0	0	1	1	1
$\bar{c}_2$	0	1	0	1	2	1
$\bar{c}_3$	0	0	1	1	1	0

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Aplicaţii liniare între două spaţii vectoriale

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K.

O aplicaţie $f : V \to W$ se numeşte *aplicaţie liniară* dacă are proprietatea că $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V$ şi $(\forall)\alpha, \beta \in K$. Notăm cu $L(V, W) = \{f : V \to W | f$ aplicaţie liniară$\}$.

De exemplu, dacă $V = \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $W = \mathcal{M}_{m,1}(K)$ şi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, atunci aplicaţia $f : \mathcal{M}_{n,1}(K) \to \mathcal{M}_{m,1}(K)$ definită prin $f(X) = A \cdot X$, este o aplicaţie liniară. Într-adevăr, ţinând seama de proprietăţile operaţiilor cu matrici, avem $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y) \Leftrightarrow$
$A \cdot (\alpha X + \beta Y) = \alpha(A \cdot X) + \beta(A \cdot Y)$, $(\forall)X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ şi $\alpha, \beta \in K$, ceea ce este, evident, adevărat.

Propoziţia 27 *O aplicaţie $f : V \to W$ este liniară dacă şi numai dacă sunt satisfăcute simultan condiţiile:*

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}), \tag{7}$$

$$f(\alpha\bar{x}) = \alpha f(\bar{x}), \tag{8}$$

$(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V$ *şi* $(\forall)\alpha \in K$. *Proprietatea (7) se numeşte proprietatea de* aditivitate, *iar proprietatea (8) se numeşte proprietatea de* omogenitate.

Propoziţia 28 *Fie o aplicaţie liniară $f : V \to W$, iar $V' \subset V$ şi $W' \subset W$ două subspaţii vectoriale. Atunci $f(V') = \{f(\bar{x}')|\bar{x}' \in V'\} \subset W$ şi $f^{-1}(W') = \{\bar{x} \in V|f(\bar{x}) \in W'\} \subset V$ sunt subspaţii vectoriale.*

Dacă se consideră, în particular, $V' = \{\bar{0}_V\}$,atunci $f(V') = \{\bar{0}_W\}$, deoarece $f(\bar{0}_V) = f(0 \cdot \bar{0}_V) = 0 \cdot f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$.

Dacă se consideră, în particular, $V' = V$ şi $W' = \{\bar{0}_W\}$, în propoziţia 28, rezultă că $f(V) \subset W$ şi $f^{-1}(\{\bar{0}_W\}) \subset V$ sunt subspaţii vectoriale.

Nucleul aplicaţiei f este $\ker f = f^{-1}(\{\bar{0}_W\}) = \{\bar{x} \in V \mid f(\bar{x}) = \bar{0}_W\} \subset$ $\subset V$. Dimensiunea $\dim \ker f$ (dacă este finită) se notează $def\ f$ şi se numeşte *defectul* aplicaţiei f.

Imaginea aplicaţiei f este $\operatorname{Im} f = f(V) = \{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in V\} \subset W$. Dimensiunea $\dim \operatorname{Im} f$ (dacă este finită) se notează *rang* f şi se numeşte *rangul* aplicaţiei f.

Propoziţia 29 *O aplicaţie liniară $f : V \to W$, între două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K, este injectivă dacă şi numai dacă* $\ker f = \{\bar{0}_V\}$.

Propoziţia 30 *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între două K-spaţii vectoriale.*

1. *Dacă $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\} \subset W$ este un sistem liniar independent astfel că $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1), \ldots, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k)$ (adică $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\} \subset$* $\operatorname{Im} f$*), atunci şi sistemul $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\} \subset V$ este un sistem liniar independent.*

2. *Dacă $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subset V$ este un sistem de generatori pentru V, atunci şi $\{f(\bar{x}_1), \ldots, f(\bar{x}_n)\}$ este un sistem de generatori pentru $f(V)$.*

Teorema 2 *(Teorema rangului) Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie liniară între K-spaţii vectoriale finit dimensionale, atunci* $\dim V = \operatorname{def} f + \operatorname{rang} f$.

Propoziţia 31 *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Fie $\mathcal{B} =\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p, \bar{v}_{p+1}, \ldots, \bar{v}_n$ V o bază care extinde o bază $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p\} \subset$* $\ker f$. *Atunci sistemul de vectori $\{f(\bar{v}_{p+1}), \ldots, f(\bar{v}_n)\}$ formează o bază pentru* $\operatorname{Im} f$.

Să remarcăm că demonstraţia propoziţiei 31 dă şi o modalitate concretă de a construi o bază în $\operatorname{Im} f$: se ia o bază în $\ker f$, care se extinde la o bază a lui V; imaginile prin f ale vectorilor care extind baza din nucleu formează o bază în $\operatorname{Im} f$.

Propoziţia 32 *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară între două K-spaţii vectoriale (finit dimensionale).*

1. *Aplicaţia f este injectivă dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang} f = \dim V$.

2. *Aplicaţia f este surjectivă dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang} f = \dim W$.

3. *Aplicaţia f este bijectivă dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang} f = \dim V =$ $= \dim W$.

Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ şi $\mathcal{B}_1 = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_m\} \subset W$ două baze ale lui V, respectiv W. Matricea $[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = (f_i^\alpha)_{i=\overline{1,n},\alpha=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, definită de egalitatea $f(\bar{e}_i) = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} f_i^\alpha \bar{e}'_\alpha$, se numeşte *matricea aplicaţiei* f corespunzătoare bazelor $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}_1$.

Propoziţia 33 *Dacă $\bar{x} \in V$, iar $[\bar{x}]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}$ şi $[f(\bar{x})]_{\mathcal{B}_1} \in \mathcal{M}_{m,1}$ sunt matricile coloană formate din cordonatele vectorilor $\bar{x}$ şi $f(\bar{x})$ în bazele corespunzătoare (reprezentările matriciale ale celor doi vectori), atunci are loc formula:*

$$[f(\bar{x})]_{\mathcal{B}_1} = [f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} \cdot [\bar{x}]_{\mathcal{B}},$$

sau:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

*unde $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n$ şi $f(\bar{x}) = y^1\bar{e}'_1 + \cdots + y^m\bar{e}'_m$ (*reprezentarea matricială *a aplicaţiei liniare f în perechea de baze $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$).*

Propoziţia 34 *Are loc formula*

$$\text{rang } f = rang\ [f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}\ , \tag{9}$$

adică rangul aplicaţiei liniare f este egal cu rangul matricii sale în orice pereche de baze $(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$.

În particular, rangul matricii unei aplicaţiei liniare f nu depinde de perechea de baze în care este considerat.

Propoziţia 35 *Fie $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{u}'_1,\ldots,\bar{u}'_n\} \subset V$ două baze ale lui V şi $\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m\}$ şi $\mathcal{B}'_1 = \{\bar{v}'_1,\ldots,\bar{v}'_m\} \subset W$ două baze ale lui W. Fie $[\mathcal{B},\mathcal{B}']$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ şi $[\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1]$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}'_1$. Atunci:*

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'} &= [\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1]^{-1}\cdot[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}\cdot[\mathcal{B},\mathcal{B}'] \text{ sau} \\ [f]_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'} &= [\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}_1]\cdot[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}\cdot[\mathcal{B},\mathcal{B}']. \end{aligned} \tag{10}$$

Propoziţia 36 *Fie $f : U \to V$ şi $g : V \to W$ două aplicaţii liniare între spaţii vectoriale peste acelaşi corp K şi fie $\mathcal{B}_1 = \{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m\} \subset U$, $\mathcal{B}_2 = \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\} \subset V$ şi $\mathcal{B}_3 = \{\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_p\} \subset W$ baze ale celor trei spaţii vectoriale. Atunci este adevărată egalitatea matricială:*

$$[g\circ f]_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}\cdot[f]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1},$$

adică matricea compunerii a două aplicaţii liniare este produsul matricilor celor două aplicaţii, în bazele corespunzătoare.

5 Izomorfisme de spaţii vectoriale

O aplicaţie liniară $f : V \to W$ între două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K, se spune că este un *izomorfism* de spaţii vectoriale, dacă f este o bijecţie. Două spaţii vectoriale între care există un izomorfism se spune că sunt *izomorfe*.

Propoziţia 37 *Dacă $f : V \to W$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, atunci şi $f^{-1} : W \to V$ este un izomorfism.*

Propoziţia 38 *Fie $f : V \to W$ un izomorfism de spaţii vectoriale,*
$\mathcal{S} = \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n\} \subset V$ un sistem de vectori şi
$f(\mathcal{S}) = \{f(\bar{v}_1),\ldots,f(\bar{v}_n)\} \subset W$. Atunci:

1. *$\mathcal{S} \subset V$ este liniar independent dacă şi numai dacă $f(\mathcal{S}) \subset W$ este liniar independent.*
2. *$\mathcal{S} \subset V$ este sistem de generatori dacă şi numai dacă $f(\mathcal{S}) \subset W$ este sistem de generatori.*
3. *$\mathcal{S} \subset V$ este bază dacă şi numai dacă $f(\mathcal{S}) \subset W$ este bază.*

Teorema 3 *Două spaţii vectoriale (finit dimensionale) sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune. În particular, toate spaţiile vectoriale care au dimensiunea $n \in I\!N^*$ sunt izomorfe cu K-spaţiul vectorial canonic definit pe K^n.*

Propoziţia 39 *Fie $f : V \to W$ un izomorfism de spaţii vectoriale peste acelaşi corp K şi fie $\mathcal{B}_1 = \{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\} \subset V$, $\mathcal{B}_2 = \{\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n\} \subset W$ baze ale celor două spaţii vectoriale. Atunci este adevărată egalitatea matricială:*

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1},$$

adică matricea izomorfismului invers unui izomorfism de K-spaţii vectoriale este inversa matricii izomorfismului în bazele corespunzătoare.

Propoziţia 40 *Fie $\mathcal{B} = \{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\} \subset V$ şi $\mathcal{B}_1 = \{\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m\} \subset$*
$\subset W$ două baze ale K-spaţiilor vectoriale V, respectiv W. Să considerăm aplicaţia
$F : L(V,W) \to \mathcal{M}_{m,n}(K)$, care asociază unei aplicaţii liniare $f \in L(V,W)$ matricea $[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = (f_i^\alpha)_{i=\overline{1,n},\alpha=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, adică matricea aplicaţiei f corespunzătoare bazelor $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}_1$.

Atunci F este un izomorfism de spaţii vectoriale.

O consecinţă importantă a propoziţiei de mai sus este următorul rezultat.

Propoziţia 41 *Dacă V şi W sunt spaţii vectoriale finit dimensionale peste corpul K, atunci* $\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

Ca un caz particular, se poate deduce că $\dim V^* = \dim L(V,K) =$
$= \dim V \cdot \dim K = \dim V \cdot 1 = \dim V$, rezultat obţinut în propoziţia **??**, unde se construieşte efectiv o bază $\mathcal{B}^* \subset V^*$, duala unei baze $\mathcal{B} \subset V$. De remarcat că deşi spaţiile vectoriale V şi V^* sunt izomorfe, având aceeaşi dimensiune, nu există nici un izomorfism canonic între aceste spaţii vectoriale.

6 Endomorfisme liniare

6.1 Generalităţi privind endomorfismele liniare

Fie V un spaţiu vectorial peste un corp K.

O aplicaţie K-liniară $f : V \to V$ se numeşte *endomorfism liniar.* Se notează cu $End(V)$ mulţimea endomorfismelor liniare ale spaţiului vectorial V. Deoarece $End(V) = L(V, V)$, din propoziţia **??** rezultă că $End(V)$ este un K-spaţiu vectorial.

Un endomorfism liniar bijectiv se numeşte *automorfism liniar.* Un automorfism liniar este deci un endomorfism care este în acelaşi timp un izomorfism.

Pentru endomorfisme şi automorfisme se pot folosi rezultatele şi construcţiile din cazul aplicaţiilor liniare, ţinând seama că domeniul şi codomeniul este acelaşi. Această particularitate impune însă unele elemente specifice. Unul dintre aceste elemnte specifice este matricea unui endomorfism într-o bază a spaţiului vectorial, când atât pentru domeniul de definiţie, cât şi pe codomeniu, se consideră aceeaşi bază.

Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ o bază. Matricea endomorfismului corespunzătoare bazei $\mathcal{B}$ este

$$[f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = (f_i^j)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K),$$

unde elementele matricii sunt definite de relaţia $f(\bar{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} f_i^j \bar{a}_j$. Dacă $\bar{x} \in V$ este un vector şi $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$, $[f(\bar{x})]_{\mathcal{B}}$ sunt matricile coloană formate din cordonatele vectorilor $\bar{x}$ şi $f(\bar{x})$ în baza $\mathcal{B}$ (sau reprezentările matriciale ale celor doi vectori), atunci:

$$[f(\bar{x})]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}} \cdot [\bar{x}]_{\mathcal{B}} \ ,$$

adică:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

unde $\bar{x} = x^1\bar{a}_1 + \cdots + x^n\bar{a}_n$ şi $\bar{y} = y^1\bar{a}_1 + \cdots + y_n$ (propoziţia 33).

Aplicând propoziţiile 34 şi 35 se obţin rezultatele următoare.

Propoziţia 42 *Dacă $f \in End(V)$ şi $\mathcal{B}$ este o bază a spaţiului vectorial V, atunci*

$$rang\ f = rang\ [f]_{\mathcal{B}} \ , \tag{11}$$

adică rangul endomorfismului f este egal cu rangul matricii sale în orice bază $\mathcal{B}$ a lui V.

Propoziţia 43 *Fie $\mathcal{B} = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\} \subset V$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_n\} \subset V$ două baze ale lui V şi fie $[\mathcal{B}, \mathcal{B}']$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Atunci:*

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}'} &= [\mathcal{B}, \mathcal{B}']^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}} \cdot [\mathcal{B}, \mathcal{B}'] \text{ sau} \\ [f]_{\mathcal{B}'} &= [\mathcal{B}', \mathcal{B}] \cdot [f]_{\mathcal{B}} \cdot [\mathcal{B}, \mathcal{B}']. \end{aligned} \tag{12}$$

6.2 Vectori şi valori proprii

Un *vector propriu* al endomorfismului liniar $f \in End(V)$ este un vector $\bar{v} \in V \backslash \{\bar{0}\}$ care are proprietatea că există $\lambda \in K$ pentru care $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$. Scalarul $\lambda \in K$ care corespunde unui vector propriu $\bar{v}$ se numeşte *valoare proprie.* Mulţimea valorilor proprii ale endomorfismului f se numeşte *spectrul* lui f şi se notează cu $\sigma(f)$. Să remarcăm că un vector propriu este nenul, pe când o valoare proprie poate fi nulă.

6.3 Calculul valorilor şi vectorilor proprii pentru dimensiunile 2 şi 3

Vom explicita în continuare calculul valorilor şi vectorilor proprii în cazurile $n = 2$ şi $n = 3$.

În cazul $n = 2$, se consideră baza $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset V$. Atunci

$F = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix}$, iar polinomul caracteristic se scrie

$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} f_1^1 - \lambda & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (f_1^1 + f_2^2)\lambda + (f_1^1 \cdot f_2^2 - f_2^1 \cdot f_1^2)$. Ecuaţia ale cărei soluţii sunt valorile proprii (ecuaţia caracteristică) este:

$$\lambda^2 - (f_1^1 + f_2^2)\lambda + (f_1^1 \cdot f_2^2 - f_2^1 \cdot f_1^2) = 0, \tag{13}$$

sau:

$$\lambda^2 - (trace\ F) \cdot \lambda + \det F = 0.$$

Dacă ecuaţia (13) are rădăcini în K, atunci sistemul care dă coordonatele vectorilor proprii se reduce la una din ecuaţiile sistemului omogen:

$$\begin{cases} \left(f_1^1 - \lambda\right) v^1 & + f_2^1 v^2 & = 0 \\ f_1^2 v^1 & + \left(f_2^2 - \lambda\right) v^2 & = 0 \end{cases}.$$

Exemple.

1. Fie endomorfismul liniar $f : I\!R^2 \to I\!R^2$,
$f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. În baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset I\!R^2$, $\bar{e}_1 = (1, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1)$, matricea lui f este $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece $f(\bar{e}_1) = (3, 1)$ şi $f(\bar{e}_2) = (1, 3)$, $[f(\bar{e}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $[f(\bar{e}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ alcătuiesc coloanele matricii $[f]_{\mathcal{B}}$. Polinomul cararcteristic este $P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$
$= \lambda^2 - 6\lambda + 8$, care are rădăcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 4$.

-Pentru $\lambda_1 = 2$, sistemul a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\Big($
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v^1 + v^2 & = 0 \\ v^1 + v^2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v^1 + v^2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = -v^1$. Dacă notăm $v^1 = \alpha \in I\!R^*$, atunci $\bar{v}_1 = (\alpha, -\alpha) = \alpha(1, -1)$.

-Pentru $\lambda_1 = 4$, sistemul a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix}\Big($
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v^1 + v^2 & = 0 \\ v^1 - v^2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v^1 - v^2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = v^1$. Dacă notăm $v^1 = \alpha \in I\!R^*$, atunci $\bar{v}_1 = (\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1)$.

Dacă se consideră baza $\mathcal{B}' = \{(1, -1), (1, 1)\} \subset I\!R^2$, rezultă matricea $[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, care este o matrice diagonală.

2. Fie endomorfismul liniar $f : I\!R^2 \to I\!R^2$, $f(x, y) = (x, x + y)$. În baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset I\!R^2$, matricea lui f este $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$, cu rădăcina dublă $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Sistemul a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v^1 = 0$.
Rezultă că mulţimea vectorilor proprii este de forma
$\{(0, v^2) | v^2 \in I\!R^*\} = \{\alpha(0, 1) | \alpha \in I\!R^*\}$. În cazul acestui endomorfism nu există o bază a lui $I\!R^2$, formată din vectori proprii.

3. Fie endomorfismul liniar $f : I\!R^2 \to I\!R^2$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$. În baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset I\!R^2$, matricea lui f este $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$, care nu are rădăcini reale. Rezultă că endomorfismul f nu are vectori şi valori proprii.

4. Fie endomorfismul liniar $g : I\!\!C^2 \to I\!\!C^2$ al spaţiului vectorial complex $I\!\!C^2$, $f(x, y) = (x - y, x + y)$. În baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset I\!\!C^2$, matricea lui g este $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$, care are ca rădăcini $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, unde $i \in I\!\!C$ este unitatea imaginară ($i^2 = -1$).

Pentru $\lambda_1 = 1 + i$, sistemul a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este:
$\begin{pmatrix} 1-(1+i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -iv^1 - v^2 & = 0 \\ v^1 - iv^2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$v^1 - iv^2 = 0$. Dacă notăm $v^2 = \alpha \in I\!\!C^*$, atunci $\bar{v}_1 = (i\alpha, \alpha) = \alpha(i, 1)$.

Pentru $\lambda_1 = 1 - i$, sistemul a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este:
$\begin{pmatrix} 1-(1-i) & -1 \\ 1 & 1-(1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} iv^1 - v^2 & = 0 \\ v^1 + iv^2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$v^1 + iv^2 = 0$. Dacă notăm $v^2 = \alpha \in I\!\!C^*$, atunci $\bar{v}_1 = (-i\alpha, \alpha) = \alpha(-i, 1)$.

Dacă se consideră baza $\mathcal{B}' = \{(i, 1), (-i, 1)\} \subset I\!\!C^2$, rezultă matricea diagonală $[g]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

Să remarcăm că endomorfismul $f \in End(I\!R^2)$ de la exemplul anterior, are aceeaşi matrice în baza canonică a lui $I\!R^2$ ca g, dar nu are nici o valoare proprie ($\sigma(f) = \emptyset$), pe când $\sigma(g) = \{1 \pm i\}$. Deşi cele două endomorfisme au acelaşi polinom caracteristic $P_f(\lambda) = P_g(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, ecuaţia $P_f(\lambda) = 0$ nu are rădăcini în $I\!R$, pe când ecuaţia $P_g(\lambda) = 0$ are două rădăcini în $I\!\!C$. Diferenţa provine din faptul că $I\!R$ nu este un corp algebric închis, adică nu toate polinoamele cu coeficienţi reali au rădăcinile în $I\!R$, pe când $I\!\!C$ este un corp algebric închis.

Să studiem acum cazul $n = 3$. Se consideră baza $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \subset V$. Atunci matricea endomorfismului $f \in End(f)$ are forma

$$F=\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{pmatrix},$$

iar ecuaţia caracteristică se scrie

$$-\lambda^3+(trace\ F)\cdot\lambda^2-\Delta_2\cdot\lambda+\det F=0, \tag{14}$$

unde:

$$\text{trace } F=f_1^1+f_2^2+f_3^3\text{şi }.\Delta_2=\begin{vmatrix} f_2^2 & f_3^2 \\ f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1^1 & f_3^1 \\ f_1^3 & f_3^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^1 & f_2^2 \end{vmatrix},$$

(adică trace F este suma elementelor matricii F de pe diagonala principală, iar Δ_2 este suma complemenţilor algebrici ai elementelor de pe diagonala principală). Sistemul a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ, este:

$$\begin{cases} \left(f_1^1-\lambda\right)v^1 & +f_2^1v^2 & +f_3^1v^3 & =0 \\ f_1^2v^1 & +\left(f_2^2-\lambda\right)v^2 & +f_3^2v^3 & =0 \\ f_1^3v^1 & +f_2^3v^2 & \left(f_3^3-\lambda\right)v^3 & =0 \end{cases}.$$

Exemple.

1. Fie endomorfismul liniar $f:I\!R^3\to I\!R^3$,
$f(x,y,z)=(4x+2y-2z,\ x+3y+z,\ -x-y+5z)$. Considerând baza canonică $\mathcal{B}=\{\bar{e}_1=(1,0,0),\ \bar{e}_2=(0,1,0),\ \bar{e}_3=(0,0,1)\}\subset I\!R^3$, matricea endomorfismului f este $F=[f]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $P_f(\lambda)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=48-44\lambda+12\lambda^2-\lambda^3$. Pentru a folosi formula (14), se calculează trace $f=4+3+5=12$,
$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=44$ şi
$\det F=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=48$. Rădăcinile $P_f(\lambda)=0$ sunt $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=6$, deci $\sigma(f)=\{2,4,6\}$.

Pentru $\lambda_1=2$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $v^1=-\alpha$, $v^2=\alpha$, $v^3=0$, deci $\bar{v}_1=\alpha(-1,1,0)$, $\alpha\in I\!R^*$.

Pentru $\lambda_2=4$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $v^1=0$, $v^2=\beta$, $v^3=\beta$, deci $\bar{v}_2=\beta(0,1,1)$, $\beta\in I\!R^*$.

Pentru $\lambda_3=6$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $v^1=-\gamma$, $v^2=0$, $v^3=\gamma$, deci $\bar{v}_3=\gamma(-1,0,1)$, $\gamma\in I\!R^*$.

În baza $\mathcal{B}'=\{(-1,1,0),(0,1,1),(-1,0,1)\}\subset I\!R^3$, rezultă matricea diagonală $[f]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Fie endomorfismul liniar
$f:I\!R^3\to I\!R^3$, $f(x,y,z)=(9x+3y-3z,\ 2x+8y-2z,\ -x-y+7z)$. Considerând baza canonică $\mathcal{B}=\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}\subset I\!R^3$, matricea endomorfismului f este $F=[f]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 2 & 8 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Avem trace $f=9+8+7=24$,

$\Delta_2=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=180$, $\det F=\begin{vmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 2 & 8 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix}=432$, prim urmare polinomul caracteristic este $P_f(\lambda)=-\lambda^3+24\lambda^2-180\lambda+432=-(\lambda-6)^2(\lambda-12)$, $\sigma(f)=\{6,12\}$.

Pentru $\lambda_1=6$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $v^1=-\alpha+\beta$, $v^2=\alpha$, $v^3=\beta$. Rezultă că un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1=6$ are forma $\bar{v}=(-\alpha+\beta,\alpha,\beta)=\alpha(-1,1,0)+\beta(1,0,1)$, $\alpha,\beta\in I\!R$. Rezultă că $\{\bar{v}_1=(-1,1,0),\ \bar{v}_2=(1,0,1)\}$ generează un subspaţiu vectorial de dimensiune 2, ai cărui vectori nenuli sunt vectorii proprii asociaţi valorii proprii $\lambda_1=6$.

Pentru $\lambda_1 = 12$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde
$v^1 = -3\gamma$, $v^2 = -2\gamma$, $v^3 = \gamma$, deci $\bar{v}_3 = \gamma(-3, -2, 1)$, $\gamma \in I\!R^*$.

În baza $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (-3, -2, 1)\} \subset I\!R^3$, rezultă matricea diagonală $[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Fie endomorfismul liniar $f : I\!R^3 \to I\!R^3$, $f(x, y, z) = (6x + 9y,\ 2x + 8y - 2z,\ -4x + 5y + 10z)$. Considerând baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\} \subset I\!R^3$, matricea endomorfismului f este $F = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & -2 \\ -4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$. Avem trace $f = 6 + 8 + 10 = 24$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 180$, $\det F = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & -2 \\ -4 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 432$, prim urmare polinomul caracteristic este $P_f(\lambda) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 180\lambda + 432 = -(\lambda - 6)^2(\lambda - 12) \Rightarrow \sigma(f) = \{6, 12\}$.

Pentru $\lambda_1 = 6$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $v^1 = \alpha$, $v^2 = 0$, $v^3 = \alpha$. Rezultă că un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 6$ are forma $\bar{v}_1 = \alpha(1, 0, 1)$, $\alpha \in I\!R^*$.

Pentru $\lambda_1 = 12$, sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este $\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $v^1 = -3\beta$, $v^2 = -2\beta$, $v^3 = \beta$. Rezultă că un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1 = 6$ are forma $\bar{v}_1 = \beta(-3, -2, 1)$, $\beta \in I\!R^*$.

Să observăm că, spre deosebire de exemplul anterior, spaţiul vectorial generat de vectorii proprii are dimensiunea 2, fiind generat de vectorii $\{(1, 0, 1), (-3, -2, 1)\}$ şi nu mai este întreg spaţiul $I\!R^3$. Cu toate acestea, polinoamele caracteristice asociate celor două endomorfisme, coincid. Există aşadar endomorfisme care au acelaşi polinom caracetristic, dar subspaţiile generate de vectorii proprii au dimensiuni diferite.

4. Fie endomorfismul liniar $f : I\!R^3 \to I\!R^3$, $f(x, y, z) = (6x + 9y,\ 10y - 4z,\ -6x + 7y + 8z)$. Considerând baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\} \subset I\!R^3$, matricea endomorfismului f este
$F = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -4 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este:
$P_f(\lambda) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 216\lambda + 864 = -(\lambda - 12)\left(\lambda^2 - 12\lambda + 72\right)$, cu singura rădăcină reală $\lambda_1 = 12$. Sistemul omogen a cărui soluţie nenulă reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători este
$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -6 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $\bar{v}_1 = \alpha(-3, -2, 1)$, $\alpha \in I\!R^*$.

5. Fie endomorfismul liniar $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$,
$g(x, y, z) = (6x + 9y,\ 10y - 4z,\ -6x + 7y + 8z)$, care are aceeaşi matrice ca endomorfismul f din exemplul de mai sus. Polinomul caracteristic este deci acelaşi: $P_g(\lambda) = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 216\lambda + 864 = -(\lambda - 12)\left(\lambda^2 - 12\lambda + 72\right)$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 12$, $\lambda_{2,3} = 6 \pm 6i$.

Pentru $\lambda_1 = 6$, se obţine ca mai sus $\bar{v}_1 = \alpha(-3, -2, 1)$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Pentru $\lambda_2 = 6 - 6i$, se obţine sistemul
$\begin{pmatrix} 6i & 9 & 0 \\ 0 & 4 + 6i & -4 \\ -6 & 7 & 2 + 6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $\bar{v}_2 = \beta(3, -2i, 3 - 2i)$, $\beta \in \mathbb{C}^*$.

Pentru $\lambda_3 = 6 + 6i$, se obţine $\bar{v}_3 = \gamma(3, 2i, 3 + 2i)$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$.

În baza $\mathcal{B}' = \{(-3, -2, 1), (3, -2i, 3 - 2i), (3, 2i, 3 + 2i)\} \subset \mathbb{C}^3$, rezultă matricea $[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 - 6i & 0 \\ 0 & 0 & 6 + 6i \end{pmatrix}$.

Să remarcăm faptul că pe când un endomorfism al unui spaţiu vectorial real de dimensiune pară (în particular 2) poate să aibă spectrul vid, un endomorfism al unui spaţiu vectorial real de dimensiune impară (în particular 3) are întotdeauna spectrul nevid, pentru că orice polinom cu coeficienţi reali, de grad impar, are cel puţin o rădăcină reală.

6.4 Diagonalizarea matricilor endomorfismelor liniare

Fie V un K-spaţiu vectorial finit dimensional. Fie $\lambda_0 \in K$ o valoare proprie a lui $f \in End(V)$ şi fie
$V_{\lambda_0} = \{\bar{v} \in V | f(\bar{v}) = \lambda_0 \bar{v}\}$, adică mulţimea vectorilor proprii, corespunzătoare valorii proprii λ_0, la care se adaugă vectorul

nul.

Propoziţia 44 *Submulţimea $V_{\lambda_0} \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V, invariat de f (adică $f(V_{\lambda_0}) \subset V_{\lambda_0}$).*

Subspaţiul vectorial $V_{\lambda_0} \subset V$ se numeşte *subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii* λ_0.

Propoziţia 45 *Dimensiunea* $\dim V_{\lambda_0}$ *(numită* multiplicitate geometrică*) nu depăşeşte multiplicitatea lui λ_0, ca rădăcină a polinomului caracteristic $P_f(\lambda)$ (numită* multiplicitate algebrică*).*

Propoziţia 46 *Fie $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ vectori proprii ai unui endomorfism liniar $f \in End(V)$, care corespund valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, diferite două câte două. Atunci sistemul format din vectorii $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\} \subset V$ este un sistem liniar independent.*

Teorema 4 *(Diagonalizarea endomorfismelor) Fie $f \in End(V)$ un endomorfism liniar al unui K-spaţiu vectorial V, $\dim V = n$. Să presupunem că f are toate valorile proprii în K, iar, pentru fiecare valoare proprie $\lambda \in \sigma(f)$, multiplicitatea geometrică este egală cu multiplicitatea algebrică (adică dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii λ, $V_\lambda \subset V$, este egală cu multiplicitatea lui λ ca rădăcină a polinomului caracteristic P_f). Atunci există o bază $\mathcal{B}_f \subset V$ astfel încât matricea $[f]_{\mathcal{B}_f}$, a endomorfismului f în baza $\mathcal{B}_f$, este diagonală, unde pe diagonală sunt valorile proprii, fiecare valoare proprie fiind luată de atâtea ori cât este multiplicitatea sa (algebrică ori geometrică).*

Exemplu. Fie $f : I\!R^5 \to I\!R^5$, $f(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) =$
$= (12x^1 - 4x^2 + x^3 + 5x^4 + 3x,\ 9x^2,\ 3x^1 - 2x^2 + 8x^3 + x^4 + 3x^5,$
$-3x^1 + 4x^2 - x^3 + 4x^4 - 3x^5,\ -6x^1 + 6x^2 - 6x^4 + 3x^5)$. În baza canonică
$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_5\}$ a lui $I\!R^5$, f are matricea

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 4 & -3 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este:

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 8-\lambda & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 4-\lambda & -3 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix},$$

$P_f(\lambda) = 13122 - 10935\lambda + 3402\lambda^2 - 504\lambda^3 + 36\lambda^4 - \lambda^5 =$
$= (-1)^5(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9)^3$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$,
$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 9$. Multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii $\lambda_1 = 3$ şi $\lambda_2 = 6$ sunt 1, iar ale valorii proprii $\lambda_3 = 9$ este 3.

$\mathcal{B}_1 = \{\bar{v}_1\} \subset V_{\lambda_1}$ este o bază, iar V_{λ_1} este spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului

$$\begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \\ v^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $v^1 = \alpha$, $v^2 = 0$, $v^3 = \alpha$, $v^4 = -2\alpha$, $v^5 = -3\alpha$, $\alpha \in I\!R$, de unde vectorul propriu $\bar{v}_1 = (2, 0, 1, -2, -3)$.

$\mathcal{B}_2 = \{\bar{v}_2\} \subset V_{\lambda_2}$ este o bază, iar V_{λ_2} este spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & -3 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \\ v^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă asemănător vectorul propriu $\bar{v}_2 = (-1, 0, 1, 1, 0)$.

$\mathcal{B}_3 = \{\bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5\} \subset V_{\lambda_5}$ este o bază, iar V_{λ_3} este spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -5 & -3 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \\ v^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 9$ sunt $\bar{v}_3 = (1,1,1,0,0)$, $\bar{v}_4 = (1,2,0,1,0)$ şi $\bar{v}_5 = (-1,0,0,0,1)$, care formează o bază în V_{λ_3}.

În baza $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_5\}$, matricea endomorfismului f este

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

deci endomorfismul este diagonalizabil.

7 Forme biliniare

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K.

O aplicaţie $\varphi : V \times V \to K$ se numeşte *formă biliniară* dacă este K-liniară în ambele argumente, adică:

1. $\varphi(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2, \bar{y}) = \alpha\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}) + \beta\varphi(\bar{x}_2, \bar{y})$, $(\forall)\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y} \in V$, $\alpha, \beta \in K$ şi
2. $\varphi(\bar{x}, \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2) = \alpha\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1) + \beta\varphi(\bar{x}, \bar{y}_2)$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in V$, $\alpha, \beta \in K$.

Spunem că o formă biliniară este *simetrică* dacă $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y}, \bar{x})$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V$ şi *antisimetrică* dacă $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = -\varphi(\bar{y}, \bar{x})$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V$. Dacă $\varphi : V \times V \to K$ este o formă biliniară, are loc identitatea

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) + \varphi\left(\bar{y}, \bar{x}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) - \varphi\left(\bar{y}, \bar{x}\right)\right) \\ &= \varphi'(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi''(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Atunci:

1. $\varphi' : V \times V \to K$, $\varphi'(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) + \varphi\left(\bar{y}, \bar{x}\right)\right)$este o formă biliniară simetrică, numită *forma biliniară simetrică asociată* formei biliniare φ şi
2. $\varphi'' : V \times V \to K$, $\varphi'(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) - \varphi\left(\bar{y}, \bar{x}\right)\right)$este o formă biliniară antisimetrică, numită *forma biliniară antisimetrică asociată* formei biliniare φ.

Fie $\varphi : V \times V \to K$ o formă biliniară şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ o bază a lui V. Vom presupune în continuare că spaţiul vectorial V este finit dimensional. *Matricea formei biliniare* corespunzătoare bazei $\mathcal{B}$ se defineşte prin $[\varphi]_{\mathcal{B}} = (\varphi_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, unde $\varphi_{ij} = \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Dacă $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i\bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i\bar{e}_i \in V$ şi $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$, $[\bar{y}]_{\mathcal{B}}$ sunt reprezentările matriciale ale vectorilor $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ în baza $\mathcal{B}$, atunci:

$$\varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \varphi_{ij}, \tag{15}$$

sau, cu scriere matricială:

$$\varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = [\bar{x}]_{\mathcal{B}}^t \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot [\bar{y}]_{\mathcal{B}}\ , \tag{16}$$

Propoziţia 47 *Forma biliniară $\varphi : V \times V \to K$ este simetrică (antisimetrică) dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază oarecare a lui V este simetrică (antisimetrică).*

Propoziţia 48 *Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}$ două baze ale K-spaţiului vectorial V, cu matricea de trecere $[\mathcal{B}, \mathcal{B}']$. Atunci are loc formula:*

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{B}, \mathcal{B}']^t \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot [\mathcal{B}, \mathcal{B}'], \tag{17}$$

unde $\varphi : V \times V \to K$ este o formă biliniară.

Propoziţia 49 *Rangul matricii unei forme biliniare este acelaşi, indiferent de baza în care se scrie matricea formei biliniare.*

Rangul matricii unei forme biliniare $\varphi : V \times V \to K$ într-o bază oarecare, se numeşte *rangul formei biliniare φ*. O formă biliniară $\varphi : V \times V \to K$ se spune că este *nedegenerată* dacă din $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $(\forall)\bar{y} \in V$, rezultă $\bar{x} = 0$.

Propoziţia 50 *Fie $\varphi : V \times V \to K$ o formă biliniară pe un spaţiu vectorial finit dimensional V. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *φ este nedegenerată;*
2. *matricea $[\varphi]_{\mathcal{B}}$, a formei φ într-o bază $\mathcal{B} \subset V$, este nesingulară;*
3. *dacă $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $(\forall)\bar{x} \in V$, atunci $\bar{y} = 0$.*

8 Forme pătratice

O aplicaţie $p : V \to K$ este o *formă pătratică* pe K-spaţiul vectorial V dacă există o formă biliniară $\varphi : V \times V \to K$, numiă *formă biliniară asociată*, astfel încât $p(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \bar{x})$, $(\forall)\bar{x} \in V$.

Propoziţia 51 *Dacă $p : V \to K$ este o formă pătratică, atunci există o singură formă biliniară simetrică φ, asociată ei, dată de formula:*

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(p(\bar{x} + \bar{y}) - p(\bar{x}) - p(\bar{y})\right).$$

Forma biliniară simetrică asociată unei forme pătratice se numeşte *forma polară* sau *forma dedublată* a formei pătratice.

Matricea unei forme pătratice $p : V \to K$ într-o bază $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ se defineşte ca fiind matricea formei biliniare simetrice asociate ei (formei polare), corespunzătoare bazei $\mathcal{B}$. Din propoziţia 47 rezultă că matricea unei forme pătratice este o matrice simetrică.

Să studiem reprezentarea pe coordonate a unei forme pătratice.

Fie $p : V \to K$ o formă pătratică şi $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} \subset V$ o bază. Forma pătratică p are forma:

$$p(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x^i x^j, \tag{18}$$

unde $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n \in V$ şi matricea formei pătratice este $[p]_{\mathcal{B}} = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $(\forall)i, j = \overline{1,n}$. Forma biliniară simetrică asociată formei pătratice (forma polară sau dedublată) este:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j,$$

unde $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \cdots + x^n\bar{e}_n$, $\bar{y} = y^1\bar{e}_1 + \cdots + y^n\bar{e}_n \in V$.

Exemplu.

Fie $p : I\!R^2 \to I\!R$, $p(\bar{v}) = x^2 + 4xy - y^2$, unde $\bar{v} = (x, y)$. Forma polară sau dedublată este: $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + 2(xy' + yx') - yy'$.

8.1 Forme canonice pentru forme pătratice

Propoziţia 52 *(Gauss) Fie V un K-spaţiu vectorial,* $\dim V = n$. *Pentru orice formă pătratică nenulă $p : V \times V \to K$, există o bază $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ şi scalarii nenuli*
$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K^*$, $1 \leq k \leq n$, astfel încât:

$$p(\bar{x}) = \alpha_1 \cdot (x^1)^1 + \cdots + \alpha_k \cdot (x^k)^2, \tag{19}$$

unde $\bar{x} = x^1\bar{v}_1 + \cdots + x^n\bar{v}_n \in V$.

Demonstraţia propoziţiei 52 este constructivă, metoda descrisă în demonstraţie se numeşte *metoda lui Gauss* de aducere la formă canonică a unei forme pătratice.

Exemple

1. Fie $p : I\!R^3 \to I\!R$, $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ baza canonică a lui $I\!R^3$, $p(\bar{v}) =$
$= x^2 - 2xy + 2xz + 3y^2 - 6yz + 2z^2$, unde $\bar{v} = (x, y, z) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 \in I\!R^3$.

Avem $p(\bar{v}) = (x^2 - 2xy + 2xz) + 3y^2 - 6yz + 2z^2 =$
$= [(x - y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz] + 3y^2 - 6yz + 2z^2 =$
$= (x - y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 3y^2 - 6yz + 2z^2 =$
$= (x - y + z)^2 + 2y^2 + z^2 - 4yz = (x - y + z)^2 + 2(y^2 - 2yz) + z^2 =$
$= (x - y + z)^2 + 2[(y - z)^2 - z^2] + z^2 = (x - y + z)^2 + 2(y - z)^2 - z^2$.

Fie $x' = x - y + z$, $y' = y - z$, $z' = z$. Matricial, avem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

deci

$$[\mathcal{B},\mathcal{B}']^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

prin urmare

$$[\mathcal{B},\mathcal{B}']=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

deci baza $\mathcal{B}'=\{\bar v_1,\bar v_2,\bar v_3\}\subset I\!\!R^3$ în care p are forma
$p(\bar v)=(x')^2+2(y')^2-(z')^2$, $\bar v=x'\bar v_1+y'\bar v_2+z'\bar v_3$ este
$\mathcal{B}'=\{\bar v_1=\bar e_1,\ \bar v_2=\bar e_1+\bar e_2,\ \bar v_3=\bar e_2+\bar e_3\}$.

2. Fie $p:I\!\!R^3\to I\!\!R$, $\mathcal{B}=\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ baza canonică a lui $I\!\!R^3$,
$p(\bar v)=x^2-2xy+2xz+y^2+2z^2$, unde
$\bar v=(x,y,z)=x\bar e_1+y\bar e_2+z\bar e_3\in I\!\!R^3$.

Avem $p(\bar v)=(x-y+z)^2+2yz+z^2$. Pentru a continua, se consideră coordonatele (x',y',z'), astfel încât $x=x'$, $y=y'+z'$, $z=y'-z'$, deci $p(\bar v)=(x'-y'-z'+y'-z')^2+2(y'+z')(y'-z')+(y'-z')^2==(x'-2z')^2+3(y')^2-(z')^2-2y'z'=(x'-2z')^2+3(y'-\frac{1}{3}z')^2-\frac{4}{3}(z')^2$.

Fie schimbarea de coordonate $x''=x'-2z'$, $y''=y'-\frac{1}{3}z'$, $z''=z'$, deci $p(\bar v)=(x'')^2+3(y'')^2-\frac{4}{3}(z'')^2$. Dar $x'=x$, $y'=\frac{1}{2}(y+z)$,
$z'=\frac{1}{2}(y-z)$, deci $x''=x-y+z$, $y''=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z$, $z''=\frac{1}{2}(y-z)$. Matricial, avem:

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

deci

$$[\mathcal{B},\mathcal{B}'']=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&\frac{4}{3}\\0&1&-\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

prin urmare baza $\mathcal{B}''$ în care $p(\bar v)=(x'')^2+3(y'')^2-\frac{4}{3}(z'')^2$ este
$\mathcal{B}''=\{\bar v_1=\bar e_1,\ \bar v_2=\bar e_2+\bar e_3,\ \bar v_3=2\bar e_1+\frac{4}{3}\bar e_2-\frac{2}{3}\bar e_3\}$.

Dacă $\varphi:V\times V\to K$ este o formă biliniară simetrică, atunci o bază $\mathcal{B}=\{\bar v_1,\ldots,\bar v_n\}\subset V$ este *ortogonală* în raport cu φ dacă $\varphi(\bar v_i,\bar v_j)=0$, pentru $i\neq j$. Conform propoziţiei 51, între formele pătratice şi formele biliniare simetrice există o determinare reciprocă. Dacă $p:V\to K$ este o formă pătratică, atunci o bază $\mathcal{B}=\{\bar v_1,\ldots,\bar v_n\}\subset V$ este *ortogonală* în raport cu p, dacă este ortogonală în raport cu forma biliniară simetrică asociată ei.

Într-o bază ortogonală faţă de o formă biliniară simetrică (formă pătratică), matricea formei biliniare simetrice (respectiv a formei pătratice) este diagonală. O astfel de bază se spune că realizează o *formă canonică* a formei biliniare simetrice (respectiv a formei pătratice).

Propoziţia 52 afirmă faptul că pentru o formă pătratică p, există o bază $\mathcal{B}=\{\bar v_1,\ldots,\bar v_n\}\subset V$ în care forma pătratică are formă canonică (19). Rezultă că forma biliniară simetrică asociată φ are forma:

$$\varphi(\bar x,\bar y)=\alpha_1\cdot x^1y^1+\cdots+\alpha_kx^ky^k, \tag{20}$$

unde $k\leq n$ şi $\bar x=x^1\bar v_1+\cdots+x^n\bar v_n$, $\bar y=y^1\bar v_1+\cdots+y^n\bar v_n\in V$.

Numărul k din formula de mai sus nu depinde de baza $\mathcal{B}$, fiind egal cu rangul aplicaţiei biliniare.

O altă metodă de aducere la formă canonică a unei forme pătratice este *metoda lui Jacobi.*

Propoziţia 53 *(Jacobi) Fie V un K-spaţiu vectorial,* $\dim V=n$*. Fie $p:V\to K$ o formă pătratică care are rangul q, astfel că într-o bază $\mathcal{B}=\{\bar e_1,\ldots,\bar e_n\}\subset V$, matricea formei pătratice este $[p]_{\mathcal{B}}=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Dacă toţi scalarii:*

$$\Delta_0=1,\Delta_1=b_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix},\ \ldots\ ,\Delta_q=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1q}\\\vdots&&\vdots\\b_{q1}&\cdots&b_{qq}\end{vmatrix}$$

sunt nenuli, atunci există o bază $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_q, \bar{v}_{q+1}, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ *astfel încât::*

$$p(\bar{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(y^1)^1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y^2)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{q-1}}{\Delta_q}(y^q)^2, \tag{21}$$

unde $\bar{x} = y^1\bar{v}_1 + \cdots + y^n\bar{v}_n \in V$.

Exemplu.

Fie spaţiul vectorial aritmetic $\mathbb{R}^3$ şi fie baza canonică $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Fie forma pătratică $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $p(\bar{v}) = x^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 2z^2$, unde $\bar{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Luând $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ baza canonică, avem

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

prin urmare $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ şi
$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Atunci există o bază
$\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât
$p(\bar{v}) = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}(x')^2 + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}(y')^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3}(z')^2 =$
$= \dfrac{1}{1}(x')^2 + \dfrac{1}{-1}(y')^2 + \dfrac{-1}{-2}(z')^2 = (x')^2 - (y')^2 + \dfrac{1}{2}(z')^2$, unde
$\bar{v} = x'\bar{v}_1 + y'\bar{v}_2 + z'\bar{v}_3$.

Să determinăm baza în care p are forma canonică.

Se caută $\bar{v}_1$ de forma $\bar{v}_1 = \alpha_{11}\bar{e}_1$, unde $\alpha_{11} \cdot 1 = 1$, deci $\alpha_{11} = 1$, prin urmare $\bar{v}_1 = \bar{e}_1$.

Se caută $\bar{v}_2$ de forma $\bar{v}_2 = \alpha_{21}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2$, unde α_{21} şi α_{22} sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \alpha_{21} - \alpha_{22} & = 0 \\ -\alpha_{21} & = 1 \end{cases},$$

deci $\alpha_{21} = \alpha_{22} = -1$, prin urmare $\bar{v}_2 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

Se caută $\bar{v}_3$ de forma $\bar{v}_3 = \alpha_{31}\bar{e}_1 + \alpha_{32}\bar{e}_2 + \alpha_{33}\bar{e}_3$, unde α_{31}, α_{32} şi α_{33} sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} & = 0 \\ -\alpha_{31} & & +2\alpha_{33} & = 0 \\ -\alpha_{31} & +2\alpha_{32} & +2\alpha_{33} & = 1 \end{cases},$$

deci $\alpha_{31} = 1$, $\alpha_{32} = \dfrac{1}{2}$ şi $\alpha_{33} = \dfrac{1}{2}$, prin urmare $\bar{v}_2 = \bar{e}_1 + \dfrac{1}{2}\bar{e}_2 + \dfrac{1}{2}\bar{e}_3$.

Deci, forma pătratică p are, în baza $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, matricea diagonală $[p]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

9 Produs scalar şi spaţii vectoriale euclidiene

Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste corpul $K = \mathbb{R}$. O formă bilinară $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *produs scalar* dacă este simetrică şi strict pozitiv definită. Aşadar, un produs scalar $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ are proprietăţile:

1. este $\mathbb{R}$-liniar în fiecare argument, adică:

   (a) $< \alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2, \bar{y} >= \alpha < \bar{x}_1, \bar{y} > +\beta < \bar{x}_2, \bar{y} >$, $(\forall)\bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{y} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi

   (b) $< \bar{x}, \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2 >= \alpha < \bar{x}, \bar{y}_1 > +\beta < \bar{x}, \bar{y}_2 >$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

2. este simetric, adică $< \bar{x}, \bar{y} >=< \bar{y}, \bar{x} >$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V$;

3. este strict pozitiv definit, adică $< \bar{x}, \bar{x} >\geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in V$ şi $< \bar{x}, \bar{x} >= 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Ultimele două condiţii sunt echivalente cu faptul că matricea formei biliniare într-o bază oarecare este simetrică şi are toate valorile proprii reale strict pozitive.

Dacă $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe V, spunem că $(V, < \cdot, \cdot >)$ este un *spaţiu (vectorial) euclidian real.*

Pe spaţiul vectorial real $I\!R^n$ se defineşte un *produs scalar canonic*, dat de $\bar{x} \cdot \bar{y} = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n$, $(\forall)$ $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, $\bar{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in I\!R^n$. Spaţiul vectorial euclidian real $(I\!R^n, \cdot)$ se numeşte *spaţiul euclidian real n-dimensional canonic.* Se notează $I\!R^n = E_3$.

Dacă $\mathcal{B} = \{\bar{x}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V$ este o bază, atunci matricea $(< \bar{x}_i, \bar{x}_j >)_{i,j=\overline{1,n}}$ se numeşte *matricea asociată produsului scalar* în baza $\mathcal{B}$.

Dacă $(V, < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu vectorial euclidian real, atunci se defineşte *norma* unui vector $\bar{x} \in V$ ca fiind $\|\bar{x}\| = \sqrt{< \bar{x}, \bar{x} >}$. Norma este corect definită, deoarece produsul scalar este strict pozitiv definit, adică $< \bar{x}, \bar{x} > \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in V$

Propoziţia 54 *(Inegalitatea Cauchy-Schwarz) Dacă $(V, < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu vectorial euclidian real şi $\bar{x}, \bar{y} \in V$, atunci*

$$|< \bar{x}, \bar{y} >| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|,$$

egalitatea având loc doar dacă vectorii $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ sunt coliniari.

Inegalitatea demonstrată mai sus se mai scrie $-1 \leq \dfrac{< \bar{x}, \bar{y} >}{\|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|} \leq 1$. Se defineşte *măsura unghiului* a doi vectori $\bar{x}, \bar{y} \in V$ ca fiind $\alpha \in [0, \pi]$, astfel încât $\cos \alpha = \dfrac{< \bar{x}, \bar{y} >}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$. Se mai notează $\alpha = \widehat{(\bar{x}, \bar{y})}$.

Propoziţia 55 *(Inegalitatea lui Minkowski, sau inegalitatea triunghiului) Dacă $(V, < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu vectorial euclidian real şi*
$\bar{x}, \bar{y} \in V$, atunci

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|,$$

egalitatea având loc doar dacă vectorii $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ sunt sau unul nul sau ambii nenuli şi coliniari de acelaşi sens (adică $(\exists)\alpha > 0$ astfel încât $\bar{x} = \alpha \bar{y}$).

Aşdar, norma unui spaţiu euclidian real $(V, < \cdot, \cdot >)$ este o funcţie
$\|\cdot\| : V \to I\!R$,care are proprietăţile:

(N1) $\|\bar{x}\| \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in V$, iar $\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (proprietate de strict pozitivitate);

(N2) $\|\alpha \cdot \bar{x}\| = |\alpha| \, \|\bar{x}\|$, $(\forall)\bar{x} \in V$, $\alpha \in I\!R$ (proprietate de omogenitate);

(N3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (inegalitatea triunghiului).

Primele două proprietăţi rezultă din definiţia produsului scalar, iar cea de-a treia este demonstrată în propoziţia 55.

Un spaţiu vectorial real pe care este definită o funcţie $\|\cdot\| : V \to I\!R$,care are proprietăţile (N1)-(N3), se numeşte *spaţiu vectorial real normat.* Un spaţiu euclidian real este deci un spaţiu vectorial real normat.

Un spaţiu vectorial V, pe care este definită o normă (adică o aplicaţie $\|\cdot\| : V \to I\!R$ care are proprietăţile *(N1)-(N3)*, se numeşte *spaţiu vectorial normat.* Nu orice normă defineşte un produs scalar.

Propoziţia 56 *Norma asociată unui produs scalar pe un spaţiu vectorial euclidian real verifică identitatea:*

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 + \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 2\left(\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2\right),$$

numită identitatea paralelogramului.

Reciproc, se poate arăta că dacă o normă verifică identitatea paralelogramului, atunci ea este indusă de un produs scalar. Să notăm că în acest caz produsul scalar se obţine prin formula

$$< \bar{x}, \bar{y} >= \frac{1}{2}\left(\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 - \|\bar{x}\|^2 - \|\bar{y}\|^2\right).$$

În continuare $(V, < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu vectorial euclidian real.

Doi vectori $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ se numesc *vectori ortogonali* dacă $< \bar{x}, \bar{y} >= 0$ şi se scrie $\bar{x} \perp \bar{y}$. Un sistem de vectori $\mathcal{S} = \{\bar{e}_i\}_{i \in I} \subset V$ se numeşte *sistem ortogonal* de vectori dacă nu conţine vectorul nul şi $< \bar{e}_i, \bar{e}_j >= 0$, $(\forall)i \neq j$ (adică vectorii sunt nenuli şi ortogonali doi câte doi). Sistemul $\mathcal{S}$ se numeşte *sistem ortonormat* dacă este ortogonal şi $\|\bar{e}_i\| = 1$, $(\forall)i \in I$ (adică orice vector din sistem are norma 1).

Propoziţia 57 *Dacă un sistem de vectori $\mathcal{S} = \{\bar{e}_i\}_{i \in I} \subset V$ este ortogonal, atunci el este liniar independent.*

O *bază ortogonală* $\mathcal{B} \subset V$ este o bază formată dintr-un sistem ortogonal de vectori. Analog, o *bază ortonormată* $\mathcal{B} \subset V$ este o bază formată dintr-un sistem ortonormat de vectori.

Propoziţia 58 *Dacă* $\mathcal{B} = \{\bar{e}_i\}_{i\in I} \subset V$ *este o bază ortonormată şi* $\bar{x} = x^{i_1}\bar{e}_{i_1} + \cdots + x^{i_p}\bar{e}_{i_p}$, *atunci* $x^{i_1} =<\bar{x}, \bar{e}_{i_1}>, \ldots, x^{i_p} =<\bar{x}, \bar{e}_{i_p}>$.

Propoziţia 59 *Dacă un vector* $\bar{v} \in V$ *este ortogonal pe toţi vectorii unui sistem de generatori* $\mathcal{S} \subset V$ *(în particular* $\mathcal{S}$ *poate fi o bază), atunci este vectorul nul* ($\bar{v} = \bar{0}$).

Propoziţia 60 *Dacă* $M \subset V$ *este o submulţime de vectori atunci* $M^\perp = \{\bar{x} \in V |\ \bar{x} \perp \bar{v},\ (\forall)\bar{v} \in M\} \subset V$ *este un subspaţiu vectorial (numit* subspaţiul vectorial ortogonal *lui* M*, sau* ortogonalul *mulţimii* M*).*

Dacă $\mathcal{S} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\} \subset V$ este un sistem de vectori într-un spaţiu euclidian real, atunci *determinantul Gram* asociat sistemului $\mathcal{S}$ este

$$\Gamma(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \begin{vmatrix} <\bar{v}_1, \bar{v}_1> & \cdots & <\bar{v}_1, \bar{v}_k> \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ <\bar{v}_k, \bar{v}_1> & \cdots & <\bar{v}_k, \bar{v}_k> \end{vmatrix}.$$

Propoziţia 61 *Au loc următoarele proprietăţi ale determinantului Gram:*

1. $\Gamma(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = 0$ *dacă şi numai dacă sistemul* $\mathcal{S}$ *este liniar dependent.*

2. $\Gamma(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) > 0$ *dacă şi numai dacă sistemul* $\mathcal{S}$ *este liniar independent.*

Teorema 5 *(*Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt*) Dacă* $\mathcal{S} = \{\bar{v}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V$ *este un sistem de vectori liniar independenţi, atunci există un sistem ortonormat de vectori* $\mathcal{S}_0 = \{\bar{e}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V$*, astfel încât pentru orice* $k = \overline{1,n}$ *să avem* $\mathcal{L}(\{\bar{e}_i\}_{i=\overline{1,k}}) = \mathcal{L}(\{\bar{v}_i\}_{i=\overline{1,k}})$.

Observaţie. Procedeul de ortogonalizare descris mai sus poate fi aplicat şi în spaţiile vectoriale euclidiene reale care nu sunt finit dimensionale, unui sistem numărabil de vectori liniar independenţi.

Propoziţia 62 *Dacă* $(V, <\cdot,\cdot>)$ *este un spaţiu vectorial euclidian real finit dimensional, atunci:*

1. *Există o bază ortonormată* $\mathcal{B} \subset V$.

2. *Dacă* $W \subset V$ *este un subspaţiu vectorial, atunci restricţia produsului scalar la* W *este un produs scalar pe* W*, iar orice bază ortonormată pe* W *se poate completa la o bază ortonormată pe* V*.*

Folosind rezultatul de mai sus, putem preciza semnul unui determinant Gram.

Propoziţia 63 *Fie* V *un spaţiu vectorial euclidian real, finit dimensional. Dacă* $M \subset V$ *este o submulţime de vectori, atunci*

1. $M^\perp = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{L}(M) = V$.

2. $V = \mathcal{L}(M) \oplus M^\perp$.

În particular, dacă $W \subset V$ *este un subspaţiu vectorial, atunci are loc descompunerea* $V = W \oplus W^\perp$.

Teorema 6 *(Riesz) Dacă* $(V, <\cdot,\cdot>)$ *este un spaţiu vectorial euclidian real, atunci există un izomorfism canonic* $\varphi : V \to V^*$.

Propoziţia 64 *Dacă* $\mathcal{B} = \{\bar{e}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V$ *este o bază şi* $\mathcal{B}^* = \{\bar{e}^i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V^*$ *este baza duală, iar* $(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ *este matricea produsului scalar în baza* $\mathcal{B}$*, atunci dacă se consideră matricea* $(g^{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = (g_{ij})^{-1}_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(I\!R)$*, forma izomorfismului dat de teorema lui Riesz este* $\varphi(v^i\bar{e}_i) = v^i g_{ij}\bar{e}^j$.

9.1 Produsul vectorial şi produsul mixt în E_3

Fie doi vectori $\bar{v}_1 = (a, b, c)$, $\bar{v}_2 = (a', b', c') \in E_3$, unde E_3 este spaţiul vectorial euclidian canonic tridimensional. Vectorul

$$\bar{v} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) \tag{22}$$

se numeşte *produsul vectorial* al vectorilor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ şi se notează $\bar{v} \overset{\text{not.}}{=} \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\} \subset E_3$ baza canonică (baza canonică fiind ortonormată faţă de produsul scalar canonic). Ţinând cont de faptul că

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \bar{e}_3 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \bar{e}_3,$$

produsul vectorial $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ se mai poate scrie ca un determinant formal, în care prima linie conţine numai vectori ai bazei canonice, iar celelalte linii sunt formate din scalari (coordonatele celor doi vectori):

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Propoziţia 65 *Dacă $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in E_3$, atunci produsul vectorial $\bar{v} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ al vectorilor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ are următoarele proprietăţi:*

1. *$\bar{v}$ este un vector perpendicular pe vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$;*
2. *lungimea lui $\bar{v}$, notată $|\bar{v}|$, este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi;*
3. *$\bar{v}$ este nul dacă şi numai dacă vectorii sunt coliniari, iar dacă vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ nu sunt coliniari, sistemul $\mathcal{S} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}\}$ formează o bază la fel orientată ca baza canonică $\mathcal{B} \subset E_3$.*

Propoziţia 66 *Dacă la oricare doi vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in E_3$ se asociază vectorul $\bar{v}$ cu proprietăţile 1.-3. din propoziţia 65, atunci $\bar{v} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$, adică $\bar{v}$ este chiar produsul vectorial al vectorilor $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$.*

Propoziţia 67 *Fie $\mathcal{B}' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} \subset E_3$ o bază ortonormată la fel orientată ca baza canonică $\mathcal{B} \subset E_3$ şi $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in E_3$ doi vectori care au coordonatele în baza $\mathcal{B}'$ date de $[\bar{v}_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $[\bar{v}_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Fie $\bar{v} \in E_3$ astfel încât $[\bar{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$. Atunci $\bar{v} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$.*

Remarcă. Dacă V este un spaţiu vectorial euclidian real 3-dimensional, se poate defini produsul vectorial a doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ folosind o bază ortonormată $\mathcal{B}' \subset V$ şi formula $[\bar{v}]_{\mathcal{B}'}$ din exerciţiul anterior.

Vom studia în continuare proprietăţile produsului vectorial.

Propoziţia 68 *Dacă $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3 \in E_3$ atunci*

1. *$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = -\bar{v}_2 \times \bar{v}_1$ (anticomutativitate);*
2. *$(\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2) \times \bar{v}_3 = \alpha(\bar{v}_1 \times \bar{v}_3) + \beta(\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ şi*
   $\bar{v}_1 \times (\alpha\bar{v}_2 + \beta\bar{v}_3) = \alpha(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) + \beta(\bar{v}_1 \times \bar{v}_3)$, $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. *$(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \times \bar{v}_3 = (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3)\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3)\bar{v}_1$ (formula dublului produs vectorial cu paranteza la stânga);*
4. *$\bar{v}_1 \times (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3)\bar{v}_2 - (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2)\bar{v}_3$ (formula dublului produs vectorial cu paranteza la dreapta);*
5. *$(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \times \bar{v}_3 + (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) \times \bar{v}_1 + (\bar{v}_3 \times \bar{v}_1) \times \bar{v}_2 = \bar{0}$, (identitatea lui Jacobi);*
6. *$(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_3 = \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = \bar{v}_2 \cdot (\bar{v}_3 \times \bar{v}_1) \overset{\text{not.}}{=} [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$ (se numeşte* produsul mixt *al celor trei vectori).*

Să remarcăm din cele stabilite mai sus formula pentru produsul mixt a trei vectori:

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

adică are ca valoare determinantul coordonatelor vectorilor în baza canonică.

Propoziţia 69 *Produsul mixt $[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$ a trei vectori din E_3 este egal cu determinantul coordonatelor vectorilor (aşezate în ordinea dată, pe linii sau pe coloane) într-o bază ortonormată la fel orientată cu baza canonică.*

Observaţie. Propoziţia se poate demonstra şi folosind definiţia produsului mixt sub forma $[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] = \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$. Pentru produsul vectorial $\bar{v}_2 \times \bar{v}_3$ este adevărată formula determinantului formal de tipul (23), care are pe prima linie vectorii unei bazei ortonormate. Ţinând seama că baza este ortonormată, rezultă concluzia.

Propoziţia 70 *Modulul produsul mixt a trei vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in E_3$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.*

Observaţie. Un alt calcul al lui h, care să conducă la soluţie, se poate baza pe observaţia că lungimea proiecţiei unui vector $\bar{v}$ pe un vector $\bar{w}$ este egală cu modulul produsului scalar dintre $\bar{v}$ şi versorul lui $\bar{w}$, deci $\pm h = \bar{v}_1 \cdot \left(\frac{1}{|\bar{v}_2 \times \bar{v}_3|} (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) \right) = \frac{1}{|\bar{v}_2 \times \bar{v}_3|} (\bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)) = \frac{[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]}{|\bar{v}_2 \times \bar{v}_3|}$, de unde rezultatul.

Într-un spaţiu vectorial euclidian tridimensional se poate defini produsul mixt a trei vectori $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ în mod analog $(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_3 = \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = \bar{v}_2 \cdot (\bar{v}_3 \times \bar{v}_1) \overset{\text{not.}}{=} [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$, obţinându-se, ca formulă de calcul, faptul că produsul mixt este egal cu determinatul matricii coordonatelor vectorilor într-o bază ortonormată.