

**Propuneri de subiecte pentru
 proba scrisa de cunostinte de specialitate de Fizica teoretica
 Sesiunile Iulie-Septembrie 2012**

1. Principiile de descriere ale mecanicii cuantice: a) Principiul I (descrierea starilor); b) Principiul al II-lea (descrierea observabilelor)

Rezolvare: a) Principiul I: Starea oricarui sistem cuantic, la un moment dat, este descrisa de un sistem cel mult numarabil $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$, in care $|\psi_k\rangle$ sunt vectori normati [$\langle\psi_k, \psi_k\rangle = 1$] dintr-un spatiu Hilbert separabil asociat sistemului cuantic, iar p_k sunt numere pozitive [numite ponderi asociate vectorilor $|\psi_k\rangle$] care satisfac conditia de normare $\sum_k p_k = 1$.

Comentarii: 1. Spatiul Hilbert separabil asociat unui sistem cuantic se numeste spatiul starilor pentru acel sistem. 2. O stare se numeste pura daca este descrisa de un singur vector normat $|\psi\rangle$, caz in care ponderea asociata este egala cu unitatea $p = 1$. [Tinand cont si de celelalte principii, rezulta ca toti vectorii din raza unitara asociata lui $|\psi\rangle$, $\{c|\psi\rangle, c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}$ descriu aceeasi stare pura.] 3. O stare care nu este pura se numeste mixta, deci o stare mixta este descrisa de cel putin doi vectori normati si cel putin doua ponderi pozitive subunitare si nenule avand suma egala cu unitatea.

b) Principiul II:

PII 1. Orice observabila \mathcal{A} a unui sistem cuantic este descrisa printr-un operator autoadjunct \hat{A} care are domeniul si codomeniul in spatiul Hilbert al starilor.

PII 1a) In cazul unui sistem de n particule, coordonatelor carteziene $x_{(a)}^i$ [unde i indiciaza coordonata iar a particula] si impulsurilor conjugate cu acestea $p_{(a)}^i$, li se asociaza operatorii $\hat{X}_{(a)}^i$ si respectiv $\hat{P}_{(a)}^i$ care satisfac comutatorii canonici definiti prin relatiile

$$\left[\hat{X}_{(a)}^i, \hat{P}_{(a)}^j\right] = i\hbar\delta_j^i\delta_a^b\hat{\mathbf{1}}, \quad \left[\hat{X}_{(a)}^i, \hat{X}_{(b)}^j\right] = \left[\hat{P}_{(a)}^j, \hat{P}_{(a)}^i\right] = 0$$

si obtinuti din regula de cuantificare canonica care consta in substituirea parantezelor Poisson fundamentale cu produsul dintre $\frac{1}{i\hbar}$ si comutatori, simultan cu inlocuirea variabilelor clasice cu operatori si a constantelor c cu operatorul $c\hat{\mathbf{1}}$, unde $\hat{\mathbf{1}}$ este operatorul identitate.

PII 1b) Unei observabile cu corespondent clasic ii corespunde un operator obtinut prin substituirea variabilelor canonice $x_{(a)}^i$ si $p_{(a)}^j$ cu operatorii $\hat{X}_{(a)}^i$ si respectiv $\hat{P}_{(a)}^j$, in simbolul observabilei care reprezinta expresia clasica a acesteia in care sunt simetrizate produsele ce contin factori carora li se asociaza operatori necomutativi.

2. Principiul al III-lea (interpretarea statistica a experientelor de masurare a observabilelor). Mediile observabilelor

Rezolvare: Principiul III:

PIII 1) Valorile spectrale ale operatorului \hat{A} care descrie o observabila \mathcal{A} , sunt singurele valori pe care le poate lua observabila in experientele concepute pentru masurarea acesteia.

PIII 2) Daca in momentul masurarii observabilei \mathcal{A} starea sistemului este descrisa de multimea cel mult numarabila $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$, atunci probabilitatea ca la masurare sa se obtina valoarea a din spectrul discret al operatorului \hat{A} [$a \in \sigma^d(\hat{A})$], este $\mathcal{P}(a) = \sum_k p_k \langle\psi_k|\hat{P}_a|\psi_k\rangle$, [unde \hat{P}_a este proiectorul ortogonal pe subspatiul propriu \mathcal{H}_a asociat valorii spectrale a , iar densitatea de probabilitate in punctul $\alpha \in I_c$ caruia ii corespunde valoarea spectrala $a(\alpha)$ din spectrul continuu al lui \hat{A} [$a(\alpha) \in \sigma^c(\hat{A})$], este

$\mathcal{P}(\alpha) = \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{P}_\alpha | \psi_k \rangle$ [unde \hat{P}_α este proiectorul ortogonal in sens generalizat asociat punctului α].

Comentarii: In cazul unei stari pure $|\psi\rangle$ expresiile anterioare se reduc la $\mathcal{P}_\psi(a) = \langle \psi | \hat{P}_a | \psi \rangle$ si $\mathcal{P}_\psi(\alpha) = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle$, astfel ca $\mathcal{P}(a) = \sum_k p_k \mathcal{P}_{\psi_k}(a)$ si respectiv $\mathcal{P}(\alpha) = \sum_k p_k \mathcal{P}_{\psi_k}(\alpha)$. Prin urmare, putem interpreta ponderile p_k drept probabilitati cu care se realizeaza stările pure $|\psi_k\rangle$ in cadrul stării mixte $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$.

Mediile observabilelor: Substituind probabilitatile $\mathcal{P}(a)$ si densitatile $\mathcal{P}(\alpha)$ din PIII in exprimarea statistica a mediei (pe ansamblul statistic) a observabilei \mathcal{A} , se obtin egalitatile

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_{\{|\psi_k\rangle, p_k\}} &= \sum_{a \in \sigma^d(\hat{A})} a \mathcal{P}(a) + \int_{I_c} d\alpha \alpha \mathcal{P}(\alpha) = \\ &= \sum_{a \in \sigma^d(\hat{A})} a \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{P}_a | \psi_k \rangle + \int_{I_c} d\alpha \alpha \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{P}_\alpha | \psi_k \rangle = \\ &= \sum_k p_k \langle \psi_k | \left\{ \sum_{a \in \sigma^d(\hat{A})} a \hat{P}_a + \int_{I_c} d\alpha \alpha \hat{P}_\alpha \right\} | \psi_k \rangle \\ &= \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle = \sum_k p_k \langle \hat{A} \rangle_{\psi_k}, \end{aligned}$$

deoarece acolada contine descompunerea spectrala a operatorului \hat{A} .

3. Principiul al IV-lea (legea de evolutie).

Rezolvare: Enunt Orice sistem admite o observabila numita energie, posibil dependenta de timp, careia i se asociaza un operator, de asemenea posibil dependent de timp, numit Hamiltonian si notat cu $\hat{H}(t)$, care determina evolutia momentana a stării $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$ dupa legea

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_k(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi_k(t)\rangle, \quad p_k = \text{constant in timp.}$$

(Ecuatia de mai sus se numeste ecuatia Schrodinger generalizata)

4. Principiul al V-lea (influenta experientelor de masurare a observabilelor asupra stării)-cazul stării pure.

Rezolvare: Enunt

PV1) Daca in urma masurării observabilei \mathcal{A} pe starea pura $|\psi\rangle$ se obtine valoarea a din spectrul discret al lui \hat{A} , atunci starea sistemului imediat dupa masurare este descrisa de proiectia normata a vectorului $|\psi\rangle$ pe subspatiul propriu \mathcal{H}_a , adica de vectorul

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_a |\psi\rangle}{\|\hat{P}_a |\psi\rangle\|},$$

unde \hat{P}_a este proiectorul ortogonal pe subspatiul \mathcal{H}_a .

PV2) Daca in urma masurării observabilei \mathcal{A} pe starea pura $|\psi\rangle$, cu un aparat cu selectivitate Δ in scara parametrului α , se obtine valoarea spectrala $a(\alpha_0)$ din spectrul continuu al lui \hat{A} , atunci starea sistemului imediat dupa masurare este descrisa de vectorul

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_{\alpha_0, \Delta} |\psi\rangle}{\|\hat{P}_{\alpha_0, \Delta} |\psi\rangle\|},$$

unde $\hat{P}_{\alpha_0, \Delta} = \int_{\alpha_0 - \frac{\Delta}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta}{2}} d\alpha \hat{P}_\alpha$ este proiectorul ortogonal pe subspatiul asociat intervalului spectral $(a(\alpha_0 - \frac{\Delta}{2}), a(\alpha_0 + \frac{\Delta}{2}))$ [din spectrul continuu al lui \hat{A}] corespunzator subintervalului $(\alpha_0 - \frac{\Delta}{2}, \alpha_0 + \frac{\Delta}{2}) \subset I_c$ din intervalul total al parametrului α .

5. Teoria cuantica a momentului cinetic. Algebra operatorilor moment cinetic.

Rezolvare: O observabila de tip moment cinetic este descrisa, prin definitie, de un operator vectorial $\widehat{\vec{J}}$ ale carui componente $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$, asociate axelor unui sistem cartezian $Ox_1x_2x_3$, satisfac urmatoarea algebra de comutatori

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hbar\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hbar\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hbar\hat{J}_2. \quad (1)$$

Baza $(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ se numeste baza carteziana a algebrei moment cinetic. Cazuri particulare de observabile moment cinetic sunt: momentul cinetic orbital $(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$ si momentul cinetic de spin $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$.

Algebra momentului cinetic (1) conduce la comutarea operatorului $\widehat{\vec{J}}^2 \equiv \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$ cu toate componentele $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ si deci cu orice combinatie a acestora. In determinarea spectrului operatorilor moment cinetic si a actiunilor acestora, o alta baza utila este cea constituita din operatorii $(\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2, \hat{J}_3)$. Din algebra anterioara (1) se deduc comutatorii care definesc algebra momentului cinetic in noua baza

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar\hat{J}_3.$$

6. Teoria cuantica a momentului cinetic. Actiunea operatorilor moment cinetic asupra bazei standard a unui spatiu ireductibil.

Rezolvare: Prin definitie, un spatiu ireductibil \mathcal{E}_j este un spatiu invariant [fata de actiunea operatorilor moment cinetic] care nu admite subspatii invariante netriviale [adica diferite de subspatiul nul intins de vectorul nul, $\{0\}$, si intregul spatiu \mathcal{E}_j]. Un spatiu ireductibil \mathcal{E}_j este determinat pana la o echivalenta unitara, de ponderea de moment cinetic j care poate lua doar valorile $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ [adica doar valori semiintregi pozitive si intregi nenegative]. Dimensiunea spatiului ireductibil de pondere j este $2j + 1$. Baza standard a unui spatiu ireductibil \mathcal{E}_j este una ortonormata formata din vectorii proprii comuni pentru operatorii $\widehat{\vec{J}}^2$ si \hat{J}_3 . Vectorii bazei standard se noteaza cu $|jm\rangle$ si satisfac ecuatiile de valori proprii

$$\widehat{\vec{J}}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle, \quad \hat{J}_3 |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle, \quad m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}.$$

Actiunea operatorilor \hat{J}_\pm asupra bazei standard este exprimata de ecuatiile

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |jm\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |jm+1\rangle, \\ \hat{J}_- |jm\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |jm-1\rangle \end{aligned}$$

[care arata ca \hat{J}_+ are rolul unui operator de ‘‘ridicare’’ iar \hat{J}_- al unui operator de ‘‘coborare’’ pentru valorile proprii ale lui \hat{J}_3].

7. Oscilatorul armonic in mecanica cuantica. Operatori de creare si anihilare. Exprimarea operatorilor Hamilton \hat{H} si numar \hat{N} .

Rezolvare: Operatorii adimensionali de anihilare (\hat{a}) si creare (\hat{a}^\dagger) se definesc prin relatiile

$$\hat{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} - \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right) \quad (2)$$

unde

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \quad (3)$$

Folosind comutatorul canonic $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\hat{\mathbf{1}}$ si definitiile (2) se obtine comutatorul

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbf{1}} \Leftrightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{\mathbf{1}}. \quad (4)$$

In termenii operatorilor (2), operatorul Hamilton al oscilatorului armonic liniar,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2, \quad (5)$$

capata exprimarea

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{1}}\right). \quad (6)$$

Definim operatorul "numar" prin

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (7)$$

Folosind relatiile de comutare (4) si definitia (7) se obtin comutatorii

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad (8)$$

care conduc la relatiile

$$\hat{N}\hat{a} = \hat{a}(\hat{N} - \hat{\mathbf{1}}), \quad \hat{N}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{N} + \hat{\mathbf{1}}). \quad (9)$$

Folosind operatorul "numar" (7), Hamiltonianul (6) se exprima sub forma

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{1}}\right). \quad (10)$$

8. Oscilatorul armonic in mecanica cuantica. Baza standard, spectrul operatorilor Hamilton \hat{H} si numar \hat{N} .

Rezolvare: Sistemul fizic (oscilatorul liniar armonic) are algebra observabilelor cuantice generata de operatorii autoadjuncti $\{\hat{X}, \hat{P}\}$. Prin urmare, un sistem complet de observabile compatibile (SCOC) contine un singur operator. Alegem SCOC-ul constituit din operatorul \hat{N} . Notam cu $\{|\lambda\rangle : \lambda \in \sigma(\hat{N})\}$ sistemul complet si ortonormat de vectori proprii ai operatorului \hat{N} . Cum SCOC-ul ales este constituit numai din operatorul \hat{N} , concluzionam ca spectrul ultimului este nedegenerat. Ortonormarea si completitudinea sistemului de vectori $\{|\lambda\rangle : \lambda \in \sigma(\hat{N})\}$ se exprima prin relatiile

$$\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (11)$$

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\hat{N})} |\lambda\rangle\langle\lambda| = \hat{\mathbf{1}}. \quad (12)$$

Identificam multimea spectrala $\sigma(\hat{N})$. Fie $\lambda \in \sigma(\hat{N})$, atunci \hat{N} satisface ecuatia de valori proprii

$$\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle. \quad (13)$$

Multiplicam la stanga ecuatia de valori proprii (13). Folosind definitia (7) a operatorului \hat{N} si pozitivitatea produsului Hermitic, obtinem

$$0 \leq \|\hat{a}|\lambda\rangle\|^2 = \langle\lambda|\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \lambda, \quad (14)$$

relatie care arata ca valorile proprii ale operatorului numar sunt numere reale pozitive

$$\sigma(\hat{N}) \subset [0, \infty). \quad (15)$$

Cea de-a doua relatie din (9) conduce la implicatia

$$\lambda \in \sigma(\hat{N}) \Rightarrow \lambda + 1 \in \sigma(\hat{N}). \quad (16)$$

Implicatia mentionata se deduce simplu multiplicand cea de-a doua relatie din (9), la dreapta cu vectorul ket $|\lambda\rangle$. Procedeul mentionat conduce la faptul ca $\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle$ este vector propriu corespunzator valorii proprii $\lambda + 1$

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle) = (\lambda + 1)(\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle). \quad (17)$$

Rezultatele (15) si (16) privind multimea spectrala $\sigma(\hat{N})$ permit reprezentarea ultimei sub forma

$$\sigma(\hat{N}) = \{\lambda_m + k : k \in \mathbb{N}\}, \quad (18)$$

unde

$$\lambda_m = \min \left\{ \lambda : \lambda \in \sigma(\hat{N}) \right\}. \quad (19)$$

Identificam valoarea proprie minima λ_m . Multiplicam la dreapta prima relatie din (9) cu vectorul ket $|\lambda_m\rangle$ si obtinem

$$\hat{N}(\hat{a} |\lambda_m\rangle) = (\lambda_m - 1)(\hat{a} |\lambda_m\rangle). \quad (20)$$

Coroborand relatiile (19) si (20) deducem ca

$$\hat{a} |\lambda_m\rangle = 0. \quad (21)$$

Particularizand (14) pentru $\lambda = \lambda_m$ si folosind (21) concluzionam ca valoarea spectrala minima a operatorului \hat{N} este egala cu zero

$$\lambda_m = 0. \quad (22)$$

Introducem rezultatul (22) in (18) identificam

$$\sigma(\hat{N}) = \{k : k \in \mathbb{N}\}, \quad (23)$$

iar sistemul complet si ortonormat de vectori proprii ai operatorului \hat{N} (baza standard) este

$$\{|k\rangle : k \in \mathbb{N}\}. \quad (24)$$

Vectorul propriu nul [corespunzator valorii proprii (22)] se numeste *vector de vid*.

Pe baza rezultatului (23) si a legaturii (10) dintre operatorii \hat{H} si \hat{N} , determinam spectrul operatorului \hat{H}

$$\sigma(\hat{H}) = \left\{ \hbar\omega \left(k + \frac{1}{2} \right) : k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (25)$$

9. Oscilatorul armonic in mecanica cuantica. Actiunea operatorilor de creare si anihilare asupra bazei standard.

Rezolvare: Pentru a deduce actiunea operatorilor de creare si anihilare asupra vectorilor bazei standard $\{|k\rangle : k \in \mathbb{N}\}$ exploatam relatiile (9) precum si nedegenerarea spectrului operatorului \hat{N} . Multiplicand la dreapta (9) cu vectorul ket $|k\rangle$ deducem

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a} |k\rangle) &= (k - 1)(\hat{a} |k\rangle), \\ \hat{N}(\hat{a}^\dagger |k\rangle) &= (k + 1)(\hat{a}^\dagger |k\rangle), \end{aligned}$$

care, in virtutea nedegenerarii spectrului operatorului \hat{N} , conduc la

$$\hat{a} |k\rangle = d_k |k - 1\rangle, \quad (26)$$

$$\hat{a}^\dagger |k\rangle = c_k |k + 1\rangle, \quad (27)$$

unde $\{d_k, c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sunt niste numere complexe [in particular, actiunea operatorului de anihilare pe vectorul de vid (21) conduce la $d_0 = 0$]. Pentru a determina numerele d_k [$k > 0$] alegem conventia de faza [prin absorbtia eventuala a unor factori de faza in vectorii proprii ai operatorului \hat{N}] $d_k = |d_k|$, particularizam (14) la $|\lambda\rangle = |k\rangle$ [$k > 0$] si folosim (26). Astfel, obtinem

$$|d_k|^2 = k,$$

care impreuna cu conventia de faza introdusa anterior conduce la

$$d_k = \sqrt{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Introducem (28) in (26) si identificam

$$\hat{a} |k\rangle = \sqrt{k} |k-1\rangle. \quad (29)$$

Aplicam \hat{a}^\dagger pe (29) si folosim ecuatia de valori proprii pentru \hat{N} (13) [corespunzatoare alegerii $\lambda = k-1$] precum si (27) determinam

$$c_{k-1} = \sqrt{k} \Rightarrow c_k = \sqrt{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Din (30) si (27) identificam actiunea operatorului de creare asupra bazei standard

$$\hat{a}^\dagger |k\rangle = \sqrt{k+1} |k+1\rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

10. Evolutia mediilor

Rezolvare: Deoarece schimbarea de descriere se face prin transformari unitare care nu modifica valoarea medie a unei observabile, putem deduce mai simplu exprimarea derivatei temporale a mediei in descrierea Heisenberg [DH] in care variaza doar observabilele [nu si starile]. In DH media observabilei \mathcal{A} la momentul t este

$$\langle \hat{A} \rangle (t) = \langle \psi_H(t) | \hat{A}_H(t) | \psi_H(t) \rangle = \langle \psi_H(t_0) | \hat{A}_H(t) | \psi_H(t_0) \rangle \quad (32)$$

astfel ca se obtine simplu

$$\frac{d \langle \hat{A} \rangle (t)}{dt} = \left\langle \psi_H(t_0) \left| \frac{d \hat{A}_H(t)}{dt} \right| \psi_H(t_0) \right\rangle, \quad (33)$$

adica derivata temporala a mediei este egala cu media derivatei temporale a observabilei in DH. Folosim acum legea de evolutie momentana a observabilei in DH

$$\frac{d \hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)] + \left(\frac{\partial \hat{A}_S(t)}{\partial t} \right)_H, \quad (34)$$

si obtinem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \hat{A} \rangle (t)}{dt} &= \left\langle \psi_H(t_0) \left| \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)] + \frac{\partial \hat{A}_S(t)}{\partial t} \right\} \right| \psi_H(t_0) \right\rangle, \\ \frac{d \langle \hat{A} \rangle (t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle (t) + \left\langle \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} \right\rangle (t). \end{aligned} \quad (35)$$

Am tinut cont ca mediile sunt independente de descriere, ultima relatie fiind valabila in general, in orice descriere.

Variatia mediei unei observabile in unitatea de timp centrata pe momentul t este determinata de media comutatorului observabilei cu Hamiltonianul si de media variatei explicite a observabilei in unitatea de timp. In cazul observabilelor care nu depind explicit de timp [$\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = 0$] se obtine relatia

$$\frac{d \langle \hat{A} \rangle (t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle (t) \quad (36)$$

care arata ca media comutatorului observabilei cu Hamiltonianul determina variatia mediei in timp.

11. Sa se scrie ecuatiile de camp corespunzatoare actiunii Lagrangiene

$$S[Q^a] = \int d^D x \mathcal{L}(Q^a, \partial_{\mu_1} Q^a, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} Q^a),$$

in ipoteza ca toate campurile sunt bosonice.

Rezolvare: Ecuatiile de camp corespunzatoare acestei actiuni in ipoteza mentionata au forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta Q^a(x)} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^a}(x) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Q^a)}(x) \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu Q^a)}(x) \right) + \dots \\ &+ (-)^l \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} Q^a)}(x) \right) = 0, \end{aligned}$$

unde $\delta S/\delta Q^a(x)$ sunt derivatele functionale ale actiunii.

12. Sa se scrie actiunea Lagrangiana si sa se deduca ecuatiile de camp pentru campul scalar real liber. Care este legea de transformare a campului la transformari Lorentz-Poincare? Care sunt caracteristicile particulelor descrise de acest camp?

Rezolvare: Actiunea Lagrangiana pentru campul scalar real liber are expresia

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{M_4} d^4 x [(\partial_\mu \varphi(x)) (\partial^\mu \varphi(x)) - m^2 \varphi^2(x)],$$

unde $\varphi : M_4 \rightarrow \mathbb{R}$, cu M_4 spatiu Minkowski 4-dimensional. Particulele asociate campului φ poarta numele de bosoni scalari reali. Marimea m^2 este o constanta reala strict pozitiva, $m^2 > 0$, interpretata ca patratul masei bosonilor scalari reali.

La transformari Lorentz-Poincaré

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

unde $\Lambda^\mu{}_\nu$ sunt elementele unei matrici Lorentz ($\Lambda^T g \Lambda = g$, cu g tensorul metric) iar a^μ este un cuadrivector constant, campul scalar real liber este prin definitie invariant

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x).$$

Deoarece densitatea de Lagrangian depinde doar de camp si derivatele spatio-temporale de ordinul unu ale acestuia

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi(x)) (\partial^\mu \varphi(x)) - m^2 \varphi^2(x)],$$

rezulta ca ecuatia de camp va avea forma simpla

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}(x) \right) = 0.$$

Prin calcul direct rezulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) = -m^2 \varphi(x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}(x) = \partial^\mu \varphi(x).$$

Daca inlocuim ultimele rezultate in expresia lui $\delta S/\delta \varphi(x)$ si facem notatia

$$\partial_\mu^x \partial_x^\mu \equiv \square_x$$

[operatorul lui d'Alembert], obtinem ecuatia de camp

$$(\square_x + m^2) \varphi(x) = 0,$$

numita ecuatia Klein-Gordon.

Principalele caracteristici ale bosonilor scalari reali sunt: masa nenula, sarcina electrica nula [deoarece campul φ ia valori reale] si spin 0 [deoarece se poate arata ca tensorul moment cinetic total se reduce la tensorul moment cinetic orbital].

13. Sa se scrie actiunea Lagrangiana si sa se deduca ecuatiile de camp pentru campul scalar complex liber. Care este legea de transformare a campurilor la transformari Lorentz-Poincare? Care sunt caracteristicile particulelor descrise de acest camp?

Rezolvare: Actiunea Lagrangiana pentru campul scalar complex liber are expresia

$$S[\varphi, \varphi^*] = \int_{M_4} d^4x [(\partial_\mu \varphi(x)) (\partial^\mu \varphi^*(x)) - m^2 \varphi(x) \varphi^*(x)],$$

unde $\varphi, \varphi^* : M_4 \rightarrow \mathbb{C}$, cu M_4 spatiu Minkowski 4-dimensional, iar operatia $*$ este operatia de conjugare complexa. Particulele asociate campurilor φ si φ^* poarta numele de bosoni scalari complecsi. Marimea m^2 este o constanta reala strict pozitiva, $m^2 > 0$, interpretata ca patratul masei bosonilor scalari complecsi.

La transformari Lorentz-Poincaré

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

unde $\Lambda^\mu{}_\nu$ sunt elementele unei matrici Lorentz ($\Lambda^T g \Lambda = g$, cu g tensorul metric) iar a^μ este un cuadvivector constant, campul scalar complex liber este prin definitie invariant

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x), \quad \varphi^*(x) \rightarrow \varphi'^*(x') = \varphi^*(x).$$

Deoarece densitatea de Lagrangian depinde doar de campuri si derivatele spatio-temporale de ordinul unu ale acestora

$$\mathcal{L}(\varphi(x) \varphi^*(x), \partial_\mu \varphi(x), \partial_\mu \varphi^*(x)) = (\partial_\mu \varphi(x)) (\partial^\mu \varphi^*(x)) - m^2 \varphi(x) \varphi^*(x),$$

rezulta ca ecuatiile de camp vor avea forma simpla

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}(x) \right) = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta \varphi^*(x)} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*}(x) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)}(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Prin calcul direct rezulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) &= -m^2 \varphi^*(x), & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}(x) &= \partial^\mu \varphi^*(x), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*}(x) &= -m^2 \varphi(x), & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)}(x) &= \partial^\mu \varphi(x) \end{aligned}$$

Daca inlocuim ultimele rezultate in expresiile lui $\delta S/\delta \varphi(x)$ si $\delta S/\delta \varphi^*(x)$ si facem notatia

$$\partial_\mu^x \partial_x^\mu \equiv \square_x$$

[operatorul lui d'Alembert], obtinem ecuatiile de camp

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \varphi(x) &= 0, \\ (\square_x + m^2) \varphi^*(x) &= 0, \end{aligned}$$

deci cate o ecuatie Klein-Gordon pentru fiecare camp.

Principalele caracteristici ale bosonilor scalari complecsi sunt: masa nenula, sarcina electrica nenula [deoarece camprile φ si φ^* sunt complex conjugatul unul altuia] si spin 0 [deoarece se poate arata ca tensorul moment cinetic total se reduce la tensorul moment cinetic orbital].

14. Sa se arate ca o teorie de camp care prezinta un curent conservativ conduce automat la existenta unei sarcini conservative.

Rezolvare: Enuntul este echivalent cu demonstrarea urmatoarei proprietati. Fie $S[Q^a]$ actiunea unei teorii de camp (pentru simplitate o alegem a evolua pe un spatiu-timp de tip Minkowski cuadridimensional) si $\delta S/\delta Q^a(x) = 0$ ecuatiile de camp asociate. Presupunem ca teoria admite un curent conservativ $j^\mu(x) = j^\mu(Q^a(x), \partial_\mu Q^a(x), \dots)$. Atunci, teoria admite sarcina conservativa

$$G(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0(x),$$

unde j^0 este componenta temporala ($\mu = 0$) a curentului conservativ.

Pentru a demonstra proprietatea, plecam de la ipoteza ca $j^\mu(x)$ este curent conservativ pentru aceasta teorie, deci exista niste functii m^a care pot depinde de campuri si derivatele lor astfel incat

$$\partial_\mu j^\mu(x) = m^a(x) \frac{\delta S}{\delta Q^a(x)}.$$

Integram ultima relatie dupa variabilele spatiale ale lui M_4 si obtinem

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_\mu j^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x m^a(x) \frac{\delta S}{\delta Q^a(x)},$$

relatie echivalenta cu

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x [\partial_0 j^0(x) + \partial_i j^i(x)] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x m^a(x) \frac{\delta S}{\delta Q^a(x)}.$$

Putem intotdeauna alege niste conditii la limita asupra campurilor incat $\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_i j^i(x) = 0$, astfel incat ultima formula devine

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_0 j^0(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x m^a(x) \frac{\delta S}{\delta Q^a(x)},$$

sau, deoarece x^0 si x^i sunt variabile independente,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0(x) \right) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x m^a(x) \frac{\delta S}{\delta Q^a(x)}.$$

Am utilizat sistemul natural de unitati $c = 1$, $\hbar = 1$, in care $x^0 = t$. Ultima relatie este tocmai relatie de definitie a sarcinii conservative $G(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0(x)$, ceea ce demonstreaza proprietatea.

15. Enuntati teorema Noether pentru cazul teoriilor de camp bosonice presupunand ca transformarile de simetrie rigida sunt date in forma infinitesimala.

Rezolvare: Fie transformarile rigide infinitesimale cu N parametri $\{\varepsilon^\Delta\}_{\Delta=1, \dots, N}$ [$|\varepsilon^\Delta| \ll 1, \forall \Delta$]

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon x^\mu &\equiv x'^\mu - x^\mu = X_\Delta^\mu(x) \varepsilon^\Delta, \\ \delta_\varepsilon Q^a(x) &\equiv Q'^a(x') - Q^a(x) = \Phi_\Delta^a(x) \varepsilon^\Delta, \end{aligned}$$

care presupunem ca sunt transformari de simetrie pentru o teorie de camp, descrisa de actiunea Lagrangiana

$$S[Q^a] = \int d^Dx \mathcal{L}(Q^a, \partial_\mu Q^a),$$

adica

$$\delta_\varepsilon S[Q^a] \equiv (S[Q'^a] - S[Q^a])_{\text{ordinul 1 in } \varepsilon} = 0.$$

Atunci, teoria de camp considerata admite N curenti conservativi

$$\begin{aligned} j_\Delta^\mu(x) &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^a)}(x) \partial_\nu Q^a(x) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}(Q^a(x), \partial_\mu Q^a(x)) \right] X_\Delta^\nu(x) \\ &\quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^a)}(x) \Phi_\Delta^a(x). \end{aligned}$$

Observatie. Evident, ultima relatie arata ca teoria de camp in discutie admite automat N sarcini conservative

$$G_{\Delta}(x^0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j_{\Delta}^0(x),$$

unde j_{Δ}^0 sunt componentele temporale ale curentilor conservativi.

16. Scrieti forma generala a solutiei ecuatiei Klein-Gordon pentru campul scalar real liber.

Rezolvare: Solutia generala a ecuatiei Klein-Gordon pentru campul scalar real liber

$$(\square_x + m^2)\varphi(x) = 0$$

are forma

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0(\vec{p})} [a(p) \exp(-ipx) + a^*(p) \exp(ipx)],$$

unde $a, a^* : M_4 \rightarrow \mathbb{C}$, iar cuadriimpulsurile p sunt asociate frecventelor pozitive de pe foaia de masa

$$\begin{aligned} [p = (p^0(\vec{p}), \vec{p}), \quad p^2 - m^2 = 0, \quad p^0(\vec{p}) > 0] \\ \Leftrightarrow p^0(\vec{p}) = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Am utilizat notatia $px \equiv p^0(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$, cu \cdot operatia de produs scalar in \mathbb{R}^3 .

17. Aratati invarianta actiunii campului scalar real liber la translatii spatio-temporale si calculati curentul conservativ asociat.

Rezolvare: Pornim de la actiunea Lagrangiana a campului scalar real liber

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{M_4} d^4x [(\partial_{\mu}\varphi(x))(\partial^{\mu}\varphi(x)) - m^2\varphi^2(x)].$$

Vom demonstra invarianta acesteia la transformarile Poincaré

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}, \\ \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x), \end{aligned}$$

unde ε^{μ} este un cuadvecteur constant ($\partial\varepsilon^{\mu}/\partial x^{\nu} = 0$). Din prima relatie rezulta imediat

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu}, \quad d^4x' = d^4x, \quad \partial'_{\mu} = \partial_{\mu},$$

astfel incat utilizand si $\varphi'(x') = \varphi(x)$ putem scrie

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{M_4} d^4x' [(\partial'_{\mu}\varphi'(x'))(\partial'^{\mu}\varphi'(x')) - m^2\varphi'^2(x')] \\ &= \frac{1}{2} \int_{M_4} d^4x [(\partial_{\mu}\varphi(x))(\partial^{\mu}\varphi(x)) - m^2\varphi^2(x)], \end{aligned}$$

sau echivalent

$$S[\varphi'] = S[\varphi].$$

Pe baza acestei invariante, aplicam teoreme Noether in cazul in care simetriile rigide sunt in forma finita si obtinem curentii conservativi

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu}(x) &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}(x) (\partial_{\rho}\varphi(x)) - \delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_{\mu}\varphi(x)) \right] \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} \\ &\quad - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}(x) \left(\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}(x) = \partial^{\mu}\varphi(x), \quad \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} = \delta^{\rho}_{\nu}, \quad \left(\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} = 0,$$

deducem in continuare (inlocuind expresia concreta a densitatii de Lagrangian) curentii conservativi

$$T^{\mu}_{\nu}(x) = (\partial^{\mu}\varphi(x))(\partial_{\nu}\varphi(x)) - \delta^{\mu}_{\nu}\frac{1}{2}[(\partial_{\rho}\varphi(x))(\partial^{\rho}\varphi(x)) - m^2\varphi^2(x)].$$

Componentele $T^{\mu}_{\nu}(x)$ definesc un tensor numit cuadritensorul energie-impuls al campului scalar real liber. Este interesant de remarcat ca acest tensor este simetric in cazul campului scalar real liber

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x).$$

18. Scrieti forma generala a solutiilor ecuatiilor Klein-Gordon pentru campul scalar complex liber.

Rezolvare: Solutiile generale ale ecuatiilor Klein-Gordon pentru campul scalar complex liber

$$(\square_x + m^2)\varphi(x) = 0, \quad (\square_x + m^2)\varphi^*(x) = 0$$

au forma

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0(\vec{p})} [a(p)\exp(-ipx) + b^*(p)\exp(ipx)], \\ \varphi^*(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0(\vec{p})} [b(p)\exp(-ipx) + a^*(p)\exp(ipx)]\end{aligned}$$

unde $a, a^*, b, b^* : M_4 \rightarrow \mathbb{C}$, iar cuadriimpulsurile p sunt asociate frecventelor pozitive de pe foaia de masa

$$\begin{aligned}[p = (p^0(\vec{p}), \vec{p}), \quad p^2 - m^2 = 0, \quad p^0(\vec{p}) > 0] \\ \Leftrightarrow p^0(\vec{p}) = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.\end{aligned}$$

Am utilizat notatia $px \equiv p^0(\vec{p})x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$, cu \cdot operatia de produs scalar in \mathbb{R}^3 .

19. Aratati invarianta actiunii campului scalar complex liber la translatii spatio-temporale si calculati curentul conservativ asociat.

Rezolvare: Pornim de la actiunea Lagrangiana a campului scalar complex liber

$$S[\varphi, \varphi^*] = \int_{M_4} d^4x [(\partial_{\mu}\varphi(x))(\partial^{\mu}\varphi^*(x)) - m^2\varphi(x)\varphi^*(x)].$$

Vom demonstra invarianta acesteia la transformarile Poincaré

$$\begin{aligned}x^{\mu} &\rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}, \\ \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x), \\ \varphi^*(x) &\rightarrow \varphi'^*(x') = \varphi^*(x),\end{aligned}$$

unde ε^{μ} este un cuadrivector constant ($\partial\varepsilon^{\mu}/\partial x^{\nu} = 0$). Din prima relatie rezulta imediat

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu}, \quad d^4x' = d^4x, \quad \partial'_{\mu} = \partial_{\mu},$$

astfel incat utilizand si faptul ca $\varphi'(x') = \varphi(x)$, $\varphi'^*(x') = \varphi^*(x)$ putem scrie

$$\begin{aligned}&\int_{M_4} d^4x' [(\partial'_{\mu}\varphi'(x'))(\partial'^{\mu}\varphi'^*(x')) - m^2\varphi'(x')\varphi'^*(x')] \\ &= \int_{M_4} d^4x [(\partial_{\mu}\varphi(x))(\partial^{\mu}\varphi^*(x)) - m^2\varphi(x)\varphi^*(x)],\end{aligned}$$

sau echivalent

$$S[\varphi', \varphi'^*] = S[\varphi, \varphi^*].$$

Pe baza acestei invariante, aplicam teoreme Noether in cazul in care simetriile rigide sunt in forma finita si obtinem curentii conservativi

$$T^{\mu}_{\nu}(x) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}(x) (\partial_{\rho} \varphi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^*)}(x) (\partial_{\rho} \varphi^*(x)) - \delta_{\rho}^{\mu} \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi^*(x), \partial_{\mu} \varphi(x), \partial_{\mu} \varphi^*(x)) \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}(x) \left(\frac{\partial \varphi'(x')}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^*)}(x) \left(\frac{\partial \varphi'^*(x')}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} \right].$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}(x) &= \partial^{\mu} \varphi^*(x), & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^*)}(x) &= \partial^{\mu} \varphi(x), \\ \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} &= \delta_{\nu}^{\rho}, & \left(\frac{\partial \varphi'(x')}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0} &= 0 = \left(\frac{\partial \varphi'^*(x')}{\partial \varepsilon^{\nu}} \right)_{\varepsilon^{\nu}=0}, \end{aligned}$$

deducem in continuare (inlocuind expresia concreta a densitatii de Lagrangian) curentii conservativi

$$T^{\mu}_{\nu}(x) = (\partial^{\mu} \varphi^*(x)) (\partial_{\nu} \varphi(x)) + (\partial^{\mu} \varphi(x)) (\partial_{\nu} \varphi^*(x)) - \delta_{\nu}^{\mu} [(\partial_{\rho} \varphi(x)) (\partial^{\rho} \varphi^*(x)) - m^2 \varphi(x) \varphi^*(x)].$$

Componentele $T^{\mu}_{\nu}(x)$ definesc un tensor numit cuadritensorul energie-impuls al campului scalar complex liber. Este interesant de remarcat ca acest tensor este simetric in cazul campului scalar complex liber

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x).$$

20. Aratati invarianta actiunii campului scalar complex liber la transformari rigide uniparametrice si calculati curentul conservativ asociat.

Rezolvare: Pornim de la actiunea Lagrangiana a campului scalar complex liber

$$S[\varphi, \varphi^*] = \int_{M_4} d^4x [(\partial_{\mu} \varphi(x)) (\partial^{\mu} \varphi^*(x)) - m^2 \varphi(x) \varphi^*(x)].$$

Vom demonstra invarianta acesteia la transformarile rigide uniparametrice

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu}, \\ \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x') = [\exp(-iq\varepsilon)] \varphi(x), \\ \varphi^*(x) &\rightarrow \varphi'^*(x') = [\exp(iq\varepsilon)] \varphi^*(x), \end{aligned}$$

unde ε este un parametru scalar constant ($\partial\varepsilon/\partial x^{\nu} = 0$), iar $q > 0$ este o constanta arbitrara. Din prima relatie rezulta imediat

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu}, \quad d^4x' = d^4x, \quad \partial'_{\mu} = \partial_{\mu},$$

astfel incat utilizand si expresiile lui $\varphi'(x')$ si $\varphi'^*(x')$, precum si faptul ca $\partial\varepsilon/\partial x^{\nu} = 0$, putem scrie

$$\begin{aligned} \partial'_{\mu} \varphi'(x') &= \partial_{\mu} \{[\exp(-iq\varepsilon)] \varphi(x)\} = \exp(-iq\varepsilon) \partial_{\mu} \varphi(x), \\ (\partial'^{\mu} \varphi'^*(x')) &= \partial^{\mu} \{[\exp(iq\varepsilon)] \varphi^*(x)\} = \exp(iq\varepsilon) \partial^{\mu} \varphi^*(x). \end{aligned}$$

Pe baza relatiilor anterioare, deducem

$$\begin{aligned} &\int_{M_4} d^4x' [(\partial'_{\mu} \varphi'(x')) (\partial'^{\mu} \varphi'^*(x')) - m^2 \varphi'(x') \varphi'^*(x')] \\ &= \exp(-iq\varepsilon) \left\{ \int_{M_4} d^4x [(\partial_{\mu} \varphi(x)) (\partial^{\mu} \varphi^*(x)) - m^2 \varphi(x) \varphi^*(x)] \right\} \exp(iq\varepsilon), \end{aligned}$$

sau echivalent, deoarece $\exp(-iq\varepsilon)\exp(iq\varepsilon) = 1$

$$S[\varphi', \varphi'^*] = S[\varphi, \varphi^*].$$

Pe baza acestei invariante, aplicam teoreme Noether in cazul in care simetriile rigide sunt in forma finita si obtinem curentul conservativ

$$\begin{aligned} T^\mu(x) = & \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(x) (\partial_\rho \varphi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}(x) (\partial_\rho \varphi^*(x)) \right. \\ & \left. - \delta_\rho^\mu \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi^*(x), \partial_\mu \varphi(x), \partial_\mu \varphi^*(x)) \right] \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(x) \left(\frac{\partial \varphi'(x')}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}(x) \left(\frac{\partial \varphi'^*(x')}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(x) &= \partial^\mu \varphi^*(x), & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}(x) &= \partial^\mu \varphi(x), & \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi'(x')}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= -iq\varphi(x), & \left(\frac{\partial \varphi'^*(x')}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= iq\varphi^*(x), \end{aligned}$$

deducem in continuare curentul conservativ

$$j^\mu(x) = iq[\varphi(x)\partial^\mu \varphi^*(x) - \varphi^*(x)\partial^\mu \varphi(x)].$$