

## Examenul de licență,

### Domeniul de licență ȘTIINȚA MEDIULUI – promoția 2013

Valabil pentru sesiunile de licență iulie 2013 și septembrie 2013

(durata studiilor 3 ani)

Examenul de licență constă în 2 (două) probe:

- proba scrisă de cunoștințe generale de fizică
- prezentarea lucrării de licență

Proba scrisă va conține câte o întrebare de la fiecare din disciplinele menționate (toate disciplinele sunt obligatorii), fiecărui răspuns alocându-i-se câte un punct, un punct va fi acordat din oficiu.

Disciplinele sunt:

1. Mecanică clasică
2. Fizică moleculară și căldură
3. Electricitate și magnetism
4. Optică și Fizica atomului și moleculei
5. Mecanică teoretică
6. Termodinamică și Fizică Statistică
7. Fizica mediului
8. Fizica pământului și atmosferei. Meteorologie
9. Factori de risc, depoluare și refacerea mediului

## PROPUNERI DE SUBIECTE PENTRU EXAMENUL DE LICENȚĂ

### Disciplina D1: MECANICĂ CLASICĂ

**1. Teorema variației momentului cinetic pentru un punct material (forma diferențială, forma finită): enunț, demonstrație. Legea conservării momentului cinetic pentru un punct material: deducere.**

Fie  $S$  un sistem de referință și  $P'$  un punct fix (numit pol) față de acest sistem de referință. Definim *momentul cinetic*  $\vec{M}'$  al punctului material față de polul  $P'$  ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție  $\vec{r}'$  al acestuia față de polul considerat și impulsul  $\vec{p} = m\vec{v}$  al punctului material față de sistemul de referință considerat,

$$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{p}.$$

Alegând  $P'$  în  $O$  (originea sistemului de referință considerat), relația anterioară devine

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Definim *momentul forței*  $\vec{K}$  față de polul  $O$  prin relația

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{F},$$

unde  $\vec{F}$  este forța care acționează asupra punctului material.

Derivând în raport cu timpul relația de definiție a momentului cinetic obținem

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Folosind definiția vectorului viteză

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

și principiul fundamental al dinamicii

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t\right),$$

ajungem la forma diferențială a teoremei de variație a momentului cinetic pentru un punct material:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}.$$

*Enunț: Variația în unitatea de timp a momentului cinetic al unui punct material față de un pol este egală cu momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra acestuia în raport cu același pol.*

Integrând ultima relație pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  obținem forma finită a teoremei de variație a momentului cinetic pentru un punct material

$$\Delta\vec{M} = \vec{M}(t_2) - \vec{M}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)) dt.$$

*Enunț: Variația momentului cinetic al unui punct material pe un interval temporal este egală cu integrala temporală a momentului rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material pe acel interval temporal.*

Pentru a obține *legea conservării momentului cinetic*, considerăm cazul când momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material este nul la orice moment de timp, adică

$$\vec{K} = 0.$$

Atunci, din forma diferențială a teoremei variației momentului cinetic rezultă că

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \forall t.$$

Obținem astfel

$$\vec{M}(t) = \text{const} = \vec{M}(t_0), \forall t.$$

Ultima relație reprezintă legea conservării momentului cinetic pentru un punct material.

*Enunț:* Dacă momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material este nul la orice moment de timp atunci momentul cinetic al punctului material este mărime vectorială conservativă.

Momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material se anulează în două cazuri independente: a)  $\vec{F} = 0$ ; b)  $\vec{r} \parallel \vec{F}$ .

În cazul a) are loc și conservarea impulsului (atunci când impulsul se conservă, se conservă automat și momentul cinetic). În cazul b) impulsul nu se mai conservă dar momentul cinetic se conservă.

În cazul b) impulsul nu se mai conservă dar momentul cinetic se conservă.

## 2. Teorema variației energiei cinetice pentru un punct material (forma diferențială, forma finită): enunț, demonstrație. Legea conservării energiei cinetice pentru un punct material: deducere

Pornim de la definiția lucrului mecanic elementar (infinitesimal) corespunzător variației diferențiale a poziției punctului material

$$dL = \vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) \cdot d\vec{r}.$$

Principiul fundamental  $\vec{F} = m\vec{a}$  și definiția vectorului accelerație  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  ne conduc la

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} dt.$$

Ținând cont de faptul că

$$\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right)$$

și că energia cinetică  $T$  a punctului material de masă  $m$  și viteză  $\vec{v}$  se definește față de un sistem de referință ca

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2},$$

obținem forma diferențială a teoremei de variație a energiei cinetice

$$d \left( \frac{m\vec{v}^2}{2} \right) = dL.$$

*Enunț:* Diferențiala energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei forțelor ce acționează asupra acestuia.

Pentru obținerea formei finite a acestei teoreme integrăm ultima relație pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$ :

$$\Delta T = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) \cdot \vec{v} dt.$$

*Enunț:* Variația energiei cinetice a unui punct material pe un interval temporal este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forțelor care acționează asupra punctului material pe acel interval temporal.

Considerăm cazul când lucrul mecanic elementar este nul la orice moment de timp. Rezultă

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\vec{v}^2(t) \right) dt = 0,$$

ceea ce conduce la expresia matematică a legii conservării energiei cinetice a punctului material:

$$\frac{1}{2} m\vec{v}^2(t) = \text{const} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2(t_0).$$

*Enunț:* Dacă lucrul mecanic elementar este nul la orice moment de timp, atunci energia cinetică a punctului material este mărime scalară conservativă.

Condițiile în care are loc conservarea energiei cinetice:

a)  $\vec{F} = 0$ , caz care corespunde punctului material liber (dacă se conservă impulsul atunci energia cinetică se conservă);

b)  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , corespunde unei forțe de tipul  $\vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) = \vec{v} \times \vec{N} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right)$ .

## 3. Proprietăți generale ale forțelor interne: enunț, demonstrație. Teorema variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale: enunț, demonstrație. Legea conservării impulsului pentru un sistem de puncte materiale: deducere.

Notăm cu  $\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)}$  forța internă cu care punctul material  $a$  acționează asupra punctului material  $b$ . Conform principiului al treilea al dinamicii, avem că

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)} = 0 \\ \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} \parallel \vec{r}^{(ab)}, \vec{r}^{(ab)} = \vec{r}^{(b)} - \vec{r}^{(a)} \end{cases}$$

Notăm cu

$$\vec{F}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{a=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)},$$

rezultanta forțelor interne ce acționează asupra particulei  $b$  și cu

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{F}^{(ab)},$$

rezultanta tuturor forțelor interne care acționează asupra sistemului.

*Proprietatea 1: Rezultanta tuturor forțelor interne care acționează asupra sistemului de puncte materiale este nulă.*

$$\vec{F}_{\text{int}} = 0.$$

Demonstrație:

Pornind de la relația

$$\sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)},$$

ajungem la

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n (\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)}) = 0.$$

*Proprietatea 2: Momentul rezultat al forțelor interne este nul.*

$$\vec{K}_{\text{int}} = 0.$$

Demonstrație:

Notăm prin

$$\vec{K}_{\text{int}}^{(b)} = \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(b)},$$

momentul forței ce acționează asupra particulei  $b$  și cu

$$\vec{K}_{\text{int}} = \sum_{b=1}^n \vec{K}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)},$$

momentul rezultat al forțelor interne ce acționează asupra sistemului de puncte materiale.

Pornind de la relația

$$\sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(a)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)},$$

găsim că

$$\vec{K}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(a)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)}.$$

Conform principiului al treilea al dinamicii avem

$$\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = -\vec{F}_{\text{int}}^{(ba)}.$$

Atunci deducem că

$$\vec{K}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n (\vec{r}^{(b)} - \vec{r}^{(a)}) \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(ab)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = 0,$$

deoarece  $\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} \parallel \vec{r}^{(ab)}$ .

*Teorema variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale*

Notăm cu

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^n \vec{p}^{(a)} = \sum_{a=1}^n m_a \vec{v}^{(a)}$$

*impulsul total al sistemului de puncte materiale.*

Punctul de start îl constituie principiul fundamental al dinamicii pentru particula  $a$

$$\frac{d\vec{p}^{(a)}}{dt} = \vec{F}^{(a)},$$

unde  $\vec{F}^{(a)} = \vec{F}_{\text{int}}^{(a)} + \vec{F}_{\text{ext}}^{(a)}$ .

Sumând după  $a$  în principiul fundamental, ajungem la

$$\sum_{a=1}^n \frac{d\vec{p}^{(a)}}{dt} = \sum_{a=1}^n \vec{F}^{(a)} = \sum_{a=1}^n (\vec{F}_{\text{int}}^{(a)}) + \sum_{a=1}^n (\vec{F}_{\text{ext}}^{(a)}) = \sum_{a=1}^n (\vec{F}_{\text{ext}}^{(a)}).$$

Ținând cont că

$$\sum_{a=1}^n \frac{d\vec{p}^{(a)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{a=1}^n \vec{p}^{(a)} \right) = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

obținem forma diferențială a teoremei de variație a impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

*Enunț: Variația în unitatea de timp a impulsului total al sistemului de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului.*

Integrând pe interval de timp  $[t_1, t_2]$  în ultima relație, obținem forma finită a teoremei de variație a impulsului pentru sistemul de puncte materiale:

$$\vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{ext}} dt.$$

*Enunț: Variația impulsului total al sistemului de puncte materiale pe un interval temporal este egală cu integrala temporală a rezultantei forțelor externe care acționează asupra sistemului pe acel interval.*

Considerăm cazul când rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului este nulă la orice moment de timp

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{a=1}^n \vec{F}_{ext}^{(a)} = 0.$$

Atunci

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0.$$

Ultima relație ne conduce la legea conservării impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

$$\vec{P}(t) = \text{const} = \vec{P}(t_0).$$

*Enunț:* Dacă rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului este nulă la orice moment de timp atunci impulsul total al sistemului de puncte materiale este mărime vectorială conservativă.

#### 4. Proprietăți generale ale mișcării în câmp central: enunț, demonstrație.

Câmpul central este un câmp de forțe pentru care energia potențială depinde numai de distanța de la punctul material la un punct fix numit centrul câmpului.

Pentru simplitate, considerăm punctul fix în originea sistemului de referință, astfel încât

$$U = U(|\vec{r}|).$$

Am notat prin  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  modulul vectorului  $\vec{r}$  iar  $x_1, x_2$  și  $x_3$  reprezintă coordonatele carteziene ale punctului material în sistemul de referință considerat.

*Proprietatea 1:*

Forța care acționează asupra unui punct material care evoluează în câmp central are forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

*Demonstrație:*

Câmpul central fiind un câmp potențial, avem că

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r).$$

Calculând separat

$$\nabla U(r) = \vec{e}_1 \frac{\partial U(r)}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial U(r)}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial U(r)}{\partial x_3} = \vec{e}_1 \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_3}$$

, respectiv

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}, \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}, \frac{\partial r}{\partial x_3} = \frac{x_3}{r},$$

obținem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Din ultima relație identificăm

$$f(r) = -\frac{dU}{dr}.$$

*Proprietatea 2:*

Energia totală a punctului material în câmp central este mărime scalară conservativă.

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + U(r) = \text{const}.$$

*Demonstrație:*

Câmpul central este un câmp potențial. Neavând forțe nepotențiale care să acționeze asupra punctului material, rezultă că lucrul mecanic al forțelor nepotențiale este nul și deci energia totală se conservă.

*Proprietatea 3:*

Momentul cinetic al unui punct material care evoluează în câmp central este mărime vectorială conservativă.

$$\vec{M}(t) = \text{const} = \vec{M}(t_0).$$

*Demonstrație:*

Înlocuind în teorema de variație a momentului cinetic expresia forței care acționează asupra punctului material aflat în câmp central și ținând cont de faptul că  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ , obținem:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M}(t) = \vec{M}(t_0).$$

*Proprietatea 4:*

Mișcarea în câmp central este o mișcare plană, planul mișcării conținând centrul câmpului (originea sistemului de referință).

*Demonstrație:*

Înmulțind scalar relația matematică a legii conservării momentului cinetic în câmp central cu vectorul de poziție  $\vec{r}(t)$  obținem

$$\vec{M}(t) \cdot \vec{r}(t) = \vec{M}(t_0) \cdot \vec{r}(t).$$

Ținând cont că

$$\vec{M}(t) \cdot \vec{r}(t) = (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) \cdot \vec{r}(t) = 0,$$

rezultă

$$\vec{M}(t_0) \cdot \vec{r}(t_0) = 0.$$

Descompunând vectorii după baza ortonormată  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  asociată sistemului de referință considerat, obținem că ultima ecuație este ecuația unui plan a cărui normală are direcția lui  $\vec{M}(t_0)$

$$M_{0_1}x_1(t) + M_{0_2}x_2(t) + M_{0_3}x_3(t) = 0.$$

Mai mult, originea sistemului de referință  $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0$  verifică ecuația planului.

*Proprietatea 5:*

*Viteza areolară a punctului material aflat în câmp central este mărime conservativă.*

*Demonstrație:*

Punctul de start îl constituie definiția momentului cinetic

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t),$$

în care înlocuim vectorul viteză

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Obținem modulul momentului cinetic

$$|\vec{M}(t)| = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\vec{r} \times \Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2\Delta A}{\Delta t} = 2m \frac{dA}{dt} = 2m A(t) = const,$$

unde  $\Delta A$  reprezintă aria măturată de vectorul de poziție al punctului material în intervalul de timp  $\Delta t$  iar

$$A(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$

este viteza areolară a punctului material la momentul  $t$ . Astfel, găsim că

$$A(t) = \frac{const}{2m} = const. \text{ Din relațiile de mai sus rezultă}$$

$$dA = \frac{const}{2m} dt.$$

Integrând relația anterioară pe două intervale de timp egale  $[t_1, t_2]$  și  $[t_3, t_4]$ , obținem că vectorii de poziție "mătură" arii egale în intervale de timp egale:

$$A_{[t_1, t_2]} = A_{[t_3, t_4]}.$$

## Disciplina D2: FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ

**1. Sa se defineasca procesul politrop, sa se scrie ecuatia sa pentru un gaz perfect, sa se scrie expresia indicelui politropic si sa se identifice pentru  $n=0, n=1, n=\gamma$  si  $n=\pm\infty$  tipul procesului particular si valoarea capacității calorice a sistemului termodinamic in procesul particular.**

Se numesc procese politrope, acele procese termodinamice in care schimbul elementar de caldura  $\delta Q = CdT$ , in care capacitatea calorica C a sistemului in proces are valoare constanta. Ecuația procesului politrop pentru un gaz perfect:

$$pV^n = \text{constant}$$

$$\text{Indicele politropic: } n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$$

Cazuri particulare

$n=0$	$p=\text{const}$ (proces izobar)	$C=C_p$
$n=1$	$T=\text{const}$ (proces izoterm)	$C=\pm\infty$
$n=\gamma$	$S=\text{const}$ (proces adiabatic sau izentrop)	$C=0$
$n=\pm\infty$	$V=\text{const}$ (proces izocor)	$C=C_v$

**2. Scrieti ecuatia diferentia Clausius-Clapeyron a tranzițiilor de faza de speta I, in functie de saltul entropiei si in functie de caldura molară de tranziție. Discutati variatia relativă a presiunii si temperaturii de tranziție la caldura molară de tranziție pozitivă, la cresterea si micșorarea volumului molar.**

Ecuația Clausius-Clapeyron este:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\bar{S}_2 - \bar{S}_1}{\bar{V}_2 - \bar{V}_1} \text{ unde } p - \text{presiunea}$$

T- temperatura

$\bar{S}_2 \neq \bar{S}_1$  - entropiile molare ale celor doua faze

$\bar{V}_2 \neq \bar{V}_1$  - volumele molare ale celor doua faze

Caldura molară de tranziție este:

$$\bar{\lambda} = T(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)$$

$$\text{Astfel } \frac{dp}{dT} = \frac{\bar{\lambda}}{T(\bar{V}_2 - \bar{V}_1)}$$

Pentru  $\bar{\lambda} > 0$  (tranziție cu absorbție de caldura)

- cand  $\bar{V}_2 > \bar{V}_1$ ,  $\frac{dp}{dT} > 0$  - temperatura de tranzitie creste la cresterea presiunii  
(de exemplu evaporarea unui lichid)
- cand  $\bar{V}_2 < \bar{V}_1$ ,  $\frac{dp}{dT} < 0$  - temperature de tranzitie scade la cresterea presiunii  
(de exemplu topirea ghetii)

3. Sa se scrie ecuatia Van der Waals pentru un kmol de gaz real si ecuatia de stare pentru un kmol de gaz perfect, specificand corectiile aduse ecuatiei de stare a gazului perfect, in cazul gazului real.

$$\text{Ecuatia Van der Waals: } \left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

Ecuatia de stare a gazului perfect :  $pV=RT$

$b$  – corectia de volum (covolumul), care este de patru ori volumul propriu al moleculelor dintr-un kmol

$p_i = \frac{a}{V^2}$  - corectia de presiune (presiunea interna), care se datoreste fortelor de

atractie intre molecule gazului si care se scade din presiunea pe care ar exercita-o gazul in absenta acestor forte.

4. Ce reprezinta formula barometrica, care este expresia sa si care sunt semnificatiile marimilor care intervin in aceasta formula?

Formula barometrica arata ca presiunea in fluidele compresibile aflate in campul gravitacional si pot fi considerate gaze perfecte, scade exponential cu inaltimea.

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g Z}{p_0}} \text{ sau } p = p_0 e^{-\frac{\mu g Z}{RT}}$$

Inaltimea  $Z=0$  corespunde nivelului marii la care presiunea este  $p_0$ , iar densitatea aerului (gaz perfect), este  $\rho_0$ ,  $g$  este acceleratia gravitacionala,  $\mu$  este masa molară a gazului perfect (aer),  $R$  este constanta universală a gazului perfect, iar  $T$  este temperatura absolută.

## Disciplina D3: ELECTRICITATE SI MAGNETISM

1: Potențialul electric si intensitatea campului electric creat de un dipol electric

Se considera un dipol electric format din 2 sarcini electrice punctiforme egale și de semne contrare ( $-q$  și  $+q$ ) plasate în vid, astfel încât vectorul de poziție al sarcinii pozitive în raport cu cea negativă este  $\vec{d}$  (vezi Fig.1). Momentul electric dipolar este  $\vec{p} = q\vec{d}$ .

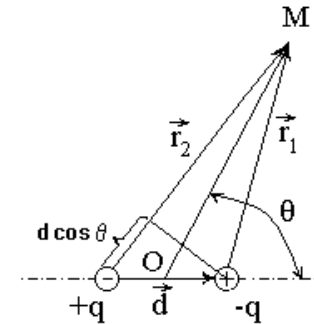


Fig. 1

1) Aplicând principiul superpoziției găsim potențialul electric al câmpului rezultat creat de sistemul celor două sarcini:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Pentru cazul  $d \ll r$ , sunt valabile următoarele aproximații (vezi figura):

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta ; \quad r_1 r_2 = r^2$$

care conduc la expresia

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

care se mai poate scrie și astfel :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

2) Intensitatea câmpului electrostatic  $\vec{E}$  se va calcula cu formula :

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

Folosind relațiile (ușor de verificat):

$$\nabla\left(\frac{I}{r^3}\right) = -3r^{-4} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) = p_x \vec{i}_x + p_y \vec{i}_y + p_z \vec{i}_z = \vec{p}$$

obținem în final:

$$\vec{E} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \left[ 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

## 2. Montajul Pogendorf

Având la dispoziție o punte cu fir de lungime  $\ell$  și trei elemente galvanice de tensiuni electromotoare  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  și  $\epsilon_3$  (necunoscuta), două rezistențe  $R_1$  și  $R_2$  și un galvanometru, Pogendorf a realizat un montaj de tipul celui prezentat în Fig. 2, în ramurile cu surse plasându-se inițial primele 2 elemente galvanice  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ .

Se aplică prima lege a lui Kirchhoff în nodul A:

$$I_1 - I^0 - I_2 = 0 \quad (1)$$

Se adaugă la această primă relație între curenți alte două ecuații care rezultă din aplicarea celei de-a doua legi a lui Kirchhoff ochiurilor de rețea ABR<sub>1</sub>A și ABR<sub>2</sub>A:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= I_1(R_1 + R_2^0) + I^0 R_1^0 \\ \epsilon_2 &= I^0 R_1^0 - I_2 R_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Pentru o anumită poziție a cursorului C se va înregistra pe ramura cu galvanometru un curent nul ( $I_2 = 0$ ). Din prima lege a lui Kirchhoff rezultă:

$$I_1 = I^0$$

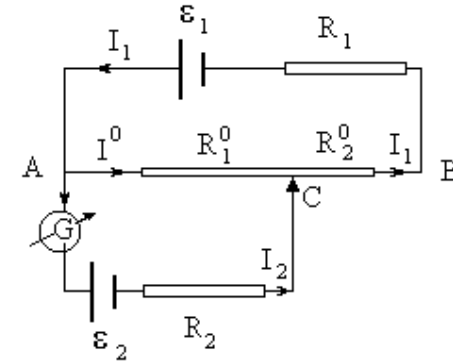


Fig.2.

Sistemul de ecuații (2) devine:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= I_1(R_1 + R_2^0 + R_1^0) \\ \epsilon_2 &= I_1 R_1^0 \end{aligned}$$

Obținem:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{(R_1 + R_2^0 + R_1^0)}{R_1^0}$$

Rezistența necunoscută  $R_1$  se poate elimina dacă se înlocuiește  $\epsilon_2$  cu  $\epsilon_3$  și se modifică din nou poziția cursorului C, care va delimita pe rezistența  $R^0$  alte două rezistențe, notate cu  $R_1'$  și  $R_2'$ , încât galvanometru să indice din nou zero.

Obținem:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{(R_1 + R_1' + R_2')}{R_1'}$$

Deoarece

$$R_1' + R_2' = R_1^0 + R_2^0 = R^0$$

rezultă:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{R_1^0}{R_1'} = \frac{\ell_1}{\ell_1'}$$

$\ell_1$  și  $\ell_1'$  fiind lungimile porțiunilor de fir din partea dreaptă a cursorului, corespunzătoare unui curent nul prin galvanometru, la introducerea pe rând în montaj a celor 2 elemente galvanice de tensiuni electromotoare,  $\varepsilon_2$  respectiv,  $\varepsilon_3$ .

### 3. Teorema lui Ampere aplicată unei bobine toroidale

Se consideră o bobină toroidală constituită din N spire parcurse de curentul constant I, înfășurate uniform pe un miez de forma unui tor cu axa de revoluție Oz. Se va calcula inducția magnetică pentru următoarele puncte:

a) din interiorul torului; b) din exteriorul torului.

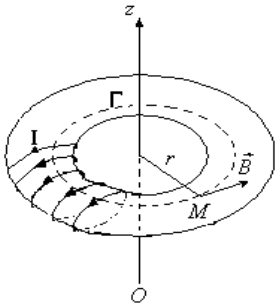


Fig. 3

Remarcăm că orice plan ce conține axa Oz este un plan de simetrie pentru distribuția de curenți.

Așadar în punctul M, vectorul  $\vec{B}$  este perpendicular pe planul care conține axa Oz și trece prin punctul M (vezi Fig.3).

Liniile de câmp sunt prin urmare cercuri cu centrul pe axa Oz. În plus, datorită simetriei de revoluție, modulul lui  $\vec{B}$  este constant în orice punct situat pe o anumită linie de câmp.

Teorema lui Ampère aplicată unui astfel de contur, de rază r, conduce la următoarele rezultate :

a) pentru cercuri interioare torului, avem :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 NI$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

rezultat care este independent de forma secțiunii torului ;

b) pentru puncte din exteriorul torului obținem valoarea zero pentru inducția magnetică, deoarece suma totală a curenților ce străbat suprafața mărginită de contur este zero (numărul curenților care intră este identic cu cel al curenților care ies și egal cu numărul de spire, N) :

### 4. Puntea Maxwell (aplicatie la curent alternativ)

Un aranjament experimental de tipul celui din Fig.7.5 constituie puntea lui Maxwell: ramurile 1 și 3 conțin rezistențe pure, ramura 2 conține un condensator de capacitate C, șuntat de o rezistență  $R_2$ , iar ramura 4 conține o bobină care posedă o rezistență  $R_4$  și o inductanță L. Să se arate că echilibrul punții se obține independent de valoarea frecvenței curentului de alimentare.

Condiția de echilibru pentru punte se scrie:

$$\frac{R_1}{Z_4} = \frac{Z_2}{R_3} \quad \text{sau} \quad \underline{Z_4} = R_1 R_3 \frac{1}{\underline{Z_2}}$$

unde

$$Z_4 = R_4 + j\omega L ; \quad \frac{1}{\underline{Z_2}} = \frac{1}{R_2} - \frac{C\omega}{j}$$

Rezultă:

$$R_4 + j\omega L = \frac{R_1 R_3}{R_2} + jC\omega R_1 R_3$$



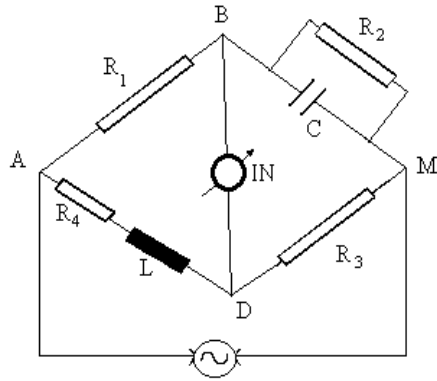


Fig. 4 - Puntea Maxwell

Se egalează părțile reale între ele și părțile imaginare între ele, obținându-se:

$$\begin{cases} R_4 R_2 = R_1 R_3 \\ L = C R_1 R_3 \end{cases}$$

Se observă că în ultima relație nu apare frecvența curentului; relația permite determinarea, la echilibrul punții, a inductanței necunoscute L dacă se cunosc capacitatea de pe ramura 2 și rezistențele  $R_1$  și  $R_3$ .

## Disciplina D4: OPTICĂ ȘI FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI

### -OPTICĂ

A.

Fie dispozitivul interferențial "Oglinzile lui Fresnel".

1. Desenati și explicați modul în care se obține interferența în acest dispozitiv și dispoziția zonei de interferență.
2. Care este valoarea distanței dintre sursele virtuale  $S_1$  și  $S_2$  (imagini virtuale în oglinzile plane  $O_1$  și  $O_2$ ) ale sursei reale  $S$ , dacă unghiul dintre cele două oglinzi plane este de  $5^\circ$  și distanța de la sursa  $S$  la muchia comună a celor două oglinzi este de  $1\text{m}$ .
3. Care este valoarea interfranței, obținută în acest caz pe ecranul de observare a franjelor de interferență. Distanța de la muchia comună a oglinzilor la ecranul pe care se obține interferența este de  $D=1\text{m}$ . radiația luminoasă utilizată în dispozitiv are lungimea de undă egală cu  $5000\text{\AA}$ .

B.

Fie reflexia unei raze de lumina, polarizată TE, care cade sub un unghi de incidență  $\theta=30^\circ$ , pe o suprafață de separare a două medii, omogene și izotrope din punct de vedere optic. Indicele de refracție al celui de al doilea mediu în raport cu primul mediu (din care vine lumina) este  $n=0,75$ .

1. Calculați valoarea coeficientului de reflexie și reflectanță în cazul TE, reprezentați grafic  $r=f(\theta)$ , în general.
2. Calculați valoarea coeficientului de reflexie și reflectanță pentru  $\theta=30^\circ$  și  $\theta=0^\circ$ . Ce valoare are unghiul limita corespunzător celor două medii optice?
3. Figurați acești coeficienți de reflexie și reflectanțele corespunzătoare pe graficul teoretic de la punctul 1.

A.

1. Unul dintre cele mai importante fenomene care se studiază în cadrul opticii ondulatorii este fenomenul de interferență. Teoria interferenței optice se bazează în esență pe un principiu deosebit de valoros în fizică – pe principiul superpoziției liniare.

În optica electromagnetică acest principiu se referă la suprapunerea (superpoziția) câmpurilor electromagnetice.

În conformitate cu principiul superpoziției, câmpul electric  $\vec{E}$  produs într-un punct din spațiu de acțiunea simultană a mai multor surse este suma vectorială a câmpurilor  $\vec{E}^{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) produse în acel punct de acțiunea individuală a surselor  $i$  (acționând separat). Astfel

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}^{(i)} \quad (1)$$

Un principiu similar este valabil și pentru componentele magnetice ale undelor dar, în optica, datorită micimii lor, efectele determinate de componentele magnetice nu se iau în considerare. Principiul superpoziției este riguros valabil când avem de-a face cu câmpuri electromagnetice în vid. Presupunând principiul superpoziției liniare valabil, să considerăm două unde plane monocromatice (armonice), liniar polarizate, de pulsație  $\omega$ .

Fie

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \quad (2)$$

și

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)} \quad (3)$$

câmpurile electrice ale acestora. În (1.2) și (1.3) marimile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt fazele inițiale (la  $t=0$ ) în primul caracterizat de  $\vec{r} = 0$ . Ele au fost introduse în aceste expresii pentru a permite aprioric o diferență de fază arbitrară între sursele celor două câmpuri. Dacă diferența  $\varphi_1 - \varphi_2$  este o mărime constantă se spune că cele două surse sunt mutual coerente. În caz contrar sursele nu sunt coerente.

Prin suprapunerea câmpurilor (2) și (3) obținem

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)}$$

Este cunoscut faptul ca intr-un punct din spatiu intensitatea radiatiei (luminoase) este proportionala cu  $|\vec{E}|^2$ . Lasand la o parte factorul de proportionalitate (nesemnificativ) pentru discutia pe care o dam vom putea scrie

$$I = |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta \quad (5)$$

unde

$$\theta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6)$$

Notand  $I_1 = |\vec{E}_1|^2$  si  $I_2 = |\vec{E}_2|^2$ , (5) devine

$$I = I_1 + I_2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta \quad (7)$$

$I_1$  si  $I_2$  fiind intensitatile in punctul considerat daca acolo ar sosi doar unda (2) respectiv (3).

Relatia (7) ne arata ca, atunci cand superpozitia este prezenta, intensitatea  $I$  poate fi mai mare sau mai mica decat  $I_1 + I_2$  dupa cum termenul  $2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta$  este pozitiv sau negativ. In cazul cand  $2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta$  este zero avem  $I = I_1 + I_2$ .

Termenul  $2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta$  care "controleaza" valoarea lui  $I$  se numeste termen de interferenta. El este nul cand  $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$  adica atunci cand undele care participa la superpozitie sunt polarizate pe doua directii reciproc perpendiculare.

Presupunand ca nu suntem intr-o astfel de situatie, observam ca comportarea termenului de interferenta este determinata de  $\theta$  prin factorul oscilant  $\cos \theta$ . Din (6) inasa observam ca  $\theta$  depinde de  $\vec{r}$ . Aceasta inseamna ca  $I$  va fi o functie cu variatii spatiale periodice. Aceste variatii sunt ceea ce numim in mod uzual franje de interferenta. Daca sursele celor doua unde nu sunt mutual coerente (sunt mutual necoerente) diferenta  $\varphi_1 - \varphi_2$  care apare in expresia lui  $\theta$  nu pastreaza o valoare constanta in timp; in general ea variaza intr-un mod haotic, arbitrar. Din aceasta cauza argumentul functiei cosinus variaza arbitrar in timp si valoarea medie in timp a lui  $\cos \theta$  este zero. In acest caz  $I = I_1 + I_2$  in orice punct din spatiu si franjele de interferenta nu apar.

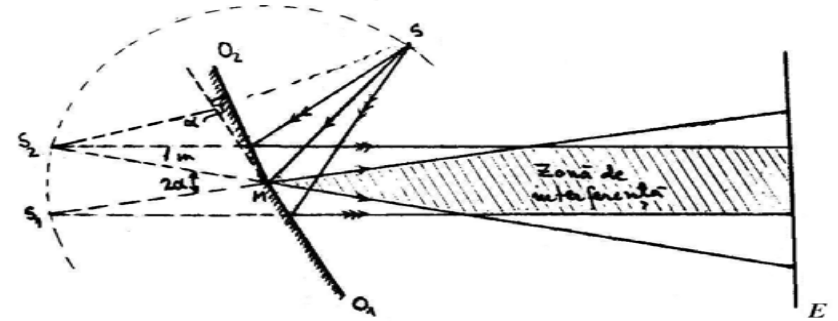
Acesta este motivul pentru care suprapunerea a doua unde provenind din surse luminoase obisnuite (exemplu 2 lumanari, 2 becuri, etc.).

Inainte de a incheia aceste discutii preliminare vom observa ca punctele  $\vec{r}$  din spatiu in care  $I$  are valori constante satisfac conditia

$$\theta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const.} \quad (8)$$

Daca  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.}$  avem conditia  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = \text{const.}$

Pentru valori diferite ale constantei din membrul drept al relatiei (8) avem valori diferite ale lui  $I$ . Atunci cand  $\cos \theta = -1$ , valoarea minima . (Aceste afirmatii sunt valabile pentru  $\vec{E}_1 \vec{E}_2 > 0$ ; in caz contrar, situatia se inverseaza).



Doa oglinzi plane asezate in asa fel incat unghiul lor diedru sa fie aproape  $180^\circ$  (reprezentate ca in figura care reprezinta Oglinzile lui Fresnel de mai jos). Izvorul luminos  $S$  este, de obicei o fanta filiforma paralela cu muchia comuna  $M$ . Izvoarele coerente  $S_1$  si  $S_2$  care genereaza interferenta sunt imaginile lui  $S$  in cele doua oglinzi.

Deoarece oglinzile sunt aproape in prelungire (una celeilalte), imaginile  $S_1$  si  $S_2$  sunt foarte apropiate (fig.1). Franjele de interferenta se pot prinde pe un ecran  $E$  asezat paralel cu muchia  $M$ . In acest fel, franjele vor fi si ele paralele cu muchia  $M$  comuna celor doua oglinzi. Schema de principiu este redada in figura de mai sus.

2.

$$\sin \alpha = l/S_1 M \text{ deci } 2l \approx 2\alpha SM \text{ caci } S_1 M = SM$$

$$\text{Distanta dintre sursele virtuale este deci } 2l = 2,9 \text{ mm}$$

3.

$$\text{Interfranja este egala cu } i = \lambda (D + r \cos \alpha) / 2l, \text{ deoarece dispozitivul este tip Young}$$

$$\text{Deci } i = 0,17 \text{ mm}$$

Observatie

Unghiul  $\alpha$  fiind foarte mic se fac aproximatiile:  $\sin \alpha \approx \alpha$  si  $\cos \alpha \approx 1$ :

B.

1. Introducem marimile  $\vec{E}, \vec{E}', \vec{E}''$  - amplitudinile campului electric pentru undele incidenta, reflectata si respectiv refractata.

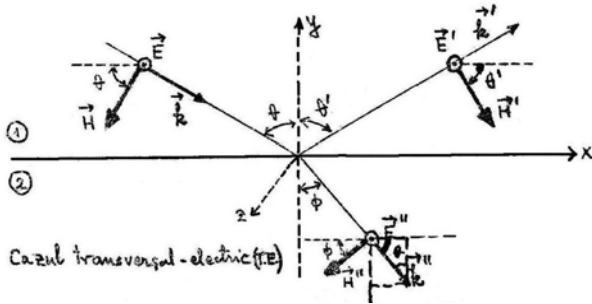


Fig. 1A

Sie  $\vec{H}, \vec{H}', \vec{H}''$  - amplitudinile corespunzatoare ale campurilor magnetice atasate.

Considerand ca cele doua medii sunt nemagnetice, vom putea scrie

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E}), \quad (1)$$

$$\vec{H}' = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k}' \times \vec{E}'), \quad (2)$$

$$\vec{H}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k}'' \times \vec{E}'') \quad (3)$$

Dependenta spatio-temporala a fost presupusa comuna pentru campurile electric si magnetic si din aceasta cauza, in relatiile (1) - (3) ea a fost abandonata.

Cazul transversal-electric (TE): campul electric al unei incidente este perpendicular pe planul de incidenta (fig. 1A).

In fig. 1 se prezinta pozitiile instantanee ale vectorilor camp electric si magnetic in undele incidenta, reflectata si refractata, in cele doua cazuri TE si TM.

### Studiul cazului TE

Folosind continuitatea componentelor tangente ale campurilor, in conformitate cu situatia instantanee aleasa in fig. 1A, putem scrie

$$E + E' = E'' \quad (4)$$

$$-H \cos \theta + H' \cos \theta = -H'' \cos \phi \quad (5)$$

Relatia (5) se poate transcrie cu ajutorul relatiilor (3.1)-(3.3) si avem

$$-E k \cos \theta + E' k \cos \theta = -E'' k'' \cos \phi \quad (6)$$

Relatiile (4) si (6) formeaza un sistem algebric din care putem determina marimile relative  $E'/E$  si  $E''/E$ . Printr-un calcul simplu obtinem

$$r = \frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - n \cos \phi}{\cos \theta + n \cos \phi} \quad (7)$$

$$t = \frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + n \cos \phi}, \quad (8)$$

n fiind raportul  $k''/k$ .

Tinand cont de faptul ca  $\sin \theta = n \sin \phi$ , mai putem scrie

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin(\phi + \theta)}, \quad (9)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{\sin(\phi + \theta)} \quad (10)$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (11)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (12)$$

Pentru descrierea reflexiei se foloseste frecvent marimea  $R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2$  numita reflectanta.

Studiul relatiilor (7)-(12), relatiile lui Fresnel, ne conduc la reprezentarile grafice din fig. 2.

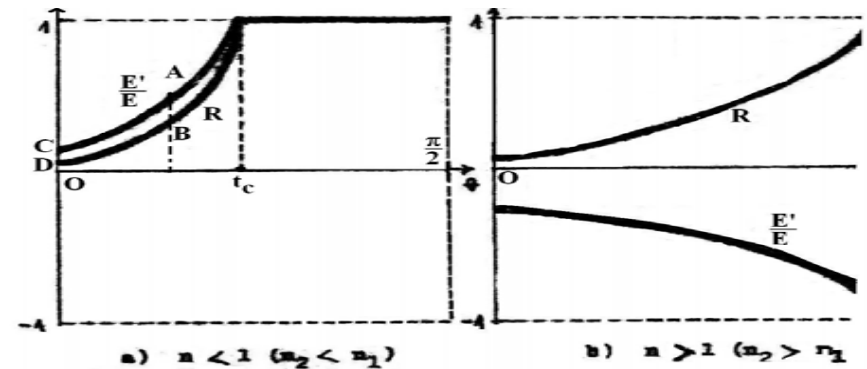


Fig.2a si b

In cazul cand  $n < 1$  exista un unghi  $\theta_c$  (unghi critic) astfel incat pentru  $\theta > \theta_c$  avem de-a face cu reflexie totala.

Pentru a vedea cat este  $\theta_c$  vom scrie ca  $E'/E = 1$  si vom obtine  $\theta_c = \arcsin n$ .

Pentru  $\theta > \theta_c$ , scriind relatia (11) sub forma

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (11')$$

si calculand  $R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2$  vom obtine valoarea 1 independent de  $\theta$ . Aceasta demonstreaza

ca in acest caz, intr-adevar se obtine **reflexia totala**.

$$r = \frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2$$

Deci **dupa inlocuiri obtinem**

$$r(\theta=30^\circ)=0,215 \text{ si } R(\theta=30^\circ)=0,045 \quad r(\theta=0^\circ)=0,14 \text{ si } R(\theta=0^\circ)=0,0196$$

3. Se vor figura punctele pe grafic;  $r=f(\theta)$  si  $R=f(\theta)$ , pentru cazul TE punctele A, B, C, si D de coordonate

$$A(\theta=30^\circ, r=0,215) \text{ si } B(\theta=30^\circ, R=0,045) \text{ si } C(\theta=0^\circ, r=0,14) \text{ si } D(\theta=0^\circ, R=0,0196).$$

## - FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI

1. *Stiind ca  $dN_v = \frac{8\pi v^2 \cdot d v}{c^3}$  reprezinta numarul de unde*

*electromagnetice stationare, din unitatea de volum a incintei, cu frecventele cuprinse in intervalul  $(v, v + d v)$ , deduceti formula lui Planck.*

Planck postuleaza ca energia  $E_n$  a unui oscilator armonic liniar, microscopic, de frecventa  $v$  este un multiplu intreg al unei valori date  $\epsilon_0$ , numita cuanta de energie:

$$E_n = n\epsilon_0, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Presupunand o distributie boltzmanniana a energiei oscilatorilor, valoarea medie a energiei unui oscilator are forma:

$$\langle \epsilon(v, T) \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n / KT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n / KT}} \quad (2)$$

Notand  $\beta = 1/KT$  si folosind relatia (1), expresia (2) devine:

$$\langle \epsilon(v, T) \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 \cdot e^{-\beta n\epsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\epsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\epsilon_0}\right) = -\frac{d}{d\beta} \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_0}}\right) = \frac{\epsilon_0}{e^{\beta\epsilon_0} - 1} \quad (3)$$

Inlocuind pe  $\beta$  cu  $1/KT$ , din relatia (3) rezulta:

$$\langle \epsilon(v, T) \rangle = \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0 / KT} - 1} \quad (4)$$

Planck obtine urmatoarea expresie pentru densitatea spectrala volumica de energie:

$$\rho(v, T) d v = dN_v \langle \epsilon(v, T) \rangle = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0 / KT} - 1} d v \quad (5)$$

Pentru ca formula (5) sa fie in concordanta cu datele experimentale trebuie ca  $\lim_{v \rightarrow \infty} \rho(v, T) = 0$ . Prin urmare,  $\epsilon_0$  trebuie sa fie o functie crescatoare de frecventa.

Planck a considerat

$$\epsilon_0 = h v \quad (6)$$

unde  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J \cdot s$  este constanta lui Planck.

Ipoteza lui Planck (1) conform careia energia unui oscilator armonic liniar microscopic este cuantificata:

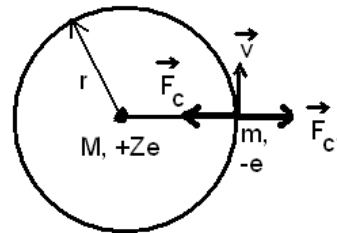
$$E_n = n h v, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

arata ca energia oscilatorului variaza discret cu frecventa.

Din relatiile (6) si (5) deducem formula lui Planck:

$$\rho(v, T) d v = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{h v}{e^{h v / KT} - 1} d v \quad (8)$$

2. *Deduceti, in cadrul teoriei atomice a lui Bohr, expresiile razelor, vitezelor si energiilor corespunzatoare ionilor hidrogenoizi (cazul nucleului infinit greu).*



Deoarece masa  $M$  a nucleului este mult mai mare decat masa  $m$  a electronului se poate considera ca nucleul este infinit greu in raport cu electronul. Nucleul se considera in repaus, situat in originea sistemului de coordonate.

Electronul se va misca in jurul nucleului pe o traiectorie circulara de raza  $r$ , cu viteza  $v$ . Am notat  $+Ze$  sarcina nucleului si cu  $-e$  sarcina electronului. Conditia de stabilitate a electronului pe orbita circulara este:

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{cf} = 0 \quad (1)$$

unde  $\vec{F}_c$  este forta coulombiana de interactie electron-nucleu iar  $\vec{F}_{cf}$  este forta centrifuga.

Relatia (1) conduce la egalitatea:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

Conditia de cuantificare a momentului cinetic este:

$$L = mvr = n\hbar, \quad n=1, 2, 3, \quad (3)$$

Relatiile (2) si (3) constituie un sistem de ecuatii cu necunoscutele  $r$  si  $v$ .

Din (3) obtinem

$$v = n\hbar/mr. \quad (4)$$

Introducand aceasta expresie a lui  $v$  in (2) obtinem razele orbitelor Bohr pentru ionii hidrogenoizi:

$$r_n^Z = \frac{4\pi\epsilon_0 (\hbar/2\pi)^2}{me^2} \cdot \frac{n^2}{Z} = a_0 \frac{n^2}{Z}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

unde  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 (\hbar/2\pi)^2}{me^2} \cong 0,529 \text{ \AA}$  reprezinta raza primei orbite Bohr in atomul de hidrogen.

Relatia (5) arata ca razele orbitelor Bohr sunt cuantificate si sunt proportionale cu  $n^2$  si invers proportionale cu  $Z$ .

Introducand (5) in (4) se obtin vitezele electronului pe orbitale Bohr:

$$v_n^Z = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (\hbar/2\pi)} \cdot \frac{Z}{n} = v_0 \frac{Z}{n}, \quad (6)$$

unde  $v_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (\hbar/2\pi)} \cong 2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  este viteza electronului pe prima orbita Bohr

in atomul de hidrogen.

Observam ca viteza electronului in atom este cuantificata si este proportionala cu  $Z$  si invers proportionala cu  $n$ .

Energia totala ( $E$ ) a ionului hidrogenoid este data de suma energiei cinetice a electronului si energia potentiala de interactie coulombiana electron-nucleu:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

$$\text{Introducand (5) in (7) obtinem: } E_n^Z = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = E_0 \frac{Z^2}{n^2} \quad (8)$$

unde  $E_0 = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,56 \text{ eV}$  este energia atomului de hidrogen in starea fundamentala ( $n=1$ ).

Din (8) rezulta ca energia este negativa (stari legate), este cuantificata si este proportionala cu  $Z^2$  si invers proportionala cu  $n^2$ .

## Disciplina D5: MECANICĂ TEORETICĂ

**1. Să se scrie ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor și să se arate că acestea pot fi obținute dintr-un principiu variațional. Să se reformuleze ultimul principiu variațional în coordonate generalizate și să se deducă ecuațiile corespunzătoare**

Fie un sistem de  $n$  puncte materiale, descris de coordonatele carteziene  $x_i^{(a)}$ ,  $a=1, 2, \dots, n$  iar  $i=1, 2, 3$ , care evoluează într-un câmp de forțe potențiale. Faptul că sistemul evoluează într-un câmp potențial implică existența unei funcții  $V(x_i^{(a)})$  numită energie potențială, astfel încât componentele forțelor care acționează asupra punctelor materiale au expresiile

$$F_i^{(a)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}}.$$

Evoluția sistemului are loc astfel încât coordonatele carteziene  $x_i^{(a)}$  satisfac ecuația legăturilor la care este supus sistemul :

$$\phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0, \alpha = 1, 2, \dots, A, \text{ unde } A \leq 3n.$$

Funcțiile  $\phi_\alpha$  au fost alese astfel încât să satisfacă condiția de regularitate

$$\text{rang} \left( \frac{\partial \phi_\alpha(x_i^{(a)})}{\partial x_i^{(a)}} \right) \Big|_{\phi_\alpha(x_i^{(a)})=0} = A.$$

Ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor au forma:

$$\begin{cases} m_a \ddot{x}_i^{(a)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}} - \sum_{\alpha=1}^A \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}}, \\ \phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0, \alpha = 1, 2, \dots, A \end{cases}$$

unde am notat cu  $\lambda^\alpha$  multiplicatorii Lagrange. Ecuțiile anterioare reprezintă un sistem de  $3n+A$  ecuații cu tot atâtea necunoscute  $(x_i^{(a)}, \lambda^\alpha)$ .

Ecuțiile lui Newton în prezența legăturilor pot fi obținute din *principiul variațional*

$$\begin{cases} \delta S_0^L [x_i^{(a)}, \lambda^\alpha] = 0 \\ \delta x_i^{(a)}(t_1) = \delta x_i^{(a)}(t_2) = 0 \end{cases},$$

unde *acțiunea Lagrangiană* capătă forma

$$S_0^L [x_i^{(a)}, \lambda^\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a (x_i^{(a)})^2 - V(x_i^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^A \lambda^\alpha \phi_\alpha(x_i^{(a)}) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha).$$

Un sistem de  $3n-A$  de funcții de timp  $(q^I)_{I=1,2,\dots,3n-A}$  se numește *sistem de coordonate generalizate* pentru sistemul de  $n$  particule supus la  $A$  legături, în cazul în care coordonatele carteziene exprimate în funcție de acestea prin relații de tipul  $x_i^{(a)} = x_i^{(a)}(q^I)$  satisfac

identic ecuația legăturilor  $\phi_\alpha(x_i^{(a)}(q^I)) \equiv 0$ .

*Acțiunea Lagrangiană în coordonate generalizate* capătă forma

$$S^L [q^I] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a (x_i^{(a)}(q^I))^2 - V(x_i^{(a)}(q^I)) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I, \dot{q}^I, t)$$

În ultima relație nu mai apare dependența de  $\lambda^\alpha$  datorită relației  $\phi_\alpha(x_i^{(a)}(q^I)) \equiv 0$ .

Rescriind principiul variațional anterior în coordonate generalizate

$$\begin{cases} \delta S^L [q^I] = 0 \\ \delta q^I(t_1) = \delta q^I(t_2) = 0 \end{cases},$$

obținem *ecuațiile Lagrange* (sistem de  $2(3n-A)$  ecuații diferențiale ordinare de ordinul al doilea cu necunoscutele  $q^I$ ):

$$\frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0.$$

Soluția ecuațiilor Lagrange este dată de  $q^I = q^I(t, c_1, \dots, c_{2(3n-A)})$ , unde constantele  $c_1, \dots, c_{2(3n-A)}$  se determină din condițiile inițiale

$$\begin{cases} q^I(t_1, c_1, \dots, c_{2(3n-A)}) = q_1^I \\ q^I(t_2, c_1, \dots, c_{2(3n-A)}) = q_2^I \end{cases}.$$

Soluția ecuațiilor Lagrange determină complet mișcarea sistemului de  $n$  puncte materiale supus la  $A$  legături.

**2. Să se enunțe teorema Noether. Să se deducă consecința teoremei Noether referitoare la conservarea energiei totale.**

Teorema Noether stabilește legătura dintre transformările de simetrie ale unui sistem și integralele prime ale acestuia.

*Definiție:* Spunem că o funcție este *integrală primă a mișcării* descrise de ecuația Lagrange

$$\frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0, \text{ dacă pentru orice soluție } q^I = \varphi^I(t) \text{ în}$$

care constantele de integrare sunt fixate, avem

$$F(\varphi^I(t), \dot{\varphi}^I(t), t) \equiv c = \text{const.}$$

*Transformările de simetrie* (liniare în parametrul  $\varepsilon^\Delta, |\varepsilon^\Delta| \ll 1$ ) sub formă infinitesimală ale unui sistem sunt de forma

$$q^a \rightarrow Q^a = q^a + R_\Delta^a \varepsilon^\Delta,$$

unde

$$R_\Delta^a(q^a) = \frac{\partial Q^a}{\partial \varepsilon^\Delta}.$$

*Enunț:* Dacă acțiunea unui sistem este invariantă la transformările de simetrie infinitesimale cu  $N$  parametri  $\varepsilon^\Delta$ , atunci sistemul posedă  $N$  integrale prime independente, de forma

$$I_\Delta(q^I, \dot{q}^I, t) = \left( L(q^I, \dot{q}^I, t) - \dot{q}^I \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \right) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon^\Delta} + \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \frac{\partial Q^I}{\partial \varepsilon^\Delta},$$

unde  $\Delta = 1, \dots, N$ .

Considerăm Lagrangianul

$$L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a (x_i^{(a)})^2 - V(x_i^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^A \lambda^\alpha \phi_\alpha(x_i^{(a)})$$

al unui sistem de  $n$  puncte materiale supuse la  $A$  legături independente de timp. Putem găsi întotdeauna un sistem de coordonate generalizate  $q^I$  astfel încât relațiile dintre coordonatele carteziene și cele generalizate să fie de forma

$$x_i^{(a)} = x_i^{(a)}(q^I).$$

Derivând ultima relație în raport cu timpul, obținem

$$\frac{dx_i^{(a)}}{dt} = \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \dot{q}^I.$$

Substituind ultimele două relații în Lagrangianul considerat obținem Lagrangianul sistemului în coordonate generalizate (numit și Lagrangianul natural)

$$L(q^I, \dot{q}^I) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^I \dot{q}^J - V(q^I),$$

unde

$$g_{IJ}(q) = \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^J} = \sum_{a=1}^n m_a \frac{\partial \vec{r}^{(a)}}{\partial q^I} \frac{\partial \vec{r}^{(a)}}{\partial q^J}.$$

Ultima relație evidențiază că funcțiile  $g_{IJ}(q)$  sunt simetrice,  $g_{IJ}(q) = g_{JI}(q)$ . Primul termen al Lagrangianului natural reprezintă energia cinetică a sistemului iar al doilea energia sa potențială, astfel încât energia totală în funcție de  $q^I$  și  $\dot{q}^I$  are forma

$$E(q^I, \dot{q}^I) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^I \dot{q}^J + V(q^I).$$

Considerăm translațiile temporale

$$t \rightarrow T = t + \varepsilon$$

$$q^I \rightarrow Q^I = q^I, \forall I$$

Avem un singur parametru  $\varepsilon$  și, conform teoremei Noether, putem avea o singură integrală primă. Din ultimele relații găsim că

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1, \quad \frac{\partial Q^I}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \forall I.$$

Corespunzător translațiilor temporale menționate deducem următoarea integrală primă

$$I(q^I, \dot{q}^I) = L(q^I, \dot{q}^I) - \dot{q}^I \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I)}{\partial \dot{q}^I}.$$

Din Lagrangianul natural rezultă prin calcul direct

$$\frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I)}{\partial \dot{q}^I} = g_{IJ}(q) \dot{q}^J$$

relație care înlocuită în integrala primă ne conduce la

$$I(q^I, \dot{q}^I) = -\left(\frac{1}{2} g_{IJ}(q) \dot{q}^I \dot{q}^J + V(q^I)\right).$$

*Consecință:* Dacă acțiunea unui sistem este invariantă la translațiile temporale, atunci energia totală a sistemului este integrală primă.

### 3. Să se enunțe și să se demonstreze teorema Poisson referitoare la integralele prime Hamiltoniene

Definim *integrala primă Hamiltoniană* ca fiind orice observabilă care se reduce identic la o constantă  $F(\varphi(t), t) \equiv c$ , unde  $\varphi(t) = (q^i(t), p_i(t))$  este soluția ecuațiilor canonice Hamilton.

O observabilă clasică  $F(q^i, p_i, t)$  este integrală primă Hamiltoniană dacă și numai dacă

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0.$$

*Enunț:* Dacă  $F_1$  și  $F_2$  sunt integrale prime Hamiltoniene ale unui sistem, atunci paranteza lor Poisson  $[F_1, F_2]$  este integrală primă a aceluiași sistem.

*Demonstrație:*

Dacă  $F_1$  și  $F_2$  sunt integrale prime Hamiltoniene atunci acestea satisfac relațiile

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + [F_1, H] = 0,$$

respectiv

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + [F_2, H] = 0.$$

Trebuie să demonstrăm că

$$\frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] + [[F_1, F_2], H] = 0.$$

Utilizăm comportarea parantezei Poisson la derivarea parțială cu timpul

$$\frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] = \left[ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right] + \left[ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right].$$

Înlocuim în relația de mai sus  $\frac{\partial F_1}{\partial t}$  și  $\frac{\partial F_2}{\partial t}$  din condiția ca o observabilă clasică să fie integrală primă Hamiltoniană și obținem

$$\frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] = -[[F_1, H], F_2] - [F_1, [F_2, H]].$$

Pe baza identității Jacobi găsim că

$$-[[F_1, H], F_2] - [F_1, [F_2, H]] = -[[F_1, F_2], H].$$

Substituind ultima relație în cea anterioară obținem ceea ce trebuia demonstrat.

**4. Să se scrie ecuația Hamilton Jacobi și să se definească noțiunea de integrală completă. Să se enunțe și să se demonstreze teorema Jacobi referitoare la ecuația Hamilton-Jacobi.**

Ecuația Hamilton Jacobi are forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t\right) = 0$$

Ecuația Hamilton-Jacobi este o ecuație cu derivate parțiale, funcția necunoscută fiind  $S$ . Soluția ecuației este de forma  $S = S(t, q^i, c_1, \dots, c_f)$ , unde  $c_1, \dots, c_f$  sunt constante arbitrare.

O soluție  $S(q^i, \beta_i, t)$  a ecuației Hamilton-Jacobi se numește *integrală completă* dacă

$$\text{rang}\left(\frac{\partial^2 S(q^i, \beta_i, t)}{\partial q^i \partial \beta_j}\right) = f = \text{nr. gradelor de libertate ale sistemului.}$$

Ultima condiție ne permite să explicităm  $(q^i, p_i)$  ca funcții de timp și  $2f$  constante arbitrare  $q^i = q^i(t, \alpha^i, \beta_i)$  respectiv  $p_i = p_i(t, \alpha^i, \beta_i)$ .

*Teorema Jacobi*

Fie  $S(q^i, \beta_i, t)$  o integrală completă a ecuației Hamilton-Jacobi. Atunci funcțiile

$q^i = q^i(t, \alpha^i, \beta_i)$  și  $p_i = p_i(t, \alpha^i, \beta_i)$  obținute prin explicitare din relațiile

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial q^i} \\ \alpha^i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial \beta_i} \end{cases}$$

sunt soluții ale ecuațiilor canonice Hamilton.

Demonstrație:

Aplicând derivata totală în raport cu timpul în ambii membri ai

relației  $\alpha^i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial \beta_i}$  obținem

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \beta_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \beta_i} \dot{q}^j.$$

Derivând parțial în raport cu  $\beta_i$  ambii membri ai ecuației Hamilton-Jacobi, deducem că

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_i \partial q^j}.$$

Scăzând ultimele două relații ajungem la sistemul omogen de  $f$  ecuații algebrice

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \beta_i} \left( \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right).$$

Necunoscutele sistemului sunt funcțiile  $u^j = \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j}$ . Ținând cont că  $S$  este integrală completă, ajungem la concluzia că sistemul anterior are doar soluția banală

$$u^j = \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0,$$

deci  $q^i, p_i$  verifică primul set de ecuații Hamilton.

Vom demonstra în cele ce urmează că îl verifică și pe al doilea.

Aplicăm derivata totală în raport cu timpul în ambii membri ai relației  $p_i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial q^i}$ .

Obținem

$$\dot{p}^i = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^j.$$

Derivăm parțial ecuația Hamilton-Jacobi în raport cu  $q^i$  și obținem

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}.$$

Scăzând ultimele două relații obținem

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Prin urmare  $q^i, p_i$  verifică și cel de-al doilea set de ecuații Hamilton.

## Disciplina D6: TERMODINAMICĂ ȘI FIZICĂ STATISTICĂ

### 1. Deducerea proprietăților de echilibru (în formularea entropică).

Considerăm un sistem complet izolat  $S$  format din reuniunea a două subsisteme  $S_1$  și  $S_2$

$$S_1 \cup S_2.$$

Fie



$X_\alpha = (U, X_1, \dots, X_n)$  parametrii extensivi de stare ai sistemului  $S$ ,  
 $X_\alpha^{(1)} = (U^{(1)}, X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)})$  parametrii extensivi de stare ai subsistemului  $S_1$ ,  
 $X_\alpha^{(2)} = (U^{(2)}, X_1^{(2)}, \dots, X_n^{(2)})$  parametrii extensivi de stare ai subsistemului  $S_2$ .  
 Folosind aceste notații, avem

$$X_\alpha = X_\alpha^{(1)} + X_\alpha^{(2)}, \alpha = 0, 1, \dots, n.$$

Deoarece am presupus că întregul sistem este *complet izolat* rezultă

$$X_\alpha = C_\alpha,$$

unde  $C_\alpha$  sunt niște constante.

Ultimele două relații conduc la

$$X_\alpha^{(1)} + X_\alpha^{(2)} = C_\alpha.$$

Inițial, presupunem că întregul sistem se află într-o stare de echilibru împiedicat în raport cu toate interacțiile la care pot participa subsistemele. Rezultă că subsistemele nu interacționează între ele prin niciuna dintre interacțiile la care pot participa. În consecință, avem constrângerile interne:

$$\begin{cases} X_\alpha^{(1)} = C_\alpha^{(1)} \\ X_\alpha^{(2)} = C_\alpha^{(2)} \end{cases}$$

Evident, constrângerile interne trebuie să fie compatibile cu relațiile care descriu izolarea totală a întregului sistem

$$C_\alpha^{(1)} + C_\alpha^{(2)} = C_\alpha.$$

Despărțim parametrii  $X_\alpha^{(1)}$  și  $X_\alpha^{(2)}$  în două subseturi, sub forma

$$\begin{aligned} X_\alpha^{(1)} &= (X_A^{(1)}, X_a^{(1)}), \\ X_\alpha^{(2)} &= (X_A^{(2)}, X_a^{(2)}). \end{aligned}$$

Ridicăm constrângerile interne care interzic interacțiile de tip  $a$  și le menținem pe cele de tip  $A$ . Atunci constrângerile interne se reduc la

$$\begin{aligned} X_A^{(1)} &= C_A^{(1)}, \\ X_A^{(2)} &= C_A^{(2)}, \end{aligned}$$

în timp ce ceilalți parametrii extensivi satisfac relațiile

$$X_a^{(1)} + X_a^{(2)} = C_a,$$

unde  $X_a^{(1)}$  și  $X_a^{(2)}$  nu sunt mărimi constante.

Știm că după ridicarea constrângerilor de tip  $a$ , întregul sistem va ajunge (conform postulatelor formulării Gibbs) într-o stare de echilibru în care *entropia sistemului este maximă*. Condiția necesară și suficientă pentru ca entropia să aibă un maxim este

$$dS = 0, \quad d^2S < 0.$$

Stabilisem anterior că entropia întregului sistem este *aditivă* în raport cu subsistemele componente adică

$$S(X_\alpha) = S^{(1)}(X_\alpha^{(1)}) + S^{(2)}(X_\alpha^{(2)}).$$

Ținând cont de despărțirea parametrilor în două subseturi  $X_\alpha^{(1)}$  și  $X_\alpha^{(2)}$ , găsim

$$S(X_\alpha) = S^{(1)}(X_A^{(1)}, X_a^{(1)}) + S^{(2)}(X_A^{(2)}, X_a^{(2)}).$$

Diferențind ultima relație obținem

$$\begin{aligned} dS &= dS^{(1)}(X_A^{(1)}, X_a^{(1)}) + dS^{(2)}(X_A^{(2)}, X_a^{(2)}) = \\ &= \sum_A \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_A^{(1)}} dX_A^{(1)} + \sum_a \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} dX_a^{(1)} + \sum_A \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_A^{(2)}} dX_A^{(2)} + \sum_a \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}} dX_a^{(2)}. \end{aligned}$$

Ținând cont de faptul că  $dX_A^{(1)} = 0 = dX_A^{(2)}$  și că  $dX_a^{(2)} = -dX_a^{(1)}$  rezultă

$$dS = \sum_a \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} - \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}} \right) dX_a^{(1)}.$$

Utilizând ecuația

$$dS = 0,$$

obținem

$$\sum_a \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} - \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}} \right) dX_a^{(1)} = 0.$$

Deoarece ultima relație are loc pentru variații diferențiale independente  $dX_a^{(1)}$ , rezultă

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}}.$$

Ultimele relații caracterizează complet starea de echilibru obținută după ridicarea constrângerilor interne de tip  $a$ .

Știm că  $F_\alpha = \frac{\partial S}{\partial X_\alpha}$  sunt parametrii intensivi entropici conjugați cu parametrii extensivi

$X_\alpha$ . Atunci condițiile de echilibru capătă forma

$$F_a^{(1)} = F_a^{(2)},$$

unde  $F_a^{(1)} = \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}}$  sunt parametrii intensivi entropici conjugați cu parametrii extensivi

$X_a^{(1)}$  din subsistemul  $S_1$ , în timp ce  $F_a^{(2)} = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}}$  sunt parametrii intensivi entropici

conjugați cu parametrii extensivi  $X_a^{(2)}$  din subsistemul  $S_2$ .

*Concluzie:* În urma ridicării constrângerilor care interzic interacțiile de tip  $a$  între cele două subsisteme, întregul sistem ajunge într-o stare de echilibru caracterizată prin egalitatea parametrilor intensivi entropici de tip  $a$  ai celor două subsisteme.

## 2. Ecuația Euler

Ecuația fundamentală în reprezentarea entropică are forma

$$S = S(U, X_1, \dots, X_n)$$

în timp ce în reprezentarea energetică devine

$$U = U(S, X_1, \dots, X_n).$$

Postulatul formulării Gibbs evidențiază că entropia este *funcție omogenă de ordinul I* (în sens Euler) de parametrul de stare

$$S(\lambda U, \lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda S(U, X_1, \dots, X_n).$$

Deoarece este parametru extensiv, energia internă va avea aceeași proprietate

$$U(\lambda S, \lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda U(S, X_1, \dots, X_n).$$

Utilizând notațiile

$$X_\alpha = (U, X_1, \dots, X_n),$$

$$\bar{X}_\alpha = (S, X_1, \dots, X_n),$$

proprietățile de omogenitate capătă forma

$$S(\lambda X_\alpha) = \lambda S(X_\alpha),$$

$$U(\lambda \bar{X}_\alpha) = \lambda U(\bar{X}_\alpha).$$

Derivăm ultimele două relații în raport cu parametrul  $\lambda$  și găsim

$$\sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial S(\lambda X_\alpha)}{\partial(\lambda X_\alpha)} \frac{\partial(\lambda X_\alpha)}{\partial \lambda} = S(X_\alpha),$$

$$\sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial U(\lambda \bar{X}_\alpha)}{\partial(\lambda \bar{X}_\alpha)} \frac{\partial(\lambda \bar{X}_\alpha)}{\partial \lambda} = U(\bar{X}_\alpha).$$

Ținând cont de faptul că

$$F_\alpha = \left( \frac{\partial S(X_\alpha)}{\partial X_\alpha} \right)_{X_\alpha \neq X_\beta},$$

$$P_\alpha = \left( \frac{\partial U(\bar{X}_\alpha)}{\partial \bar{X}_\alpha} \right)_{\bar{X}_\alpha \neq \bar{X}_\beta},$$

obținem *ecuația Euler în reprezentarea entropică*

$$S(X_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n F_\alpha X_\alpha,$$

respectiv *ecuația Euler în reprezentarea energetică*

$$U(\bar{X}_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n P_\alpha \bar{X}_\alpha,$$

sau echivalent

$$S(U, X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{T} U + \sum_{i=1}^n F_i X_i,$$

$$U(S, X_1, \dots, X_n) = TS + \sum_{i=1}^n P_i X_i.$$

Atunci când cunoaștem ecuația fundamentală putem deduce toate ecuațiile primare de stare.

Ecuația Euler (în oricare dintre reprezentări) arată că dacă știm toate ecuațiile primare de stare atunci putem construi ecuația fundamentală în oricare dintre reprezentări.

Presupunem că știm ecuațiile primare de stare

$$F_\alpha = F_\alpha(U, X_1, \dots, X_n),$$

sau în mod echivalent

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T}(U, X_1, \dots, X_n),$$

$$F_i = F_i(U, X_1, \dots, X_n).$$

Substituind ultimele relații în ecuația Euler în reprezentarea entropică găsim ecuația fundamentală în această reprezentare

$$S(X_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n F_\alpha(X_\alpha) X_\alpha,$$

sau echivalent

$$S(U, X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{T}(U, X_1, \dots, X_n)U + \sum_{i=1}^n F_i(U, X_1, \dots, X_n)X_i.$$

Similar procedăm și în reprezentarea energetică. Presupunem cunoscute ecuațiile primare de stare

$$P_\alpha = P_\alpha(S, X_1, \dots, X_n),$$

sau echivalent

$$T = T(S, X_1, \dots, X_n),$$

$$P_i = P_i(S, X_1, \dots, X_n).$$

Substituind ultimele relații în ecuația Euler în reprezentarea energetică, găsim ecuația fundamentală în această reprezentare

$$U(\bar{X}_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n P_\alpha(\bar{X}_\alpha) \bar{X}_\alpha,$$

sau echivalent

$$U(S, X_1, \dots, X_n) = T(S, X_1, \dots, X_n)U + \sum_{i=1}^n P_i(S, X_1, \dots, X_n)X_i.$$

*Concluzie:* Ecuațiile Euler ne arată cum putem construi ecuația fundamentală atunci când cunoaștem toate ecuațiile primare de stare.

### 3. Principiul variational fundamental al fizicii statistice de echilibru

În cazul sistemelor clasice, *entropia (statistica)*,  $S$ , este definită prin relația:

$$S(\rho^*) = -k \langle \ln \rho^* \rangle \quad (1)$$

unde  $k$  este constanta lui Boltzmann iar

$$\langle \ln \rho^* \rangle = \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) \ln \rho^*(x) \quad (2)$$

este media funcției  $\ln \rho^*(x)$  pe ansamblul statistic staționar.

Am ales să lucrăm cu mărimi stelate ( $\rho^*(x)$ ,  $d^{2s} x^*$ ) pentru a putea îngloba în analiză care va urma și sistemele de particule identice.

În funcție de condițiile în care se realizează echilibrul termodinamic, densitatea de probabilitate  $\rho^*(x)$  satisface condiții suplimentare numite constrângeri. O primă constrângere, care este întotdeauna prezentă, este *condiția (constrângerea) de normare*:

$$f_0[\rho^*] \equiv \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) - 1 = 0 \quad (3)$$

Celelalte constrângeri care pot să apară într-o teorie depind în general de condițiile de preparare a stării de echilibru. Ele vor fi notate prin:

$$f_1[\rho^*] = 0 \quad (4)$$

$$f_2[\rho^*] = 0 \quad (5)$$

⋮

#### *Principiul fundamental al fizicii statistice de echilibru*

Un ansamblu statistic de echilibru este descris de o densitate de probabilitate  $\rho^*(x)$  care realizează maximul entropiei statistice

$$S[\rho^*] = -k \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) \ln \rho^*(x) \quad (6)$$

În raport cu valorile entropiei pe toate funcțiile  $\rho^*(x)$  care satisfac constrângerile.

Principiul fundamental enunțat anterior ne conduce la o problemă de extremum cu legături. O astfel de problemă se rezolvă folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Mai exact, extremul lui  $S[\rho^*]$  în prezența legăturilor (3), (4), (5), ... se exprimă prin extremul funcționalei

$$\mathcal{S}[\rho^*] = S[\rho^*] - \alpha_0 f_0[\rho^*] - \alpha_1 f_1[\rho^*] - \dots \quad (7)$$

unde  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  sunt multiplicatori Lagrange.

Condiția necesară de extrem pentru funcționala (7) este:

$$\delta \mathcal{S}[\rho^*] = 0 \quad (8)$$

unde

$$\delta \mathcal{S} = \left. \frac{d \mathcal{S}[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} \right|_{u=0} \quad (9)$$

În ultima relație,  $u$  este un parametru care nu depinde de  $x$  (sau de  $\rho^*$ ) iar  $\delta \rho^*$  sunt niște variații arbitrare ale lui  $\rho^*$ . Folosind relațiile (6), (3), (4), (5) etc. găsim

$$\begin{aligned} \frac{d \mathcal{S}[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} &= \frac{d}{du} \left( \int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k(\rho^* + u \delta \rho^*) \ln(\rho^* + u \delta \rho^*) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_0(\rho^* + u \delta \rho^*) - \alpha_1 f_1[\rho^* + u \delta \rho^*] - \alpha_2 f_2[\rho^* + u \delta \rho^*] - \dots \right) = \\ &= \int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k \delta \rho^* \ln(\rho^* + u \delta \rho^*) - k(\rho^* + u \delta \rho^*) \frac{1}{\rho^* + u \delta \rho^*} \delta \rho^* - \alpha_0 \delta \rho^*) - \\ &\quad - \alpha_1 \frac{df_1[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} - \alpha_2 \frac{df_2[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Evaluăm (10) pentru  $u=0$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \left. \frac{d \mathcal{S}[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} \right|_{u=0} = \int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k \ln \rho^* - k - \alpha_0) \delta \rho^* - \alpha_1 \left. \frac{df_1[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} \right|_{u=0} - \\ &\quad - \alpha_2 \left. \frac{df_2[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} \right|_{u=0} - \dots \quad (11) \end{aligned}$$

Introducem (11) în (8) și obținem:

$$\int_{\Gamma} d^{2s}x^* (-k \ln \rho^* - k - \alpha_0) \delta \rho^* - \alpha_1 \frac{df_1[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} \Big|_{u=0} - \alpha_2 \frac{df_2[\rho^* + u \delta \rho^*]}{du} \Big|_{u=0} - \dots = 0$$

Cunoasterea tuturor constrangerilor  $f_1, f_2, \dots$  care apar in ultima ecuatie ne permite sa determinam complet  $\rho^*(x)$  pe baza acestei ecuatii.

#### 4. Ansamblul canonic clasic

Prin definitie, in ansamblul canonic clasic starea de echilibru se prepara prin contactul de echilibru al sistemului de studiat cu un termostat care fixeaza temperatura sistemului (T) la valoarea temperaturii termostatului ( $T_r$ ):  $T=T_r$ . Deoarece nu avem interactii mecanice, toti parametri mecanici  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ai sistemului sunt fixati. Fixarea parametrilor (T,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) va determina complet starea de echilibru in reprezentarea potentialului Helmholtz (energia libera). In particular, fixarea parametrilor (T,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) fixeaza energia interna

$$U = U(T, X_1, X_2, \dots, X_n) = \text{fixata}$$

Identificand energia interna U cu media pe ansamblul statistic a Hamiltonianului  $\langle H \rangle$ :

$$U = \langle H \rangle$$

fixarea energiei interne va conduce la fixarea mediei Hamiltonianului:

$$\langle H \rangle \equiv \bar{E} = \text{valoarea fixata}$$

Desi media Hamiltonianului este fixata, datorita interactiei dintre sistem si termostat energia U va fi o variabila aleatoare. Fixarea mediei Hamiltonianului este o noua constrangere care apare alaturi de constrangerea de normare in cazul ansamblului canonic clasic:

$$f_0[\rho^*] \equiv \int_{\Gamma} d^{2s}x^* \rho^*(x) - 1 = 0 \quad (\text{constrangerea de normare}) \quad (1)$$

$$f_1[\rho^*] \equiv \int_{\Gamma} d^{2s}x^* H(x) \rho^*(x) - \bar{E} = 0 \quad (\text{constrangerea de fixare a mediei energiei}) \quad (2)$$

Alte constrangeri suplimentare nu mai apar in cazul ansamblului canonic clasic.

Aplicam principiul fundamental al fizicii statistice de echilibru pentru a determina densitatea de probabilitate  $\rho^*(x)$ . Construim functionala

$$\mathcal{S}[\rho^*] = S[\rho^*] - \alpha_0 f_0[\rho^*] - \alpha_1 f_1[\rho^*] \quad (3)$$

Construim

$$\delta \mathcal{S} = \frac{d\mathcal{S}(\rho^* + u \delta \rho^*)}{du} \Big|_{u=0} = \int d^{2s}x^* (-k \ln \rho^* - k - \alpha_0 - \alpha_1 H(x)) \delta \rho^*(x).$$

Din conditia  $\delta \mathcal{S} = 0$  obtinem ecuatia:

$$\ln \rho^*(x) = -1 - \frac{\alpha_0}{k} - \frac{\alpha_1}{k} H(x)$$

Care ne conduce la

$$\rho^*(x) = e^{-1 - \frac{\alpha_0}{k} - \frac{\alpha_1}{k} H(x)}$$

Introducem notatia

$$\frac{1}{Z^*} \equiv e^{-1 - \frac{\alpha_0}{k}}$$

astfel incat ultima relatie poate fi scrisa sub forma

$$\rho^*(x) = \frac{1}{Z^*} e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)} \quad (4)$$

Marimea  $Z^*$  se numeste integrala de stare canonica si contine toata informatia termodinamica cu privire la sistem. Din conditia de normare pentru  $\rho^*(x)$  dat de (4) obtinem:

$$Z^* = \int_{\Gamma} d^{2s}x^* e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)}$$

Pentru a determina complet densitatea de probabilitate si implicit integrala de stare canonica trebuie sa determinam multiplicatorul Lagrange  $\alpha_1$ . Pentru aceasta vom calcula entropia statistica S. Vom avea

$$\ln \rho^* = -\ln Z^* - \frac{\alpha_1}{k} H$$

$$S = -k \langle \ln \rho^* \rangle = k \ln \langle Z^* \rangle + \alpha_1 \langle H \rangle$$

Folosim faptul ca  $\langle Z^* \rangle = Z^*$  (deoarece  $Z^*$  nu depinde de x) si  $\langle H \rangle = U$ . Atunci

$S = k \ln Z^* + \alpha_1 U$ , de unde exprimam

$$k \ln Z^* = S - \alpha_1 U \quad (5)$$

Derivam ultima relatie in raport cu  $\alpha_1$ . Pentru membrul stang vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (k \ln Z^*) &= k \frac{\partial (\ln Z^*)}{\partial Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial \alpha_1} = k \frac{1}{Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial \alpha_1} = k \frac{1}{Z^*} \int_{\Gamma} d^{2s}x^* \left(-\frac{1}{k} H(x) e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)}\right) = \\ &= -\int_{\Gamma} d^{2s}x^* H(x) \frac{1}{Z^*} e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)} = -\int_{\Gamma} d^{2s}x^* H(x) \rho^*(x) = -\langle H \rangle = -U \quad (6) \end{aligned}$$

Derivam in raport cu  $\alpha_1$  membrul drept al relatiei (5):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(S - \alpha_1 U) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - U - \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \quad (7)$$

Din (5), (6) și (7) se obține:

$$-U = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - U - \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1}$$

adică  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1}$  ceea ce ne conduce la

$$\alpha_1 = \frac{\partial S / \partial \alpha_1}{\partial U / \partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad (7')$$

În consecință, densitatea de probabilitate în ansamblul canonic are forma:

$$\rho^*(x) = \frac{1}{Z^*} e^{-\frac{H(x)}{kT}} \quad (8)$$

Construim acum termodinamica statistică în ansamblul canonic. Plecăm de la relația (5) în care substituim  $\alpha_1$  cu  $1/T$ . Vom avea:

$$-kT \ln Z^* = U - TS \quad (9)$$

Știm că  $U - TS$  este chiar transformata Legendre a energiei libere în raport cu  $S$ , adică energia liberă  $F(T, X_1, \dots, X_n)$ . Astfel, relația (9) se poate scrie sub forma

$$F(T, X_1, \dots, X_n) = -kT \ln Z^*(T, X_1, \dots, X_n) \quad (10)$$

Am ajuns la concluzia că, în ansamblul canonic clasic termodinamica statistică se construiește cu ajutorul energiei libere. Pentru a putea determina energia liberă trebuie să determinăm integrala de stare  $Z^*$  în care apare dependența de  $X_1, \dots, X_n$  prin dependența Hamiltonianului de acești parametri:  $H=H(x, X_1, \dots, X_n)$ .

## Disciplina D7: FIZICA MEDIULUI

### 1. Fluxul termic și stocarea căldurii în sol

Pentru a analiza fluxul de căldură în sol sau în atmosferă, este util să efectuăm o divizare mentală a mediului de studiat într-un număr mare de straturi subțiri, și să considerăm fluxul de căldură și depozitarea lui în fiecare astfel de strat. Cantitatea de căldură stocată într-un strat subțire de aer este mică în comparație cu cantitatea de căldură transferată prin acel strat. În primii câțiva metri ai atmosferei, căldura înmagazinată în aer este în general ignorată și procesele de transfer de căldură sunt presupuse a fi aproximativ stabile. Spre deosebire de atmosfera, în sol termenul de stocare este mult mai mare în comparație cu cel de transfer și nu poate fi ignorat. Fluxul de căldură de la un strat la altul se poate calcula folosind legea Fourier

$$G = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

dar trebuie să fie rezolvată simultan și ecuația de continuitate pentru a găsi variațiile de temperatură cu adâncimea și cu timpul în sol. Ecuația de continuitate este:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial z} \quad (2)$$

unde  $\rho_s$  este densitatea solului,  $c_s$  este căldura specifică a solului,  $\rho_s c_s$  este capacitatea

calorică volumetrică și  $G$  este densitatea de flux de căldură în sol. Membrul stâng al ecuației anterioare reprezintă rata de căldură stocată într-un strat de sol iar membrul drept reprezintă divergența fluxului de căldură sau rata schimbului densității de flux de căldură cu adâncimea. Folosind exprimarea (1) pentru densitatea de flux de căldură, ecuația de continuitate (2) devine

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Dacă conductivitatea termală este constantă cu adâncimea,  $k$  poate fi scos în fața derivatei. Putem de asemenea împărți prin  $\rho_s c_s$  pentru a obține formula mult mai familiară a ecuației căldurii:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4)$$

unde

$$\kappa = \frac{k}{\rho_s c_s} \quad (5)$$

este *difuzivitatea termală a solului*. În acord cu relația (4), locația din sol unde temperatura se schimbă rapid în timp este locația unde schimbul cu adâncimea al gradientului de temperatură este mai mare.

În principiu, soluțiile ecuației (3) pot simula comportarea temperaturii solului în spațiu și timp. Condițiile pentru care soluții analitice pot fi obținute sunt destul de restrictive și nu reprezintă foarte bine comportarea reală a solului. Condițiile realiste pot fi simulate prin rezolvarea numerică a ecuațiilor menționate, dar aceste soluții nu sunt foarte utile pentru a înțelege comportarea sistemului. Să privim la un cuplu de soluții simple ale ecuației (3). Acestea sunt utile pentru a înțelege, cel puțin calitativ, tiparele spațiale și temporale în temperatura solului. Dacă solul este presupus a fi infinit de adânc, cu proprietăți termale uniforme, și cu o temperatură la suprafață care variază sinusoidal în acord cu ecuația:

$$T(0, t) = T_{medie} + A(0) \sin \omega(t - t_0) \quad (6)$$

atunci temperatura la orice adâncime și orice moment de timp este dată de

$$T(z, t) = T_{medie} + A(0) \exp(-z/D) \sin[\omega(t - t_0) - z/D] \quad (7)$$

unde  $t_0$  este deplasarea de fază care depinde de faptul ca  $t$  este timpul local, timpul universal sau alt timp de referință.  $T_{medie}$  este temperatura medie pentru un ciclu de temperatura,  $A(0)$  este amplitudinea fluctuațiilor de temperatura (1/2 diferenței dintre maxim și minim) și  $\omega$  este frecvența unghiulară  $\omega = 2\pi/\tau$ ,  $\tau$  fiind perioada fluctuațiilor de temperatura.  $D$  reprezintă amortizarea în adâncime și se calculează cu formula  $D = \sqrt{2K/\omega}$ . Din (7) se poate vedea că  $D$  determină cât de mult amplitudinea variației de temperatura este atenuată cu adâncimea și cât de mult este deplasată faza în timp.

Când  $z=D$  exponentiala din (7) are valoarea 0,37, indicând că amplitudinea fluctuațiilor de temperatura la acea adâncime este un procent de 37% din amplitudinea la suprafață. La  $z=2D$  amplitudinea este  $\exp(-2) = 0.14$ , și la  $z = 3D$  amplitudinea este  $\exp(-3) = 0.05$ .

Astfel, amortizarea cu adâncimea da informații utile despre adâncimea la care fluctuațiile de temperatura patrund în sol. Chiar dacă temperatura suprafeței nu are o formă sinusoidală, atenuarea cu adâncimea va da o bună idee a cum vor patrunde în sol fluctuațiile de temperatura diurnă și anuală. Atenuarea cu adâncimea afectează de asemenea și faza. La adâncimea la care  $z/D=x$  sau  $z=xD$ , temperatura ajunge la un maxim în cazul în care temperatura suprafeței este la minim.

## 2. Transportul de apă în medii poroase. Legea lui Darcy

Apă joacă un rol important în balanța de energie a solului, a plantelor și animalelor, astfel că este important să înțelegem cum se produce *transportul de apă în sol*. Dintre procesele importante în determinarea bugetului de apă în sol amintim: infiltrarea apei în sol, redistribuirea apei în profilul solului, evaporarea apei de la suprafața solului și transpirația plantelor. De asemenea, prin deplasarea apei de la suprafață către adâncime (prin permeabilitate) și invers (prin capilaritate) se realizează și transmiterea căldurii în sol. În consecință, creșterea coeficientului de permeabilitate a solului determină și o sporire a coeficientului său de conductibilitate calorică.

Transportul de materie sau de energie într-un mediu constă în suprapunerea a două procese: (i) O mișcare descrisă printr-o *lege dinamică* (mișcarea poziției particulelor în raport cu matricea solidă); (ii) O variație a stocurilor în timp (acumulare sau pierdere). Această variație are loc datorită influențelor externe (precipitații, evaporare, radiații), consumurilor locale (necesarul prelevat de rădăcini) sau schimburilor cu alte faze (îngheț, evaporare, condensare). Variațiile stocului sunt descrise cantitativ prin *legea conservării materiei (ecuația de continuitate)*. În concluzie, descrierea globală a transporturilor se obține prin *asocierea unei legi dinamice cu ecuația de continuitate*.

Experimental s-a constatat că mișcarea apei într-un mediu poros poate fi produsă de existența unor gradienti (alții decât gradientul de sarcină). Astfel, apă se deplasează dinspre zona cu voltaj ridicat spre cea cu voltaj scăzut. Acest principiu a fost folosit pentru drenajul electrocinetic a solurilor puțin permeabile. De asemenea, apă se deplasează din zonele cu concentrație mare spre cele cu concentrație mică și din zonele cu temperatură mare spre cele cu temperatură redusă.

Curgerea într-un mediu poros poate fi: *uniformă* (caracteristicile curgerii sunt invariabile în timp și spațiu), *permanentă* (constantă în timp) și *nepermanentă*.

Din punct de vedere al regimului vitezelor curgerii poate fi: *laminară* (curgerea este lentă și se desfășoară în straturi paralele, fără amestec de masă și energie între ele), *turbulentă* (curgere cu viteze mari, având loc transferul de masă și energie între straturi). Stabilirea regimului de curgere se face pe baza numărului Reynolds corespunzător:

$$Re = \frac{U \cdot d}{\nu} \quad (1)$$

unde  $U$  este viteza medie a apei (m/s),  $d$  este diametrul porilor (m) iar  $\nu$  este vâscozitatea cinematică ( $m^2/s$ ). Dacă  $Re < 10$  mișcarea este laminară iar dacă  $Re > 10$  mișcarea este turbulentă.

Legea care descrie transportul de apă în medii poroase cum ar fi solul este legea lui Darcy. Mai exact, această lege descrie *fluxul de apă* din sol. Pentru un mediu poros nesaturat această lege este de forma

$$Q = -K \cdot S \cdot \frac{\Delta H}{\Delta x} \quad (2)$$

unde  $\Delta H$  reprezintă pierderea de sarcină la traversarea probei

$$\Delta H = H_2 - H_1 = (z_2 + h_2) - (z_1 + h_1) < 0 \quad (3)$$

iar  $\Delta H / \Delta x$  reprezintă pierderea de sarcină pe unitatea de lungime, în direcția de curgere (sau gradientul hidraulic, forța motrice, panta hidraulică) iar  $K$  este conductivitatea hidraulică ( $[K]_{SI} = LT^{-1}$ ).

Debitul specific,  $q = Q/S$  (debit prin unitatea de suprafață sau flux) reprezintă volumul de apă scurs prin unitatea de suprafață în unitatea de timp. Acest flux are dimensiunile unei viteze (este viteza fictivă pe care ar avea-o apa dacă ar traversa toată suprafața  $S$  a solului).

Legea lui Darcy se poate scrie sub forma diferențială:

$$q = -K \frac{dH}{ds} \quad (4)$$

s fiind o direcție oarecare. Într-un sistem tridimensional ultima relație se scrie astfel:

$$\vec{q} = -K \text{grad}H \quad (5)$$

Această lege arată că mișcarea se face în direcția forței motrice reprezentată de gradientul hidraulic, fluxul  $\vec{q}$  fiind un vector perpendicular pe liniile echipotențiale ( $H = ct$ ). Conductivitatea hidraulică  $K$  este un tensor.

Legea lui Darcy este valabilă pentru regimurile de curgere laminară care au loc, de obicei, în nisipurile fine, silțuri și argile. În nisipurile grosiere și pietrișuri, vitezele cresc și regimul devine turbulent.

## 3. Indicatori organoleptici și fizici ai apelor naturale

Calitatea apei nu rămâne constantă în timp deoarece mulți factori de origine naturală sau produși de om pot afecta calitatea apei. Pentru a caracteriza calitatea apei și gradul de

poluare a acesteia se utilizează indicatorii de calitate. Indicatorii de calitate a apei se clasifică în: indicatori organoleptici, fizici, chimici, radioactivi, biologici și bacteriologici.

**Indicatorii organoleptici** se referă la culoarea, gustul și mirosul apelor. *Culoarea reală* a apelor este influențată de undele luminoase nepatrune în apă și de substanțele dizolvate în apă. Aceasta se determină prin compararea probei de apă cu etaloane preparate în laborator. Culoarea apelor naturale și cea a apelor poluate poate fi o culoare aparentă care se datorează suspensiilor solide ușor de filtrat prin depunere și filtrare. Un alt indicator de calitate este *mirosul apelor*. Mirosul apelor de suprafață s-ar putea datora fie unor materii organice în curs de descompunere, fie unor substanțe chimice provenite din apele industriale poluate. Apele subterane sunt, în general, inodore; când este prezent în apă subterană, hidrogenul sulfurat ( $H_2S$ ) produce un miros caracteristic. Prezența  $H_2S$  poate fi de origine minerală (contactul apei cu pirita aflată în stratul acvifer) sau de origine organică, indiciu că în stratul freatic au pătruns resturi organice sau dejectii animale, respectiv umane. După intensitate, mirosul apelor este clasificat în șase categorii: fără miros; cu miros neperceptibil; cu miros perceptibil unui specialist; cu miros perceptibil unui consumator; cu miros puternic și cu miros foarte puternic.

*Gustul apei* reprezintă o caracteristică deosebit de importantă pentru apele potabile. Lipsa de gust a unui lichid este destul de bine ilustrată de expresia apă de ploaie și asta deoarece apa se apropie de apă chimică pură care este fără gust. Apa provenită din precipitații adună din atmosfera gaze (oxigen, bioxid de carbon și oxizi de azot) care formează acidul carbonic și azotic, care-i conferă apei o mai mare putere de dizolvare a unor săruri cu care vine în contact. Când provine din stratul freatic, iar nivelul piezometric este sub 3 m, concentrația de săruri dizolvate crește și ca urmare a fenomenului de evaporare. Sărurile dizolvate în apă sunt în principal carbonații de calciu și magneziu, sulfatii și bicarbonații de calciu și magneziu. Este de precizat că, atunci când cantitatea de substanțe dizolvate depășește 0,5 g/l, apa dulce începe să aibă un gust specific: dulceag când apă conține sulfat de calciu; sărat când conține cloruri sau sulfat de sodiu; amar când apă conține sulfat sau cloruri de magneziu; acru când conține bicromat sau cloruri de fier. Apa devine acidulată când conține bioxid de carbon.

**Indicatorii fizici** se referă la pH, temperatura, conductivitate electrică, radioactivitate, colmatarea, turbiditate. *Turbiditatea apei* este caracterizată prin lipsa de transparență a acesteia, ca urmare a existenței unor particule în suspensie. Pentru a pune în evidență turbiditatea, se are în vedere proprietatea opusă acesteia și anume limpezimea sau transparența. Lipsa de limpezime sau transparența a apei se poate datora conținutului de particule coloidale fine de argilă, precipitării unor săruri de magneziu și fier în suspensie, substanțelor organice sau microorganismelor. La acestea se mai pot adăuga și unele particule în suspensie gravimetrică care se depun, dacă apă este lăsată în repaus un anumit timp. Apele subterane, care interesează preponderent consumatorii de apă potabilă sunt, de obicei, mai limpezi. Cazuri de limpezire slabă apar când apele subterane conțin săruri solubile de fier sau mangan, care, în contact cu atmosfera, se transformă în săruri insolubile și rămân adesea în suspensie coloidală. *Temperatura apei* variază în funcție de proveniență și de anotimp. Încălzirea apei se datorează razelor solare ce pătrund în apă dar și transportului de căldură din atmosferă. Prin absorbția luminii de către apă, temperatura apei scade exponențial cu adâncimea. Transmiterea căldurii în straturile mai adânci se datorează circulației verticale a apei și a efectului de mișcare produs de vânt.

*Radioactivitatea* este proprietatea apei de a emite radiații permanente alfa, beta sau gama. *Conductivitatea* apelor constituie unul dintre indicatorii cei mai utilizați în aprecierea gradului de mineralizare a apelor cel puțin din următoarele considerente: măsurătorile de conductivitate (rezistivitate) a apei permit determinarea conținutului total de săruri dizolvate în apă; au avantajul diferențierii dintre săruri anorganice și organice (ponderal) pe baza mobilităților ionice specifice; elimină erorile datorate transformării speciilor de

carbonați/bicarbonați prin evaporare la  $105^{\circ}C$  (conform metodologiei de determinare gravitațională a rezidului fix, în cazul bicarbonaților pierderile sunt de circa 30%). *Concentrația ionilor de hidrogen* este un alt indicator fizic. pH-ul apelor naturale este cuprins între 6,5 și 8, abaterea de la aceste valori dănd indicații asupra poluării cu compuși anorganici. pH-ul și capacitatea de tamponare a acestuia constituie una din proprietățile esențiale ale apelor de suprafață și subterane, pe această cale asigurându-se un grad de suportabilitate naturală față de impactul cu acizi sau baze, sărurile de  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Ca^{2+}$  și  $Mg^{2+}$  jucând un rol esențial în acest sens. Capacitatea de tamponare a pH-ului este deosebit de importantă nu numai pentru echilibrele din apă apoasă, dar și pentru cele de la interfața cu materiile în suspensie, respectiv cu sedimentele.

Concentrația ionilor de hidrogen din apă, reprezintă un factor important care determină capacitatea de reactivitate a apei, agresivitatea acesteia, capacitatea apei de a constitui medii pentru dezvoltarea diferitelor organisme etc. Între valoarea pH-ului apei și aciditatea sau alcalinitatea acesteia nu există o identitate. Creșterea alcalinității sau acidității nu sunt însoțite și de variații corespunzătoare ale pH-ului, datorită capacității de tamponare de care dispun îndeosebi apele naturale. Principalul sistem tampon al apelor naturale îl reprezintă sistemul acid carbonic dizolvat/carbonați, pentru care pH-ul apei are valori cuprinse între 6,5 și 8,5.

#### 4. Difuzia moleculară. Legea lui Fick

În mediul natural organismele sunt supuse forței vântului sau apei, forte bazate pe *transportul de masă* la schimbul de oxigen și dioxid de carbon. Fenomenele însoțite de transport de substanță dintr-o regiune în alta a mediului se datorează ciocnirii dintre molecule, ciocnire care determină atât un transport de substanță cât și un transport de energie.

În general, în legea care descrie transportul de masă sau de energie apare un produs între un factor de proporționalitate și o forță de conducere. Când un fenomen este însoțit de un transport de substanță se spune că este vorba de o *difuzie moleculară*. Legea de transport care guvernează transportul difuziv al substanței este *legea lui Fick*.

Prin *difuzie moleculară* se înțelege o deplasare a moleculelor unui fluid, dintr-o regiune a spațiului în alta regiune. Pentru ca fenomenul de difuzie să se producă trebuie ca între cele două regiuni să existe un gradient de concentrație, difuzia având loc de la regiunea cu concentrație mai mare la cea cu concentrație mai mică (în sensul scăderii concentrației).

Prima abordare științifică a fenomenului de difuzie se datorează savantului german Adolf Fick (1855). Pentru simplitatea studiului fenomenului de difuzie moleculară vom considera că difuzia are loc după o singură direcție,  $Ox$ . Concentrația volumică,  $c$ , a

moleculilor fluidului considerat va fi atunci o funcție numai de  $x$ , adică  $c=c(x,t)$ . Presupunem ca există un gradient de concentrație adică

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \neq 0 \quad (1)$$

Una dintre marimile ce caracterizează difuzia este *densitatea de curent*,  $\vec{j}_N$ . Aceasta marime este numeric egală cu numărul de particule care trec în unitatea de timp prin unitatea de suprafață dispusă normal la direcția în care se produce difuzia. Determinările experimentale arată că densitatea de curent este proporțională cu gradientul concentrației, adică

$$\vec{j}_N = -D \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \vec{i} \quad (2)$$

Ultima relație reprezintă *legea lui Fick* pentru cazul difuziei pe o singură direcție. Coeficientul de proporționalitate,  $D$ , se numește *coeficient de difuzie*, iar semnul minus arată că difuzia are loc în sensul scăderii concentrației. Unitatea de măsură în S.I. pentru coeficientul de difuzie este  $m^2 s^{-1}$  iar valorile caracteristice au ordinul de mărime  $10^{-9} m^2 s^{-1}$  la temperatura camerei.

Pornind de la relația (2), Fick a reușit să exprime variația în timp a concentrației unei substanțe aflată sub acțiunea unui gradient de concentrație liniar. Pentru aceasta, se consideră un interval de volum foarte subțire (o felie) de grosime  $dx$  și suprafață transversală  $S$ , întinzându-se de la poziția  $x$  la poziția  $x + dx$  de-a lungul gradientului de concentrație. Volumul feliei va fi  $Sdx$ , iar variația de concentrație în unitatea de timp  $dc/dt$  poate fi calculată cu ajutorul legii de conservare a masei, adunând cantitatea adusă de fluxul prin suprafața  $S$  de la poziția  $x, j_N$ , și scăzând cantitatea extrasă de fluxul prin suprafața  $S$  de la poziția  $x+dx, j_N+dj_N$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{1}{\partial t} \left( \frac{j_N S \partial t - (j_N + dj_N) S \partial t}{S dx} \right) = \frac{j_N - (j_N + dj_N)}{dx} = \\ &= \frac{1}{dx} \left[ -D \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial x} \left( c + \frac{\partial c}{\partial x} dx \right) \right] = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Ultima relație poate fi scrisă, folosind legea întâi a lui Fick, sub forma

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right) = -\frac{\partial j_N}{\partial x} \quad (4)$$

Ultima relație reprezintă *ecuația de continuitate pentru fenomenul de difuzie*. Altfel spus, legea întâi a lui Fick împreună cu ecuația de continuitate ne permit să scriem ecuația

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

numită *ecuația diferențială a difuziei*. Aceasta ecuație descrie complet fenomenul de difuzie dacă se cunosc condițiile inițiale. Ea mai poartă numele de legea a doua a lui Fick.

Ecuația de difuzie este o ecuație diferențială de ordinul 2 în raport cu spațiul și de ordinul 1 în raport cu timpul. Ea poate fi rezolvată analitic în anumite cazuri simple, punând corect condițiile la limită. Ecuația exprimă faptul că orice neliniaritate a gradientului spațial de concentrație tinde să fie anulată în timp, la fel ca netezirea unei suprafețe.

În regim staționar concentrația volumică,  $c$ , are aceeași valoare într-un punct al fluidului la orice moment de timp. Difuzia în regim staționar se caracterizează prin condiția

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ și ecuația diferențială a difuziei va fi } D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0. \text{ După o primă integrare}$$

obținem  $\frac{\partial c}{\partial x} = const.$  Folosim relația (2) și obținem  $\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{j_N}{D}$ . Prin integrarea ultimei ecuații

$$\int_{n_0}^n dc = -\frac{j_N}{D} \int_0^x dx$$

ajungem la  $c(x) = c_0 - \frac{j_N}{D} x$ , relație ce ne arată că în cazul difuziei staționare concentrația volumică a particulelor variază liniar cu  $x$  în direcția în care are loc difuzia.

## Disciplina D8: FIZICA PAMANTULUI SI ATMOSFEREI. METEOROLOGIE

**1. Sa se scrie expresia geopotentialului in aproximatia Mac Cullagh. Sa se stabileasca expresia geopotentialului intr-un punct de la suprafata Pamantului, tinand cont de rotatia axiala a acestuia. Sa se determine expresia turtirii Pamantului in aproximatia de ordinul unu.**

Geopotentialul  $\Phi_a$ ,  $\vec{g}_a = -\nabla \Phi_a$ , într-un punct exterior Pamantului, în raport cu un sistem de referință (presupus inertial) legat de centrul acestuia, se aproximează (pentru un corp aproape sferic) prin formula Mac Cullagh,

$$\Phi_a(r, \phi) = -G \frac{M}{r} + G \frac{J_2 M a^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

unde  $J_2 \equiv \frac{B-A}{Ma^2}$ ,  $G$  este constanta atracției gravitaționale,  $M$  masa Pamantului,  $B$  este

momentul de inerție al Pamantului în raport cu axa de rotație și  $A$  momentul de inerție în raport cu o axa perpendiculară pe axa de rotație (și care trece prin centrul de masă al Pamantului),  $r$  distanța până la centrul Pamantului și  $\phi$  latitudinea (locului).

Pentru a determina potențialul într-un punct legat de suprafața Pamantului (într-un sistem de referință neinertial), introducem forța centrifugă de inerție

$$\vec{F}_{cf} = -m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = m \Omega^2 (\vec{i}x + \vec{j}y), \text{ cu } \vec{\Omega} \text{ viteza unghiulară de rotație diurnă.}$$



Geopotentialul total  $\Phi$  este definit astfel incat  $\vec{g} = -\nabla\Phi = \vec{g}_a + \vec{F}_{cf} / m$ , adica

$$-\nabla\Phi = -\nabla\Phi_a + \Omega^2(\vec{i}x + \vec{j}y) \text{ sau } -\nabla\Phi = -\nabla\Phi_a + \nabla\left(\frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)\right).$$

Obtinem astfel

$$\Phi = \Phi_a - \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \Phi_a - \frac{\Omega^2}{2}r^2 \cos^2 \phi \quad (2)$$

si in final expresia geopotentialului (total) in aproximatia Mac Cullagh

$$\Phi(r, \phi) = -G\frac{M}{r} + G\frac{J_2Ma^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2 \phi - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\Omega^2r^2 \cos^2 \phi. \quad (3)$$

Forma reala a Pamantului, numita geoid, este o suprafata de geopotential constant, adica este data de ecuatia  $\Phi(r, \phi) = \Phi_0 = const$ . Definim turtirea  $f = (a - b)/a$ , unde  $a$  este raza ecuatoriala, iar  $b$  este raza polara. Determinam turtirea in aproximatia de ordinul unu. Pe suprafata geoidala avem  $\Phi(a, \phi = 0) = \Phi_0 = \Phi(b, \phi = \pi/2)$ , adica

$$-G\frac{M}{a} - G\frac{J_2Ma^2}{2a^3} - \frac{1}{2}\Omega^2a^2 = -G\frac{M}{b} + G\frac{J_2Ma^2}{b^3},$$

$$GM\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = GMJ_2\left(\frac{a^2}{2a^3} + \frac{a^2}{b^3}\right) + \frac{1}{2}\Omega^2a^2,$$

$$\frac{a-b}{a} = J_2\left(\frac{b}{2a} + \frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2a^2b}{GM} \text{ sau } f \cong \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2a^3}{GM}.$$

In membrul drept al ultimei relatii am aproximat  $a \approx b$ . Introducand raportul centrifugal

$$n_c = F_{cf}^{(e)} / mg^{(e)} = m\Omega^2a / \left(G\frac{mM}{a^2}\right) = \frac{\Omega^2a^3}{GM}, \text{ obtinem petru turtirea } f \text{ expresia}$$

$$f \cong \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}n_c. \quad (4)$$

**2. Campul geomagnetic principal (in aproximatia dipolara): i) determinarea componentei verticale si orizontale; ii) determinarea modulului inductiei magnetice si a inclinatiei magnetice; iii) determinarea ecuatiei unei linii de camp.**

i) Campul geomagnetic (campul magnetic terestru) are o componenta principala constanta de tip dipolar, in proportie de aproximativ 80%, si o componenta variabila, nedipolara, in proportie de aprox. 20%. Notand cu  $\vec{m}$  momentul magnetic dipolar total al Pamantului, inductia campului magnetic terestru este data de relatia

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}. \quad (1)$$

Introducem un sistem de coordonate sferice, unde  $r$  este distanta pana la centrul Pamantului,  $\theta$  este colatitudinea magnetica si  $\lambda$  longitudinea magnetica. Legatura intre colatitudinea si latitudinea magnetica,  $\varphi$ , este  $\varphi = \pi/2 - \theta$ . Axa polilor magnetici este determinata de orientarea mometului magnetic dipolar al Pamantului  $\vec{m}$  si este diferita de axa de rotatie a acestuia (declinatia magnetica). In consecinta coordonatele magnetice difera de cele geografice. Tinand cont ca

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (r \cos \varphi \cos \lambda)\vec{i} + (r \cos \varphi \sin \lambda)\vec{j} + (r \sin \varphi)\vec{k},$$

versorii sistemului de coordonate sferice sunt

$$\vec{e}_r = \vec{r}/r = (\cos \varphi \cos \lambda)\vec{i} + (\cos \varphi \sin \lambda)\vec{j} + (\sin \varphi)\vec{k},$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = (-\sin \varphi \cos \lambda)\vec{i} + (-\sin \varphi \sin \lambda)\vec{j} + (\cos \varphi)\vec{k}.$$

Aceste relatii ne conduc la  $\vec{e}_r \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi = \vec{k}$  si tinand cont ca am ales sistemul cartezian astfel incat  $\vec{m} = m\vec{k}$ , obtinem ca  $\vec{m} = \vec{e}_r m \sin \varphi + \vec{e}_\varphi m \cos \varphi$  si  $\vec{m} \cdot \vec{r} = mr \sin \varphi$ . Utilizand aceste relatii in (1),  $\vec{B}$  capata forma

$$\vec{B} = \vec{e}_r \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3} \sin \varphi - \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \cos \varphi \equiv \vec{e}_r B_r + \vec{e}_\varphi B_\varphi \quad (2)$$

La ecuatorul magnetic ( $\varphi = 0$ ) si la suprafata Pamantului ( $r = a$ ) inductia campului

geomagnetic este  $\vec{B}_0 = -\vec{e}_\varphi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{a^3} \equiv -\vec{e}_\varphi B_0$ , de unde  $|\vec{B}_0| \equiv B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3}$ . Tinand cont

de aceasta relatie, din (2) obtinem componeta verticala, respectiv orizontala a inductiei campului magnetic (principal) terestru

$$B_r = 2B_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \varphi, \quad B_\varphi = -B_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \varphi. \quad (3)$$

Deoarece  $B_\lambda = 0$ , componenta orizontala este orientata pe directia nord-sud magnetica.

ii) Modulul inductiei campului geomagnetic (principal) se determina utilizand (3) si este

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\varphi^2 + B_\lambda^2} = B_0 \frac{a^3}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}. \quad (4)$$

Inclinatia magnetica  $\alpha$  (unghiul facut de vectorul inductie magnetica cu horizontala) este

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_r}{B_\varphi} = -2 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -2 \operatorname{tg}\varphi. \quad (5)$$

iii) Determinam in continuare ecuatia unei linii de camp. Pentru aceasta folosim relatia generala  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{rd\varphi}$ , care ne conduce la ecuatia

diferentiala  $\frac{dr}{r} = -2 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi$ . Prin integrare directa obtinem solutia generala

$\ln r = \ln(\cos^2 \varphi) + C$ . Constanta de integrare  $C$  se determina din conditia ca la ecuatorul magnetic ( $\varphi = 0$ )  $r = r_e$ . Obtinem  $C = \ln r_e$  si apoi

$$\ln r = \ln(\cos^2 \varphi) + \ln r_e.$$

In final ecuatia liniei de camp geomagnetic (ce trece prin ( $\varphi = 0$ ,  $r = r_e$ )) este

$$r(\varphi) = r_e \cos^2 \varphi. \quad (6)$$

**3. Temperatura potentiala: definitie, expresie matematica, proprietate fundamentala. Sa se determine rata de variatie cu altitudinea a temperaturii maselor de aer uscat in miscarile adiabactice ale acestora pe verticala.**

Temperatura potentiala este temperatura (absoluta)  $\theta$  pe care o ia o portiune (o masa) oarecare de aer atunci cand aceasta este comprimata sau destinsa adiabatic prin urcare sau coborare de la un nivel initial, unde are presiunea  $p$  si temperatura absoluta  $T$ , la nivelul unde presiunea are valoarea standard  $p_0 = 1000 \text{ mb}$ . Utilizand ecuatia Poisson a transformarii adiabactice temperatura potentiala se exprima astfel:

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^k, \quad (1)$$

unde exponentul  $k = \bar{R}/c_p$ .  $\bar{R}$  este constanta aerului,  $\bar{R} = R/\mu$ , cu  $R$  constanta unversala a gazului perfect si  $\mu$  masa molară a aerului atmosferic.  $c_p$  este caldura specifica la presiune constanta a aerului.

Temperatura potentiala ramane constanta in cazul deplasarilor adiabactice (pe verticala) ale maselor de aer uscat (in care este inclus si aerul umed nesaturat). Justificarea directa a acestei proprietati se face direct din definitia lui  $\theta$ . Se logaritmeaza ecuatia (1)

$$\ln \theta = \ln T - k \ln p + k \ln p_0, \quad (2)$$

si apoi diferentiind (2) obtinem (utilizand ecuatia termica de stare,  $p = \rho \bar{R} T$ , si

principiul I al termodinamicii pentru procese adiabactice,  $\delta q = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp = 0$ )

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T} - \frac{\bar{R}}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{c_p dT - \frac{1}{\rho} dp}{T c_p} = 0, \quad (3)$$

Din (3) rezulta ca  $d\theta = 0$  si in consecinta  $\theta(t, x, y, z) = \text{const}$ .

Determinam in continuare rata de variatie cu altitudinea a temperaturii maselor de aer uscat in deplasarile adiabactice pe verticala,  $\Gamma_u = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_\theta$ . Pentru aceasta derivam ecuatia

(2) in raport cu altitudinea  $z$  si obtinem

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\bar{R}}{c_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4)$$

Deoarece procesul este adiabatic  $\partial \theta / \partial z = 0$ . Utilizand ecuatia termica de stare,  $p = \rho \bar{R} T$ , si presupunand ca atmosfera (inconjuratoare) se afla in echilibru

(hidro)static pe verticala,  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ , obtinem din (4) ca  $0 = \frac{1}{T} \Gamma_u + \frac{\bar{R}}{c_p} \frac{1}{\rho \bar{R} T} \rho g$ , si

in final

$$\Gamma_u = -\frac{g}{c_p}. \quad (5)$$

Cu  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  si  $c_p = 1004 \text{ J/KgK}$  obtinem  $\Gamma_u = -10^\circ \text{ C/Km}$ .

**4. Sa se scrie ecuatiile de miscare ale aerului atmosferic intr-un sistem de referinta legat de Pamant (sub forma vectoriala si in proiectie in sistemul de coordonate meteorologic). Sa se scrie ecuatiile de miscare pe orizontala in aproximatia geostrofica si sa se determine viteza vantului geostrof.**

Sub forma vectoriala, ecuatia de miscare a aerului atmosferic este

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{f}_r, \quad (1)$$

unde  $\vec{V}(t, \vec{r})$  este campul vectorial al vitezelor, iar termenii din membrul drept reprezinta densitati masice ale fortelor: de gradient de presiune, de greutate, Coriolis, de viscozitate. Sistemul de coordonate meteorologic (local) se alege cu axa  $Ox$  orizontala spre est, axa  $Oy$  orizontala spre nord si axa  $Oz$  verticala in sus. Componentele vitezei pe aceste axe sunt  $u$ ,  $v$ , respectiv  $w$ . Densitatea de forta Coriolis se scrie pe componente astfel

$$\begin{aligned} -2\vec{\Omega} \times \vec{V} &= -2(\vec{j}\Omega \cos \phi + \vec{k}\Omega \sin \phi) \times (\vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w) = \\ &= -\vec{i}2\Omega(w \cos \phi - v \sin \phi) - \vec{j}2\Omega u \sin \phi + \vec{k}2\Omega u \cos \phi. \end{aligned} \quad (2)$$

$\vec{\Omega}$  reprezintă vectorul viteza unghiulara de rotație a Pamantului în jurul propriei axe, iar  $\phi$  este latitudinea.

Utilizând (2) obținem ecuațiile de mișcare ale aerului în proiecție pe axele introduse,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega(w \cos \phi - v \sin \phi) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \phi. \quad (5)$$

Analiza de scară a termenilor ce apar în aceste ecuații (inclusiv a termenilor de curbura ce apar într-o analiză globală a mișcării) ne permite să realizăm cea mai grosieră aproximație a mișcării pe orizontală, numită *aproximația geostrofică*. În această aproximație ecuațiile de mișcare pe orizontală au forma (s-au păstrat termenii de ordin maxim, adică de ordin  $10^{-3}$ )

$$0 \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi, \quad 0 \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi. \quad (6)$$

Soluția acestor ecuații reprezintă componentele așa numitei viteze geostrofice,

$$u_g = -\frac{1}{2\rho\Omega \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7)$$

Miscarea aerului în acest caz poartă numele de vânt geostrofic. Se constată că această mișcare a aerului se bazează pe realizarea unui echilibru între forța de gradient orizontal de presiune și componenta orizontală a forței Coriolis.

Determinăm în continuare viteza vântului geostrofic:

$$\vec{V}_g = \vec{i}u_g + \vec{j}v_g = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \phi} \left( (\vec{k} \times \vec{j}) \frac{\partial p}{\partial y} + (\vec{k} \times \vec{i}) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{f} \vec{k} \times \left( \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} \right),$$

unde  $f \equiv 2\rho\Omega \sin \phi$ . Obținem în final

$$\vec{V}_g = \frac{1}{2\rho\Omega \sin \phi} \vec{k} \times \nabla_H p. \quad (8)$$

Remarcăm faptul că vântul geostrofic are direcția perpendiculară pe gradientul orizontal de presiune, deci are o direcție tangenta la suprafețele (curbele) izobare.

Disciplina D9: FACTORI DE RISC, DEPOLUARE SI REFACEREA MEDIULUI

### 1. Definiți pe scurt noțiunea de "risc" și conceptul "evaluarea riscurilor".

**Riscul** reprezintă o caracteristică zilnică a vieții și poate fi privit ca o proprietate inerentă a existenței umane. Prin urmare, riscul, în general, este un factor cheie în luarea deciziilor. Din punct de vedere științific, "riscul" poate fi definit în termeni cantitativi prin aplicarea unor măsuri probabilistice. În cazul în care noțiunea de "pericol" este definită ca potențialul de consecințe negative al unor evenimente, se poate defini noțiunea de "risc" ca probabilitatea de apariție a unui anumit pericol. Acesta combină două aspecte: pe de o parte probabilitatea de apariție a evenimentului iar pe de altă parte totalitatea consecințelor evenimentului.

**Evaluarea riscurilor** sau **analiza riscurilor** înseamnă lucruri diferite pentru persoane diferite: analiștii financiari evaluează riscurile financiare, societățile de asigurări calculează riscurile actuariale, în timp ce diferitele agenții de reglementare estimează, de exemplu, riscurile de decese din accidente nucleare, incidența diferitelor forme de cancer datorată emisiilor industriale, etc.

Putem distinge două direcții, atunci când clasificăm riscurile:

**I. Riscurile asupra sănătății.** Pentru aceste riscuri, accentul se pune asupra sănătății umane. Riscurile asupra sănătății implică de obicei perioade lungi de latență și efecte întârziate ceea ce face relația cauză-efect foarte dificil de stabilit. Acestea au o probabilitate mare de apariție (luându-se în calcul perioade mari de timp), și pot conduce la efecte cronice. În această categorie sunt incluse frecvent și riscurile microbiene, ce au efecte acute pe termen scurt, deși consecințele unei infecții microbiene pot persista pe tot parcursul vieții unui individ.

**II. Riscurile ecologice.** În cazul acestor riscuri, accentul se pune pe multitudinea interacțiunilor dintre populații și comunități, pe de o parte, și ecosisteme (inclusiv lanțurile de produse alimentare), pe de altă parte. Interacțiunile sunt evaluate atât la nivel micro cât și la nivel macro. Riscurile ecologice implică de obicei, atât catastrofele pe termen scurt, cum ar fi scurgerile (relativ reduse) de petrol sau ulei, cât și catastrofele pe termen lung, cum ar fi expunerile la substanțe periculoase (de exemplu deșeurile radioactive).

**Procesul de evaluare a riscurilor** constă în patru pași de bază:

1. **Identificarea pericolului.** Se definește pericolozitatea și natura pericolului, în vederea documentării asupra efectelor sale nocive/toxice asupra oamenilor.
2. **Evaluarea expunerii.** Se determină concentrația unui agent contaminant în mediu și se estimează rata de admisie în organismele țintă.
3. **Evaluarea dozei de agent.** Pe baza gradului de expunere se cuantifică efectele adverse generate de influența/expunerea la un agent periculos. Această evaluare se exprimă matematic, evidențiindu-se răspunsul organismelor vii la modificarea dozelor de agent.
4. **Caracterizarea riscurilor.** Estimarea impactului potențial al unui risc pe baza gravității efectelor sale și valorii de expunere. După ce riscurile sunt caracterizate se pot aplica diferite opțiuni de reglementare, sunt evaluate aceste opțiuni într-un proces de **gestionare a riscurilor** care presupune luarea în considerare a aspectelor economice și sociale, a tuturor problemelor inerente în cadrul unei soluții propuse. Alt element important de gestionare a riscurilor este **comunicarea riscurilor** - procesul interactiv de informații și schimbul de

opinii între indivizi, grupuri și instituții. Comunicarea riscurilor include transferul de informații de risc de la expert la publicul nonexpert, etc.

## 2. Factorii de risc și poluarea radioactivă

Radioactivitatea nu presupune doar existența centralelor nucleare sau reacțiile nucleare. Emisiile radioactive provin din mai multe activități: pot proveni de la spitale, din industria minieră, din scurgerile din anumite roci naturale și chiar din deșeurile noastre menajere. În afară de aceste pericole potențiale, radioactivitatea are multe utilizări în monitorizarea și înțelegerea mediului înconjurător.

**Poluarea radioactivă** reprezintă o formă specială de poluare datorită emisiei în spațiu a unor radiații capabile să producă efecte fizice, chimice și biologice asupra organismelor vii. Suntem înconjurați de un fond global de radiații, datorat surselor de iradiere naturală (cum ar fi Soarele sau unii munți) care este suportat de toate organismele vii. Radiațiile sunt privite ca emisii spontane și permanente produse în cursul reacțiilor de dezintegrare nucleară.

Printre alte surse pentru producerea de energie, specia umană utilizează și centrale nucleare. Necesarul de energie fiind în continuă creștere va fi nevoie să se imagineze și să se pună în practică noi mijloace de protecție împotriva radiațiilor precum și modalități de reducere sau limitare a poluării mediului cu substanțe radioactive.

Pe lângă radiația naturală, evoluția societății umane a condus la apariția altor surse de radiații, omul a fost expus suplimentar și ocazional la radiații, uneori extrem de puternice și/sau intense. Astfel, în cazul unor investigații medicale (de exemplu la radiografii, tratamente radiologice, etc) expunerea în aceste situații poate fi mult mai puternică decât în cazul radiațiilor naturale. Aceasta poate conduce la efecte pe termen scurt sau lung, acumularea de radiații conducând la boli specifice, la apariția diferitelor forme de cancer, etc.

Prin natura sa, radiația ionizantă are suficientă energie pentru a ioniza atomii oricărei substanțe întâlnite. Dacă radiația patrunde în organism, aceasta poate provoca leziuni în celule sau ale ADN-ului, ceea ce poate cauza cancer. În doze mari, radiația de ionizare, conduce la deteriorarea masivă a celulelor ajungându-se la boli specifice și uneori chiar la moarte în câteva zile sau săptămâni.

**Riscurile asupra sănătății - provenite din radiații.** Putem sistematiza toate aceste riscuri, care deși aparent sunt mici, nu sunt însă neglijabile, și depind de un număr de factori cum ar fi:

- marimea dozei de radiații absorbite
- tipul radiației de ionizare
- puterea de penetrare a radiației și viteza de expunere
- sensibilitatea relativă a celulelor sau organelor ce recepționează radiația
- posibilitatea evaluării pragului sub care nu se poate discerne efectul radiației

## Sursele de radiații se pot împarti în două mari categorii:

**I. Surse controlate:** acceleratorii de particule în care sunt incluși acceleratorii pentru cercetare, generatoare de raze X din aparatele și instalațiile de uz comun; reacțiile nucleare; radioizotopii utilizați în laborator;

**II. Surse necontrolate:** deșeurile radioactive (din activitatea de cercetare și economică); accidentele nucleare, etc.

Efectele poluării cu radiații se fac resimțite în tot mediul: în atmosferă, în apă, în sol, pe sol, influențând organismele vii, uneori întregul lanț trofic. Efectele acestei poluării radioactive sunt:

- **directe** (ca urmare a interacțiunii radiațiilor cu suportul biologic, modificându-se compoziția și structura materiei, însoțită de mutații genetice ce se manifestă atât la indivizii iradiați cât și la urmașii acestora)
- **indirecte** (când nu este afectată structura biologică, dar este afectat mediul în care aceasta este plasată).

**Comisia Națională pentru Controlul Activităților Nucleare (CNCAN)** reprezintă autoritatea națională în domeniul reglementării, autorizării și al controlului activităților nucleare din România. CNCAN deține un rol important în asigurarea respectării cu strictețe a cerințelor de securitate nucleară și de radioprotecție în România. CNCAN urmărește îndeplinirea prevederilor legislației în vigoare privind desfășurarea în siguranță a activităților nucleare. CNCAN asigură expertiza tehnică și de specialitate, în relațiile României cu organismele și organizațiile internaționale (AIEA, CE, WENRA, OECD/NEA etc.). De asemenea, CNCAN asigură cooperarea cu autoritățile similare din alte țări, în sfera sectorului nuclear.

## 3. În cazul undelor scurte ce se propagă la suprafața apei adânci, cunoscându-se relația

dintre frecvență ( $\nu$ ) și lungimea de undă ( $\lambda$ ):  $\nu = \left( \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda^3} \right)^{1/2}$  să se obțină:

- **frecvența unghiulară ( $\omega$ ) ca funcție de vectorul de undă ( $k$ )**
- **viteza de fază, viteza de grup și raportul dintre aceste două viteze (interpretare fizică).**

Frecvența unghiulară este definită:  $\omega = 2\pi\nu$  iar vectorul de undă  $k = 2\pi/\lambda$ . Rezultă:

$$\omega = \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{3/2}$$

Introducând vectorul de undă în expresia anterioară obținem relația de dispersie:

$$\omega = \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} k^{3/2}$$

Viteza de grup este  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} k^{1/2}$  iar viteza de fază

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} k^{1/2} .$$

Raportul dintre viteza de grup și viteza de fază este în această situație  $\frac{v_g}{v_f} = \frac{3}{2}$ .

Se observă că viteza de grup este mai mare decât viteza de fază, unde scurte propagându-se mai repede (situația dispersiei anormale).

**4. Să se calculeze: a) căldura pierdută pe unitatea de timp printr-un geam cu suprafața de 2.2 m<sup>2</sup> și b) rezistența la căldură a ferestrei. Se cunosc: grosimea geamului din sticlă d = 6 mm, conductivitatea termică k = 1,1 W · m<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>, temperatura camerei + 20° C, iar temperatura în exterior - 10° C. Enumerați câteva soluții posibile în vederea reducerii pierderilor de căldură prin fereastră.**

Aplicăm legea lui Fourier, în forma integrală, în cazul unidimensional (geometrie 1-D):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

pentru temperaturile T<sub>i</sub> și T<sub>e</sub> (interior și exterior), pentru a calcula căldura pierdută pe unitatea de timp (notată cu  $q' = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ):

$$q' = -kA \frac{T_e - T_i}{d}$$

unde am notat: k – conductivitatea termică; d – grosimea sticlei; A – aria ferestrei.

Calculăm:

$$q' = \left( -1,1 \frac{W}{m \cdot K} \right) (2,6 m^2) \left( \frac{-30 K}{6 \cdot 10^{-3} m} \right) = 12,1 \cdot 10^3 W$$

Rezistența la căldură (R) a ferestrei se calculează folosind relația:

$$R = \frac{\Delta T}{q'}$$

Asadar, vom obține:

$$R = \frac{30 K}{12,1 \cdot 10^3 W} = 2,48 \cdot 10^{-3} \frac{K}{W}$$

**Pierderile de căldură** pot fi minimizate prin utilizarea unui geam dublu în locul celui simplu deoarece aerul prins între două straturi de sticlă acționează ca un izolator. Altă metodă de reducere a pierderilor constă în folosirea unui obturator sau orice altă suprafață de izolare plasate în partea din față a sticlei și/sau o perdea sau draperie pe interior. Altă metodă de reducere a pierderilor este depunerea de filme subțiri pe geam în vederea împiedicării pierderii radiației infraroșii dar permiterea pătrunderii luminii. De asemenea, în etapa de proiectare a clădirii, zona ferestrei poate fi minimizată, efectuându-se calcule energetice.