

## Examenul de licență,

### Domeniul de licență FIZICĂ – promoția 2013

Valabil pentru sesiunile de licență iulie 2013 și septembrie 2013

(durata studiilor 3 ani)

Examenul de licență constă în 2 (două) probe:

- proba scrisă de cunoștințe generale de fizică
- prezentarea lucrării de licență

Proba scrisă va conține câte o întrebare de la fiecare din disciplinele menționate (toate disciplinele sunt obligatorii), fiecărui răspuns alocându-i-se câte un punct, un punct va fi acordat din oficiu.

Disciplinele sunt:

1. Mecanică clasică
2. Fizică moleculară și căldură
3. Electricitate și magnetism
4. Optică și Fizica atomului și moleculei
5. Mecanică teoretică
6. Electrodinamică
7. Termodinamică și Fizică Statistică
8. Mecanică cuantică și Introducere în teoria câmpului
9. Fizica solidului și semiconductori.

## PROPUNERI DE SUBIECTE PENTRU EXAMENUL DE LICENȚĂ

### Disciplina D1: MECANICĂ CLASICĂ

**1. Teorema variației momentului cinetic pentru un punct material (forma diferențială, forma finită): enunț, demonstrație. Legea conservării momentului cinetic pentru un punct material: deducere.**

Fie  $S$  un sistem de referință și  $P'$  un punct fix (numit pol) față de acest sistem de referință. Definim *momentul cinetic*  $\vec{M}'$  al punctului material față de polul  $P'$  ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție  $\vec{r}'$  al acestuia față de polul considerat și impulsul  $\vec{p} = m\vec{v}$  al punctului material față de sistemul de referință considerat,

$$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{p}.$$

Alegând  $P'$  în  $O$  (originea sistemului de referință considerat), relația anterioară devine

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Definim *momentul forței*  $\vec{K}$  față de polul  $O$  prin relația

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{F},$$

unde  $\vec{F}$  este forța care acționează asupra punctului material.

Derivând în raport cu timpul relația de definiție a momentului cinetic obținem

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Folosind definiția vectorului viteză

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

și principiul fundamental al dinamicii

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t\right),$$

ajungem la forma diferențială a teoremei de variație a momentului cinetic pentru un punct material:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}.$$

*Enunț: Variația în unitatea de timp a momentului cinetic al unui punct material față de un pol este egală cu momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra acestuia în raport cu același pol.*

Integrând ultima relație pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  obținem forma finită a teoremei de variație a momentului cinetic pentru un punct material

$$\Delta\vec{M} = \vec{M}(t_2) - \vec{M}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)) dt.$$

*Enunț: Variația momentului cinetic al unui punct material pe un interval temporal este egală cu integrala temporală a momentului rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material pe acel interval temporal.*

Pentru a obține *legea conservării momentului cinetic*, considerăm cazul când momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material este nul la orice moment de timp, adică

$$\vec{K} = 0.$$

Atunci, din forma diferențială a teoremei variației momentului cinetic rezultă că

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \forall t.$$

Obținem astfel

$$\vec{M}(t) = \text{const} = \vec{M}(t_0), \forall t.$$

Ultima relație reprezintă legea conservării momentului cinetic pentru un punct material.

*Enunț:* Dacă momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material este nul la orice moment de timp atunci momentul cinetic al punctului material este mărime vectorială conservativă.

Momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material se anulează în două cazuri independente: a)  $\vec{F} = 0$ ; b)  $\vec{r} \parallel \vec{F}$ .

În cazul a) are loc și conservarea impulsului (atunci când impulsul se conservă, se conservă automat și momentul cinetic). În cazul b) impulsul nu se mai conservă dar momentul cinetic se conservă.

În cazul b) impulsul nu se mai conservă dar momentul cinetic se conservă.

**2. Teorema variației energiei cinetice pentru un punct material (forma diferențială, forma finită): enunț, demonstrație. Legea conservării energiei cinetice pentru un punct material: deducere**

Pornim de la definiția lucrului mecanic elementar (infinitesimal) corespunzător variației diferențiale a poziției punctului material

$$dL = \vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) \cdot d\vec{r}.$$

Principiul fundamental  $\vec{F} = m\vec{a}$  și definiția vectorului accelerație  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  ne conduc la

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} dt.$$

Ținând cont de faptul că

$$\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right)$$

și că energia cinetică  $T$  a punctului material de masă  $m$  și viteză  $\vec{v}$  se definește față de un sistem de referință ca

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2},$$

obținem forma diferențială a teoremei de variație a energiei cinetice

$$d \left( \frac{m\vec{v}^2}{2} \right) = dL.$$

*Enunț:* Diferențiala energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei forțelor ce acționează asupra acestuia.

Pentru obținerea formei finite a acestei teoreme integrăm ultima relație pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$ :

$$\Delta T = \frac{m\vec{v}_2^2}{2} - \frac{m\vec{v}_1^2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) \cdot \vec{v} dt.$$

*Enunț:* Variația energiei cinetice a unui punct material pe un interval temporal este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forțelor care acționează asupra punctului material pe acel interval temporal.

Considerăm cazul când lucrul mecanic elementar este nul la orice moment de timp. Rezultă

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\vec{v}^2(t) \right) dt = 0,$$

ceea ce conduce la expresia matematică a legii conservării energiei cinetice a punctului material:

$$\frac{1}{2} m\vec{v}^2(t) = \text{const} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2(t_0).$$

*Enunț:* Dacă lucrul mecanic elementar este nul la orice moment de timp, atunci energia cinetică a punctului material este mărime scalară conservativă.

Condițiile în care are loc conservarea energiei cinetice:

a)  $\vec{F} = 0$ , caz care corespunde punctului material liber (dacă se conservă impulsul atunci energia cinetică se conservă);

b)  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , corespunde unei forțe de tipul  $\vec{F} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right) = \vec{v} \times \vec{N} \left( \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right)$ .

**3. Proprietăți generale ale forțelor interne: enunț, demonstrație. Teorema variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale: enunț, demonstrație. Legea conservării impulsului pentru un sistem de puncte materiale: deducere.**

Notăm cu  $\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)}$  forța internă cu care punctul material  $a$  acționează asupra punctului material  $b$ . Conform principiului al treilea al dinamicii, avem că

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)} = 0 \\ \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} \parallel \vec{r}^{(ab)}, \vec{r}^{(ab)} = \vec{r}^{(b)} - \vec{r}^{(a)} \end{cases}$$

Notăm cu

$$\vec{F}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{a=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)},$$

rezultanta forțelor interne ce acționează asupra particulei  $b$  și cu

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{F}^{(ab)},$$

rezultanta tuturor forțelor interne care acționează asupra sistemului.

*Proprietatea 1: Rezultanta tuturor forțelor interne care acționează asupra sistemului de puncte materiale este nulă.*

$$\vec{F}_{\text{int}} = 0.$$

Demonstrație:

Pornind de la relația

$$\sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)},$$

ajungem la

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n (\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)}) = 0.$$

*Proprietatea 2: Momentul rezultat al forțelor interne este nul.*

$$\vec{K}_{\text{int}} = 0.$$

Demonstrație:

Notăm prin

$$\vec{K}_{\text{int}}^{(b)} = \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(b)},$$

momentul forței ce acționează asupra particulei  $b$  și cu

$$\vec{K}_{\text{int}} = \sum_{b=1}^n \vec{K}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(b)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)},$$

momentul rezultat al forțelor interne ce acționează asupra sistemului de puncte materiale.

Pornind de la relația

$$\sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(a)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)},$$

găsim că

$$\vec{K}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(b)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(a)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ba)}.$$

Conform principiului al treilea al dinamicii avem

$$\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = -\vec{F}_{\text{int}}^{(ba)}.$$

Atunci deducem că

$$\vec{K}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n (\vec{r}^{(b)} - \vec{r}^{(a)}) \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \vec{r}^{(ab)} \times \vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} = 0,$$

deoarece  $\vec{F}_{\text{int}}^{(ab)} \parallel \vec{r}^{(ab)}$ .

*Teorema variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale*

Notăm cu

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^n \vec{p}^{(a)} = \sum_{a=1}^n m_a \vec{v}^{(a)}$$

*impulsul total al sistemului de puncte materiale.*

Punctul de start îl constituie principiul fundamental al dinamicii pentru particula  $a$

$$\frac{d\vec{p}^{(a)}}{dt} = \vec{F}^{(a)},$$

unde  $\vec{F}^{(a)} = \vec{F}_{\text{int}}^{(a)} + \vec{F}_{\text{ext}}^{(a)}$ .

Sumând după  $a$  în principiul fundamental, ajungem la

$$\sum_{a=1}^n \frac{d\vec{p}^{(a)}}{dt} = \sum_{a=1}^n \vec{F}^{(a)} = \sum_{a=1}^n (\vec{F}_{\text{int}}^{(a)}) + \sum_{a=1}^n (\vec{F}_{\text{ext}}^{(a)}) = \sum_{a=1}^n (\vec{F}_{\text{ext}}^{(a)}).$$

Ținând cont că

$$\sum_{a=1}^n \frac{d\vec{p}^{(a)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{a=1}^n \vec{p}^{(a)} \right) = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

obținem forma diferențială a teoremei de variație a impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

*Enunț: Variația în unitatea de timp a impulsului total al sistemului de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului.*

Integrând pe intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  în ultima relație, obținem forma finită a teoremei de variație a impulsului pentru sistemul de puncte materiale:

$$\vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{ext}} dt.$$

*Enunț: Variația impulsului total al sistemului de puncte materiale pe un interval temporal este egală cu integrala temporală a rezultantei forțelor externe care acționează asupra sistemului pe acel interval.*

Considerăm cazul când rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului este nulă la orice moment de timp

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{a=1}^n \vec{F}_{ext}^{(a)} = 0.$$

Atunci

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0.$$

Ultima relație ne conduce la legea conservării impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

$$\vec{P}(t) = \text{const} = \vec{P}(t_0).$$

*Enunț:* Dacă rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului este nulă la orice moment de timp atunci impulsul total al sistemului de puncte materiale este mărime vectorială conservativă.

#### 4. Proprietăți generale ale mișcării în câmp central: enunț, demonstrație.

Câmpul central este un câmp de forțe pentru care energia potențială depinde numai de distanța de la punctul material la un punct fix numit centrul câmpului.

Pentru simplitate, considerăm punctul fix în originea sistemului de referință, astfel încât

$$U = U(|\vec{r}|).$$

Am notat prin  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  modulul vectorului  $\vec{r}$  iar  $x_1, x_2$  și  $x_3$  reprezintă coordonatele carteziene ale punctului material în sistemul de referință considerat.

*Proprietatea 1:*

Forța care acționează asupra unui punct material care evoluează în câmp central are forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

*Demonstrație:*

Câmpul central fiind un câmp potențial, avem că

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r).$$

Calculând separat

$$\nabla U(r) = \vec{e}_1 \frac{\partial U(r)}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial U(r)}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial U(r)}{\partial x_3} = \vec{e}_1 \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_3}$$

, respectiv

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}, \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}, \frac{\partial r}{\partial x_3} = \frac{x_3}{r},$$

obținem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Din ultima relație identificăm

$$f(r) = -\frac{dU}{dr}.$$

*Proprietatea 2:*

Energia totală a punctului material în câmp central este mărime scalară conservativă.

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + U(r) = \text{const}.$$

*Demonstrație:*

Câmpul central este un câmp potențial. Neavând forțe nepotențiale care să acționeze asupra punctului material, rezultă că lucrul mecanic al forțelor nepotențiale este nul și deci energia totală se conservă.

*Proprietatea 3:*

Momentul cinetic al unui punct material care evoluează în câmp central este mărime vectorială conservativă.

$$\vec{M}(t) = \text{const} = \vec{M}(t_0).$$

*Demonstrație:*

Înlocuind în teorema de variație a momentului cinetic expresia forței care acționează asupra punctului material aflat în câmp central și ținând cont de faptul că  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ , obținem:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M}(t) = \vec{M}(t_0).$$

*Proprietatea 4:*

Mișcarea în câmp central este o mișcare plană, planul mișcării conținând centrul câmpului (originea sistemului de referință).

*Demonstrație:*

Înmulțind scalar relația matematică a legii conservării momentului cinetic în câmp central cu vectorul de poziție  $\vec{r}(t)$  obținem

$$\vec{M}(t) \cdot \vec{r}(t) = \vec{M}(t_0) \cdot \vec{r}(t).$$

Ținând cont că

$$\vec{M}(t) \cdot \vec{r}(t) = (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)) \cdot \vec{r}(t) = 0,$$

rezultă

$$\vec{M}(t_0) \cdot \vec{r}(t_0) = 0.$$

Descompunând vectorii după baza ortonormată  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  asociată sistemului de referință considerat, obținem că ultima ecuație este ecuația unui plan a cărui normală are direcția lui  $\vec{M}(t_0)$

$$M_{0_1}x_1(t) + M_{0_2}x_2(t) + M_{0_3}x_3(t) = 0.$$

Mai mult, originea sistemului de referință  $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0$  verifică ecuația planului.

*Proprietatea 5:*

*Viteza areolară a punctului material aflat în câmp central este mărime conservativă.*

*Demonstrație:*

Punctul de start îl constituie definiția momentului cinetic

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t),$$

în care înlocuim vectorul viteză

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Obținem modulul momentului cinetic

$$|\vec{M}(t)| = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\vec{r} \times \Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2\Delta A}{\Delta t} = 2m \frac{dA}{dt} = 2m \mathbf{A}(t) = \text{const},$$

unde  $\Delta A$  reprezintă aria măturată de vectorul de poziție al punctului material în intervalul de timp  $\Delta t$  iar

$$\mathbf{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$

este viteza areolară a punctului material la momentul  $t$ . Astfel, găsim că

$$A(t) = \frac{\text{const}}{2m} = \text{const}. \text{ Din relațiile de mai sus rezultă}$$

$$dA = \frac{\text{const}}{2m} dt.$$

Integrând relația anterioară pe două intervale de timp egale  $[t_1, t_2]$  și  $[t_3, t_4]$ , obținem că vectorii de poziție "mătură" arii egale în intervale de timp egale:

$$A_{[t_1, t_2]} = A_{[t_3, t_4]}.$$

## Disciplina D2: FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ

**1. Să se definească procesul politrop, sa se scrie ecuatia sa pentru un gaz perfect, sa se scrie expresia indicelui politropic si sa se identifice pentru  $n=0, n=1, n=\gamma$  si  $n=\pm\infty$  tipul procesului particular si valoarea capacitatii calorice a sistemului termodinamic in procesul particular.**

Se numesc procese politrope, acele procese termodinamice in care schimbul elementar de caldura  $\delta Q = CdT$ , in care capacitatea calorica C a sistemului in proces are valoare constanta. Ecuatia procesului politrop pentru un gaz perfect:  $pV^n = \text{constant}$

$$\text{Indicele politropic: } n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$$

Cazuri particulare

$n=0$	$p=\text{const}$ (proces izobar)	$C=C_p$
$n=1$	$T=\text{const}$ (proces izoterm)	$C=\pm\infty$
$n=\gamma$	$S=\text{const}$ (proces adiabatic sau izentrop)	$C=0$
$n=\pm\infty$	$V=\text{const}$ (proces izocor)	$C=C_v$

**2. Scrieti ecuatia diferentiala Clausius-Clapeyron a tranzitiilor de faza de speta I, in functie de saltul entropiei si in functie de caldura molară de tranzitie. Discutati variatia relativă a presiunii si temperaturii de tranzitie la caldură molară de tranzitie pozitivă, la cresterea si micșorarea volumului molar.**

Ecuatia Clausius-Clapeyron este:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\bar{S}_2 - \bar{S}_1}{\bar{V}_2 - \bar{V}_1} \text{ unde } p - \text{presiunea}$$

T- temperatura

$\bar{S}_2 \neq \bar{S}_1$  - entropiile molare ale celor doua faze

$\bar{V}_2 \neq \bar{V}_1$  - volumele molare ale celor doua faze

Caldura molară de tranzitie este:

$$\bar{\lambda} = T(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)$$

$$\text{Astfel } \frac{dp}{dT} = \frac{\bar{\lambda}}{T(\bar{V}_2 - \bar{V}_1)}$$

Pentru  $\bar{\lambda} > 0$  (tranzitie cu absorbtie de caldura)

- cand  $\bar{V}_2 > \bar{V}_1$ ,  $\frac{dp}{dT} > 0$  - temperatura de tranzitie creste la cresterea presiunii (de exemplu evaporarea unui lichid)
- cand  $\bar{V}_2 < \bar{V}_1$ ,  $\frac{dp}{dT} < 0$  - temperature de tranzitie scade la cresterea presiunii (de exemplu topirea ghetii)

3. Sa se scrie ecuatia Van der Waals pentru un kmol de gaz real si ecuatia de stare pentru un kmol de gaz perfect, specificand corectiile aduse ecuatiei de stare a gazului perfect, in cazul gazului real.

$$\text{Ecuatia Van der Waals: } \left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

Ecuatia de stare a gazului perfect:  $pV=RT$

$b$  - corectia de volum (covolumul), care este de patru ori volumul propriu al moleculelor dintr-un kmol

$$p_i = \frac{a}{V^2} - \text{corectia de presiune (presiunea interna), care se datoreste fortelor de}$$

atractie intre molecule gazului si care se scade din presiunea pe care ar exercita-o gazul in absenta acestor forte.

4. Ce reprezinta formula barometrica, care este expresia sa si care sunt semnificatiile marimilor care intervin in aceasta formula?

Formula barometrica arata ca presiunea in fluidele compresibile aflate in campul gravitacional si pot fi considerate gaze perfecte, scade exponential cu inaltimea.

$$p = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g Z}{p_0}} \text{ sau } p = p_0 e^{\frac{-\mu g Z}{RT}}$$

Inaltimea  $Z=0$  corespunde nivelului marii la care presiunea este  $p_0$ , iar densitatea aerului (gaz perfect), este  $\rho_0$ ,  $g$  este acceleratia gravitacionala,  $\mu$  este masa molară a gazului perfect (aer),  $R$  este constanta universală a gazului perfect, iar  $T$  este temperatura absolută.

## Disciplina D3: ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM

### 1: Potențialul electric si intensitatea campului electric creat de un dipol electric

Se considera un dipol electric format din 2 sarcini electrice punctiforme egale și de semne contrare ( $-q$  și  $+q$ ) plasate în vid, astfel încât vectorul de poziție al sarcinii

pozitive în raport cu cea negativă este  $\vec{d}$  (vezi Fig.1). Momentul electric dipolar este  $\vec{p} = q\vec{d}$ .

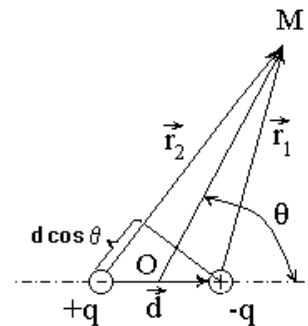


Fig. 1

1) Aplicând principiul superpoziției găsim potențialul electric al câmpului rezultat creat de sistemul celor două sarcini:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Pentru cazul  $d \ll r$ , sunt valabile următoarele aproximații (vezi figura):

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta ; \quad r_1 r_2 = r^2$$

care conduc la expresia

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

care se mai poate scrie și astfel :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

2) Intensitatea câmpului electrostatic  $\vec{E}$  se va calcula cu formula :

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

Folosind relațiile (ușor de verificat):

$$\nabla\left(\frac{I}{r^3}\right) = -3r^{-4} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) = p_x \vec{i}_x + p_y \vec{i}_y + p_z \vec{i}_z = \vec{p}$$

obținem în final:

$$\vec{E} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \left[ 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

## 2. Montajul Pogendorf

Având la dispoziție o punte cu fir de lungime  $\ell$  și trei elemente galvanice de tensiuni electromotoare  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  și  $\epsilon_3$  (necunoscuta), două rezistențe  $R_1$  și  $R_2$  și un galvanometru, Pogendorf a realizat un montaj de tipul celui prezentat în Fig. 2, în ramurile cu surse plasându-se inițial primele 2 elemente galvanice  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ .

Se aplică prima lege a lui Kirchhoff în nodul A:

$$I_1 - I^0 - I_2 = 0 \quad (1)$$

Se adaugă la această primă relație între curenți alte două ecuații care rezultă din aplicarea celei de-a doua legi a lui Kirchhoff ochiurilor de rețea ABR<sub>1</sub>A și ABR<sub>2</sub>A:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= I_1(R_1 + R_2^0) + I^0 R_1^0 \\ \epsilon_2 &= I^0 R_1^0 - I_2 R_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Pentru o anumită poziție a cursorului C se va înregistra pe ramura cu galvanometru un curent nul ( $I_2 = 0$ ). Din prima lege a lui Kirchhoff rezultă:

$$I_1 = I^0$$

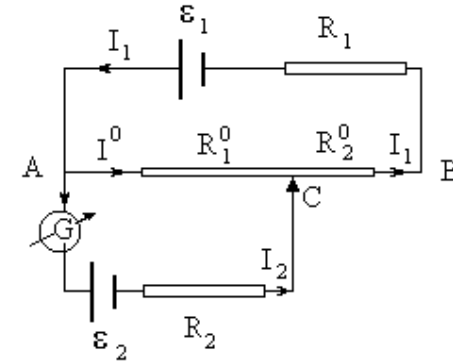


Fig.2.

Sistemul de ecuații (2) devine:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= I_1(R_1 + R_2^0 + R_1^0) \\ \epsilon_2 &= I_1 R_1^0 \end{aligned}$$

Obținem:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{(R_1 + R_2^0 + R_1^0)}{R_1^0}$$

Rezistența necunoscută  $R_1$  se poate elimina dacă se înlocuiește  $\epsilon_2$  cu  $\epsilon_3$  și se modifică din nou poziția cursorului C, care va delimita pe rezistența  $R^0$  alte două rezistențe, notate cu  $R_1'$  și  $R_2'$ , încât galvanometru să indice din nou zero.

Obținem:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{(R_1 + R_1' + R_2')}{R_1'}$$

Deoarece

$$R_1' + R_2' = R_1^0 + R_2^0 = R^0$$

rezultă:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{R_1^0}{R_1'} = \frac{\ell_1}{\ell_1'}$$

$\ell_1$  și  $\ell_1'$  fiind lungimile porțiunilor de fir din partea dreaptă a cursorului, corespunzătoare unui curent nul prin galvanometru, la introducerea pe rând în montaj a celor 2 elemente galvanice de tensiuni electromotoare,  $\varepsilon_2$  respectiv,  $\varepsilon_3$ .

### 3. Teorema lui Ampere aplicată unei bobine toroidale

Se consideră o bobină toroidală constituită din N spire parcurse de curentul constant I, înfășurate uniform pe un miez de forma unui tor cu axa de revoluție Oz. Se va calcula inducția magnetică pentru următoarele puncte:

a) din interiorul torului; b) din exteriorul torului.

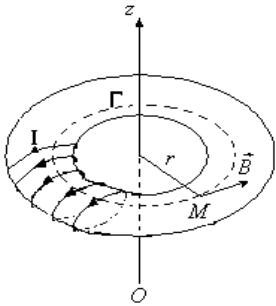


Fig. 3

Remarcăm că orice plan ce conține axa Oz este un plan de simetrie pentru distribuția de curenți.

Așadar în punctul M, vectorul  $\vec{B}$  este perpendicular pe planul care conține axa Oz și trece prin punctul M (vezi Fig.3).

Liniile de câmp sunt prin urmare cercuri cu centrul pe axa Oz. În plus, datorită simetriei de revoluție, modulul lui  $\vec{B}$  este constant în orice punct situat pe o anumită linie de câmp.

Teorema lui Ampère aplicată unui astfel de contur, de rază r, conduce la următoarele rezultate :

a) pentru cercuri interioare torului, avem:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 NI$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

rezultat care este independent de forma secțiunii torului ;

b) pentru puncte din exteriorul torului obținem valoarea zero pentru inducția magnetică, deoarece suma totală a curenților ce străbat suprafața mărginită de contur este zero (numărul curenților care intră este identic cu cel al curenților care ies și egal cu numărul de spire, N) :

### 4. Puntea Maxwell (aplicatie la curent alternativ)

Un aranjament experimental de tipul celui din Fig.7.5 constituie puntea lui Maxwell: ramurile 1 și 3 conțin rezistențe pure, ramura 2 conține un condensator de capacitate C, șuntat de o rezistență  $R_2$ , iar ramura 4 conține o bobină care posedă o rezistență  $R_4$  și o inductanță L. Să se arate că echilibrul punții se obține independent de valoarea frecvenței curentului de alimentare.

Condiția de echilibru pentru punte se scrie:

$$\frac{R_1}{Z_4} = \frac{Z_2}{R_3} \quad \text{sau} \quad Z_4 = R_1 R_3 \frac{1}{Z_2}$$

unde

$$Z_4 = R_4 + j\omega L ; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} - \frac{C\omega}{j}$$

Rezultă:

$$R_4 + j\omega L = \frac{R_1 R_3}{R_2} + jC\omega R_1 R_3$$



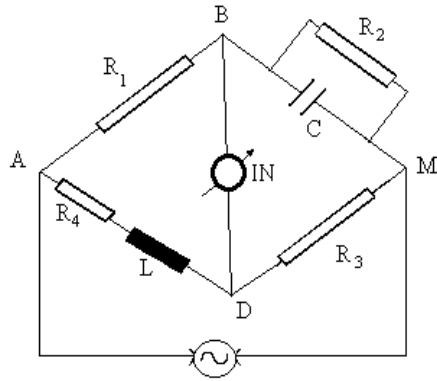


Fig. 4 - Puntea Maxwell

Se egalează părțile reale între ele și părțile imaginare între ele, obținându-se:

$$\begin{cases} R_4 R_2 = R_1 R_3 \\ L = C R_1 R_3 \end{cases}$$

Se observă că în ultima relație nu apare frecvența curentului; relația permite determinarea, la echilibrul punții, a inductanței necunoscute L dacă se cunosc capacitatea de pe ramura 2 și rezistențele  $R_1$  și  $R_3$ .

## Disciplina D4: OPTICĂ ȘI FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI

### -OPTICĂ

A.

Fie dispozitivul interferențial "Oglinzile lui Fresnel".

1. Desenati și explicați modul în care se obține interferența în acest dispozitiv și dispoziția zonei de interferență.
2. Care este valoarea distanței dintre sursele virtuale  $S_1$  și  $S_2$  (imagini virtuale în oglinzile plane  $O_1$  și  $O_2$ ) ale sursei reale  $S$ , dacă unghiul dintre cele două oglinzi plane este de  $5^\circ$  și distanța de la sursa  $S$  la muchia comună a celor două oglinzi este de  $1\text{m}$ .
3. Care este valoarea interfranței, obținută în acest caz pe ecranul de observare a franjelor de interferență. Distanța de la muchia comună a oglinzilor la ecranul pe care se obține interferența este de  $D=1\text{m}$ . radiația luminoasă utilizată în dispozitiv are lungimea de undă egală cu  $5000\text{\AA}$ .

B.

Fie reflexia unei raze de lumina, polarizată TE, care cade sub un unghi de incidență  $\theta=30^\circ$ , pe o suprafață de separare a două medii, omogene și izotrope din punct de vedere optic. Indicele de refracție al celui de al doilea mediu în raport cu primul mediu (din care vine lumina) este  $n=0,75$ .

1. Calculați valoarea coeficientului de reflexie și reflectanță în cazul TE, reprezentați grafic  $r=f(\theta)$ , în general.
2. Calculați valoarea coeficientului de reflexie și reflectanță pentru  $\theta=30^\circ$  și  $\theta=0^\circ$ . Ce valoare are unghiul limita corespunzător celor două medii optice?
3. Figurați acești coeficienți de reflexie și reflectanțele corespunzătoare pe graficul teoretic de la punctul 1.

A.

1. Unul dintre cele mai importante fenomene care se studiază în cadrul opticii ondulatorii este fenomenul de interferență. Teoria interferenței optice se bazează în esență pe un principiu deosebit de valoros în fizică – pe principiul superpoziției liniare.

În optica electromagnetică acest principiu se referă la suprapunerea (superpoziția) câmpurilor electromagnetice.

În conformitate cu principiul superpoziției, câmpul electric  $\vec{E}$  produs într-un punct din spațiu de acțiunea simultană a mai multor surse este suma vectorială a câmpurilor  $\vec{E}^{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) produse în acel punct de acțiunea individuală a surselor  $i$  (acționând separat). Astfel

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}^{(i)} \quad (1)$$

Un principiu similar este valabil și pentru componentele magnetice ale undelor dar, în optica, datorită micimii lor, efectele determinate de componentele magnetice nu se iau în considerare. Principiul superpoziției este riguros valabil când avem de-a face cu câmpuri electromagnetice în vid. Presupunând principiul superpoziției liniare valabil, să considerăm două unde plane monocromatice (armonice), liniar polarizate, de pulsație  $\omega$ .

Fie

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} \quad (2)$$

și

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)} \quad (3)$$

câmpurile electrice ale acestora. În (1.2) și (1.3) marimile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt fazele inițiale (la  $t=0$ ) în primul caracterizat de  $\vec{r} = \vec{0}$ . Ele au fost introduse în aceste expresii pentru a permite a priori o diferență de fază arbitrară între sursele celor două câmpuri. Dacă diferența  $\varphi_1 - \varphi_2$  este o mărime constantă se spune că cele două surse sunt mutual coerente. În caz contrar sursele nu sunt coerente.

Prin suprapunerea câmpurilor (2) și (3) obținem

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1)} + \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2)}$$

Este cunoscut faptul ca intr-un punct din spatiu intensitatea radiatiei (luminoase) este proportionala cu  $|\vec{E}|^2$ . Lasand la o parte factorul de proportionalitate (nesemnificativ) pentru discutia pe care o dam vom putea scrie

$$I = |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta \quad (5)$$

unde

$$\theta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6)$$

Notand  $I_1 = |\vec{E}_1|^2$  si  $I_2 = |\vec{E}_2|^2$ , (5) devine

$$I = I_1 + I_2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta \quad (7)$$

$I_1$  si  $I_2$  fiind intensitatile in punctul considerat daca acolo ar sosi doar unda (2) respectiv (3).

Relatia (7) ne arata ca, atunci cand superpozitia este prezenta, intensitatea  $I$  poate fi mai mare sau mai mica decat  $I_1 + I_2$  dupa cum termenul  $2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta$  este pozitiv sau negativ. In cazul cand  $2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta$  este zero avem  $I = I_1 + I_2$ .

Termenul  $2\vec{E}_1 \vec{E}_2 \cos \theta$  care "controleaza" valoarea lui  $I$  se numeste termen de interferenta. El este nul cand  $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$  adica atunci cand undele care participa la superpozitie sunt polarizate pe doua directii reciproc perpendiculare.

Presupunand ca nu suntem intr-o astfel de situatie, observam ca comportarea termenului de interferenta este determinata de  $\theta$  prin factorul oscilant  $\cos \theta$ . Din (6) insa observam ca  $\theta$  depinde de  $\vec{r}$ . Aceasta inseamna ca  $I$  va fi o functie cu variatii spatiale periodice. Aceste variatii sunt ceea ce numim in mod uzual franje de interferenta. Daca sursele celor doua unde nu sunt mutual coerente (sunt mutual necoerente) diferenta  $\varphi_1 - \varphi_2$  care apare in expresia lui  $\theta$  nu pastreaza o valoare constanta in timp; in general ea variaza intr-un mod haotic, arbitrar. Din aceasta cauza argumentul functiei cosinus variaza arbitrar in timp si valoarea medie in timp a lui  $\cos \theta$  este zero. In acest caz  $I = I_1 + I_2$  in orice punct din spatiu si franjele de interferenta nu apar.

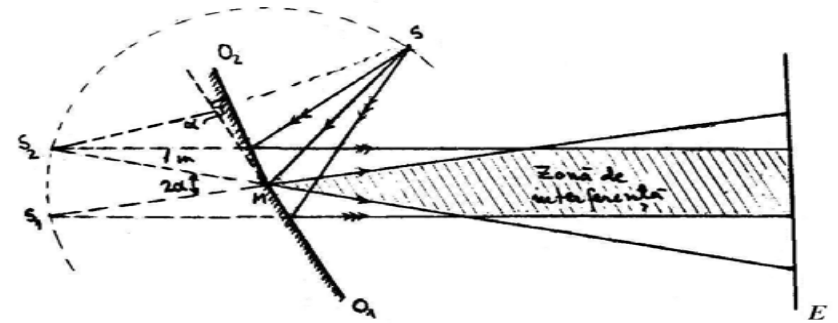
Acesta este motivul pentru care suprapunerea a doua unde provenind din surse luminoase obisnuite (exemplu 2 lumanari, 2 becuri, etc.).

Inainte de a incheia aceste discutii preliminare vom observa ca punctele  $\vec{r}$  din spatiu in care  $I$  are valori constante satisfac conditia

$$\theta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const.} \quad (8)$$

Daca  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.}$  avem conditia  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = \text{const.}$

Pentru valori diferite ale constantei din membrul drept al relatiei (8) avem valori diferite ale lui  $I$ . Atunci cand  $\cos \theta = -1$ , valoarea minima . (Aceste afirmatii sunt valabile pentru  $\vec{E}_1 \vec{E}_2 > 0$ ; in caz contrar, situatia se inverseaza).



Doa oglinzi plane asezate in asa fel incat unghiul lor diedru sa fie aproape  $180^\circ$  (reprezentate ca in figura care reprezinta Oglinzile lui Fresnel de mai jos). Izvorul luminos  $S$  este, de obicei o fanta filiforma paralela cu muchia comuna  $M$ . Izvoarele coerente  $S_1$  si  $S_2$  care genereaza interferenta sunt imaginile lui  $S$  in cele doua oglinzi.

Deoarece oglinzile sunt aproape in prelungire (una celeilalte), imaginile  $S_1$  si  $S_2$  sunt foarte apropiate (fig.1). Franjele de interferenta se pot prinde pe un ecran  $E$  asezat paralel cu muchia  $M$ . In acest fel, franjele vor fi si ele paralele cu muchia  $M$  comuna celor doua oglinzi. Schema de principiu este redada in figura de mai sus.

2.  $\sin \alpha = l/S_1 M$  deci  $2l \approx 2\alpha SM$  caci  $S_1 M = SM$

Distanta dintre sursele virtuale este deci  $2l = 2,9 \text{ mm}$

3. Interfranja este egala cu  $i = \lambda (D + r \cos \alpha) / 2l$ , deoarece dispozitivul este tip Young

Deci  $i = 0,17 \text{ mm}$

Observatie

Unghiul  $\alpha$  fiind foarte mic se fac aproximatiile:  $\sin \alpha \approx \alpha$  si  $\cos \alpha \approx 1$ :

B.

1. Introducem marimile  $\vec{E}, \vec{E}', \vec{E}''$  - amplitudinile campului electric pentru undele incidenta, reflectata si respectiv refractata.

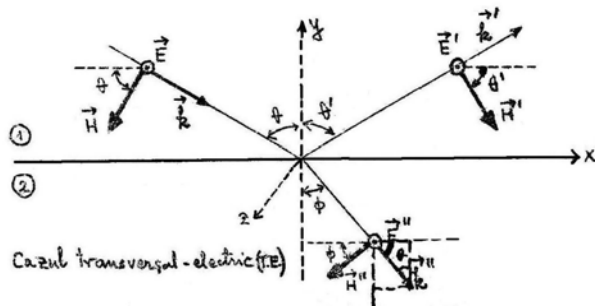


Fig.1A

Fie  $\vec{H}, \vec{H}', \vec{H}''$  - amplitudinile corespunzatoare ale campurilor magnetice atasate.

Considerand ca cele doua medii sunt nemagnetice, vom putea scrie

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E}), \quad (1)$$

$$\vec{H}' = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k}' \times \vec{E}'), \quad (2)$$

$$\vec{H}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k}'' \times \vec{E}'') \quad (3)$$

Dependenta spatio-temporala a fost presupusa comuna pentru campurile electric si magnetic si din aceasta cauza, in relatiile (1) - (3) ea a fost abandonata.

Cazul transversal-electric (TE): campul electric al undeii incidente este perpendicular pe planul de incidenta (fig. 1A).

In fig. 1 se prezinta pozitiile instantanee ale vectorilor camp electric si magnetic in undeii incidente, reflectata si refractata, in cele doua cazuri TE si TM.

### Studiul cazului TE

Folosind continuitatea componentelor tangentiala ale campurilor, in conformitate cu situatia instantanee aleasa in fig. 1A, putem scrie

$$E + E' = E'' \quad (4)$$

$$-H \cos \theta + H' \cos \theta = -H'' \cos \phi \quad (5)$$

Relatia (5) se poate transcrie cu ajutorul relatiilor (3.1)-(3.3) si avem

$$-E k \cos \theta + E' k \cos \theta = -E'' k'' \cos \phi \quad (6)$$

Relatiile (4) si (6) formeaza un sistem algebric din care putem determina marimile relative  $E'/E$  si  $E''/E$ . Printr-un calcul simplu obtinem

$$r = \frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - n \cos \phi}{\cos \theta + n \cos \phi} \quad (7)$$

$$t = \frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + n \cos \phi} \quad (8)$$

n fiind raportul  $k''/k$ .

Tinand cont de faptul ca  $\sin \theta = n \sin \phi$ , mai putem scrie

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin(\phi + \theta)}, \quad (9)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{\sin(\phi + \theta)} \quad (10)$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (11)$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (12)$$

Pentru descrierea reflexiei se foloseste frecvent marimea  $R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2$  numita reflectanta.

Studiul relatiilor (7)-(12), relatiile lui Fresnel, ne conduc la reprezentarile grafice din fig.2.

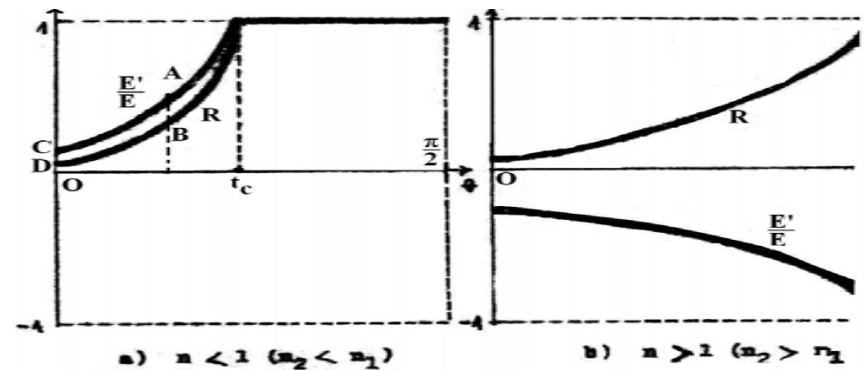


Fig.2a si b

In cazul cand  $n < 1$  exista un unghi  $\theta_c$  (unghi critic) astfel incat pentru  $\theta > \theta_c$  avem de-a face cu reflexie totala.

Pentru a vedea cat este  $\theta_c$  vom scrie ca  $E'/E = 1$  si vom obtine  $\theta_c = \arcsin n$ .

Pentru  $\theta > \theta_c$ , scriind relatia (11) sub forma

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (11')$$

si calculand  $R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2$  vom obtine valoarea 1 independent de  $\theta$ . Aceasta demonstreaza ca in acest caz, intr-adevar se obtine **reflexia totala**.

$$2 \quad r = \frac{E'}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2$$

Deci **dupa inlocuiri obtinem**

$$r(\theta=30^\circ)=0,215 \text{ si } R(\theta=30^\circ)=0,045 \quad r(\theta=0^\circ)=0,14 \text{ si } R(\theta=0^\circ)=0,0196$$

3. Se vor figura punctele pe grafic;  $r=f(\theta)$  si  $R=f(\theta)$ , pentru cazul TE punctele A, B, C, si D de coordonate

$$A(\theta=30^\circ, r=0,215) \text{ si } B(\theta=30^\circ, R=0,045) \text{ si } C(\theta=0^\circ, r=0,14) \text{ si } D(\theta=0^\circ, R=0,0196).$$

## - FIZICA ATOMULUI ȘI MOLECULEI

1. *Stiind ca  $dN_\nu = \frac{8\pi\nu^2 \cdot d\nu}{c^3}$  reprezinta numarul de unde*

*electromagnetice stationare, din unitatea de volum a incintei, cu frecventele cuprinse in intervalul  $(\nu, \nu + d\nu)$ , deduceti formula lui Planck.*

Planck postuleaza ca energia  $E_n$  a unui oscilator armonic liniar, microscopic, de frecventa  $\nu$  este un multiplu intreg al unei valori date  $\varepsilon_0$ , numita cuanta de energie:

$$E_n = n\varepsilon_0, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Presupunand o distributie boltzmanniana a energiei oscilatorilor, valoarea medie a energiei unui oscilator are forma:

$$\langle \varepsilon(\nu, T) \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n / KT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n / KT}} \quad (2)$$

Notand  $\beta = 1 / KT$  si folosind relatia (1), expresia (2) devine:

$$\langle \varepsilon(\nu, T) \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 \cdot e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}\right) = -\frac{d}{d\beta} \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}}\right) = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1} \quad (3)$$

Inlocuind pe  $\beta$  cu  $1/KT$ , din relatia (3) rezulta:

$$\langle \varepsilon(\nu, T) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0 / KT} - 1} \quad (4)$$

Planck obtine urmatoarea expresie pentru densitatea spectrala volumica de energie:

$$\rho(\nu, T) d\nu = dN_\nu \langle \varepsilon(\nu, T) \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0 / KT} - 1} d\nu \quad (5)$$

Pentru ca formula (5) sa fie in concordanta cu datele experimentale trebuie ca  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(\nu, T) = 0$ . Prin urmare,  $\varepsilon_0$  trebuie sa fie o functie crescatoare de frecventa.

Planck a considerat

$$\varepsilon_0 = h\nu \quad (6)$$

unde  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J \cdot s$  este constanta lui Planck.

Ipoieza lui Planck (1) conform careia energia unui oscilator armonic liniar microscopic este cuantificata:

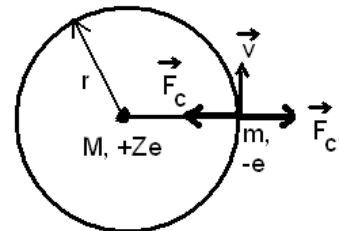
$$E_n = nh\nu, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

arata ca energia oscilatorului variaza discret cu frecventa.

Din relatiile (6) si (5) deducem formula lui Planck:

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu / KT} - 1} d\nu \quad (8)$$

2. *Deduceti, in cadrul teoriei atomice a lui Bohr, expresiile razelor, vitezelor si energiilor corespunzatoare ionilor hidrogenoizi (cazul nucleului infinit greu).*



Deoarece masa  $M$  a nucleului este mult mai mare decat masa  $m$  a electronului se poate considera ca nucleul este infinit greu in raport cu electronul. Nucleul se considera in repaus, situat in originea sistemului de coordonate.

Electronul se va mișca în jurul nucleului pe o traiectorie circulară de rază  $r$ , cu viteza  $v$ . Am notat  $+Ze$  sarcina nucleului și cu  $-e$  sarcina electronului. Condiția de stabilitate a electronului pe orbita circulară este:

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{cf} = 0 \quad (1)$$

unde  $\vec{F}_c$  este forța coulombiană de interacție electron-nucleu iar  $\vec{F}_{cf}$  este forța centrifugă.

Relația (1) conduce la egalitatea:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

Condiția de cuantificare a momentului cinetic este:

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \quad (3)$$

Relațiile (2) și (3) constituie un sistem de ecuații cu necunoscutele  $r$  și  $v$ .

Din (3) obținem

$$v = n\hbar / mr. \quad (4)$$

Introducând această expresie a lui  $v$  în (2) obținem razele orbitelor Bohr pentru ionii hidrogenoizi:

$$r_n^Z = \frac{4\pi\epsilon_0 (\hbar / 2\pi)^2}{me^2} \cdot \frac{n^2}{Z} = a_0 \frac{n^2}{Z}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

unde  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 (\hbar / 2\pi)^2}{me^2} \cong 0,529 \text{ \AA}$  reprezintă raza primei orbite Bohr în atomul de hidrogen.

Relația (5) arată că razele orbitelor Bohr sunt cuantificate și sunt proporționale cu  $n^2$  și invers proporționale cu  $Z$ .

Introducând (5) în (4) se obțin vitezele electronului pe orbitele Bohr:

$$v_n^Z = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (\hbar / 2\pi)} \cdot \frac{Z}{n} = v_0 \frac{Z}{n}, \quad (6)$$

unde  $v_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (\hbar / 2\pi)} \cong 2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  este viteza electronului pe prima orbită Bohr

în atomul de hidrogen.

Observăm că viteza electronului în atom este cuantificată și este proporțională cu  $Z$  și invers proporțională cu  $n$ .

Energia totală ( $E$ ) a ionului hidrogenoid este dată de suma energiei cinetice a electronului și energia potențială de interacție coulombiană electron-nucleu:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

Introducând (5) în (7) obținem:

$$E_n^Z = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = E_0 \frac{Z^2}{n^2} \quad (8)$$

unde  $E_0 = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -13,56 \text{ eV}$  este energia atomului de hidrogen în starea fundamentală ( $n=1$ ).

Din (8) rezultă că energia este negativă (stări legate), este cuantificată și este proporțională cu  $Z^2$  și invers proporțională cu  $n^2$ .

## Disciplina D5: MECANICĂ TEORETICĂ

**1. Să se scrie ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor și să se arate că acestea pot fi obținute dintr-un principiu variațional. Să se reformuleze ultimul principiu variațional în coordonate generalizate și să se deducă ecuațiile corespunzătoare**

Fie un sistem de  $n$  puncte materiale, descris de coordonatele carteziene  $x_i^{(a)}$ ,  $a = 1, 2, \dots, n$  iar  $i = 1, 2, 3$ , care evoluează într-un câmp de forțe potențiale. Faptul că sistemul evoluează într-un câmp potențial implică existența unei funcții  $V(x_i^{(a)})$  numită energie potențială, astfel încât componentele forțelor care acționează asupra punctelor materiale au expresiile

$$F_i^{(a)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}}.$$

Evoluția sistemului are loc astfel încât coordonatele carteziene  $x_i^{(a)}$  satisfac ecuația legăturilor la care este supus sistemul :

$$\phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, A, \quad \text{unde } A \leq 3n.$$

Funcțiile  $\phi_\alpha$  au fost alese astfel încât să satisfacă condiția de regularitate

$$\text{rang} \left( \frac{\partial \phi_\alpha(x_i^{(a)})}{\partial x_i^{(a)}} \right)_{\phi_\alpha(x_i^{(a)})=0} = A.$$

Ecuațiile lui Newton în prezența legăturilor au forma:

$$\begin{cases} m_a \ddot{x}_i^{(a)} = -\frac{\partial V}{\partial x_i^{(a)}} - \sum_{\alpha=1}^A \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i^{(a)}}, \\ \phi_\alpha(x_i^{(a)}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, A \end{cases}$$

unde am notat cu  $\lambda^\alpha$  multiplicatorii Lagrange. Ecuțiile anterioare reprezintă un sistem de  $3n+A$  ecuații cu tot atâtea necunoscute  $(x_i^{(a)}, \lambda^\alpha)$ .

Ecuțiile lui Newton în prezența legăturilor pot fi obținute din *principiul variațional*

$$\begin{cases} \delta S_0^L [x_i^{(a)}, \lambda^\alpha] = 0 \\ \delta x_i^{(a)}(t_1) = \delta x_i^{(a)}(t_2) = 0 \end{cases},$$

unde *acțiunea Lagrangiană* capătă forma

$$S_0^L [x_i^{(a)}, \lambda^\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a (x_i^{(a)})^2 - V(x_i^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^A \lambda^\alpha \phi_\alpha(x_i^{(a)}) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha).$$

Un sistem de  $3n-A$  de funcții de timp  $(q^I)_{I=1,2,\dots,3n-A}$  se numește *sistem de coordonate generalizate* pentru sistemul de  $n$  particule supus la  $A$  legături, în cazul în care coordonatele carteziene exprimate în funcție de acestea prin relații de tipul  $x_i^{(a)} = x_i^{(a)}(q^I)$  satisfac

identic ecuația legăturilor  $\phi_\alpha(x_i^{(a)}(q^I)) \equiv 0$ .

*Acțiunea Lagrangiană în coordonate generalizate* capătă forma

$$S^L [q^I] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a (x_i^{(a)}(q^I))^2 - V(x_i^{(a)}(q^I)) \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^I, \dot{q}^I, t)$$

În ultima relație nu mai apare dependența de  $\lambda^\alpha$  datorită relației  $\phi_\alpha(x_i^{(a)}(q^I)) \equiv 0$ .

Rescriind principiul variațional anterior în coordonate generalizate

$$\begin{cases} \delta S^L [q^I] = 0 \\ \delta q^I(t_1) = \delta q^I(t_2) = 0 \end{cases},$$

obținem *ecuațiile Lagrange* (sistem de  $2(3n-A)$  ecuații diferențiale ordinare de ordinul al doilea cu necunoscutele  $q^I$ ):

$$\frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0.$$

Soluția ecuațiilor Lagrange este dată de  $q^I = q^I(t, c_1, \dots, c_{2(3n-A)})$ , unde constantele  $c_1, \dots, c_{2(3n-A)}$  se determină din condițiile inițiale

$$\begin{cases} q^I(t_1, c_1, \dots, c_{2(3n-A)}) = q_1^I \\ q^I(t_2, c_1, \dots, c_{2(3n-A)}) = q_2^I \end{cases}.$$

Soluția ecuațiilor Lagrange determină complet mișcarea sistemului de  $n$  puncte materiale supus la  $A$  legături.

## 2. Să se enunțe teorema Noether. Să se deducă consecința teoremei Noether referitoare la conservarea energiei totale.

Teorema Noether stabilește legătura dintre transformările de simetrie ale unui sistem și integralele prime ale acestuia.

*Definiție:* Spunem că o funcție este *integrală primă a mișcării* descrise de ecuația Lagrange

$$\frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0, \text{ dacă pentru orice soluție } q^I = \varphi^I(t) \text{ în}$$

care constantele de integrare sunt fixate, avem

$$F(\varphi^I(t), \dot{\varphi}^I(t), t) \equiv c = \text{const.}$$

*Transformările de simetrie* (liniare în parametrul  $\varepsilon^\Delta, |\varepsilon^\Delta| \ll 1$ ) sub formă infinitesimală ale unui sistem sunt de forma

$$q^a \rightarrow Q^a = q^a + R_\Delta^a \varepsilon^\Delta,$$

unde

$$R_\Delta^a(q^a) = \frac{\partial Q^a}{\partial \varepsilon^\Delta}.$$

*Enunț:* Dacă acțiunea unui sistem este invariantă la transformările de simetrie infinitesimale cu  $N$  parametri  $\varepsilon^\Delta$ , atunci sistemul posedă  $N$  integrale prime independente, de forma

$$I_\Delta(q^I, \dot{q}^I, t) = \left( L(q^I, \dot{q}^I, t) - \dot{q}^I \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \right) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon^\Delta} + \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I, t)}{\partial \dot{q}^I} \frac{\partial Q^I}{\partial \varepsilon^\Delta},$$

unde  $\Delta = 1, \dots, N$ .

Considerăm Lagrangianul

$$L(x_i^{(a)}, \dot{x}_i^{(a)}, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a (x_i^{(a)})^2 - V(x_i^{(a)}) - \sum_{\alpha=1}^A \lambda^\alpha \phi_\alpha(x_i^{(a)})$$

al unui sistem de  $n$  puncte materiale supuse la  $A$  legături independente de timp. Putem găsi întotdeauna un sistem de coordonate generalizate  $q^I$  astfel încât relațiile dintre coordonatele carteziene și cele generalizate să fie de forma

$$x_i^{(a)} = x_i^{(a)}(q^I).$$

Derivând ultima relație în raport cu timpul, obținem

$$\frac{dx_i^{(a)}}{dt} = \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \dot{q}^I.$$

Substituind ultimele două relații în Lagrangianul considerat obținem Lagrangianul sistemului în coordonate generalizate (numit și Lagrangianul natural)

$$L(q^I, \dot{q}^I) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q^I),$$

unde

$$g_{IJ}(q) = \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 m_a \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^I} \frac{\partial x_i^{(a)}}{\partial q^J} = \sum_{a=1}^n m_a \frac{\partial \vec{r}^{(a)}}{\partial q^I} \frac{\partial \vec{r}^{(a)}}{\partial q^J}.$$

Ultima relație evidențiază că funcțiile  $g_{IJ}(q)$  sunt simetrice,  $g_{IJ}(q) = g_{JI}(q)$ . Primul termen al Lagrangianului natural reprezintă energia cinetică a sistemului iar al doilea energia sa potențială, astfel încât energia totală în funcție de  $q^I$  și  $\dot{q}^I$  are forma

$$E(q^I, \dot{q}^I) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + V(q^I).$$

Considerăm translațiile temporale

$$t \rightarrow T = t + \varepsilon$$

$$q^I \rightarrow Q^I = q^I, \forall I$$

Avem un singur parametru  $\varepsilon$  și, conform teoremei Noether, putem avea o singură integrală primă. Din ultimele relații găsim că

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1, \quad \frac{\partial Q^I}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \forall I.$$

Corespunzător translațiilor temporale menționate deducem următoarea integrală primă

$$I(q^I, \dot{q}^I) = L(q^I, \dot{q}^I) - \dot{q}^I \frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I)}{\partial \dot{q}^I}.$$

Din Lagrangianul natural rezultă prin calcul direct

$$\frac{\partial L(q^I, \dot{q}^I)}{\partial \dot{q}^I} = g_{IJ}(q) \dot{q}^J$$

relație care înlocuită în integrala primă ne conduce la

$$I(q^I, \dot{q}^I) = -\left( \frac{1}{2} g_{IJ}(q) \dot{q}^I \dot{q}^J + V(q^I) \right).$$

*Consecință:* Dacă acțiunea unui sistem este invariantă la translațiile temporale, atunci energia totală a sistemului este integrală primă.

### 3. Să se enunțe și să se demonstreze teorema Poisson referitoare la integralele prime Hamiltoniene

Definim *integrala primă Hamiltoniană* ca fiind orice observabilă care se reduce identic la o constantă  $F(\varphi(t), t) \equiv c$ , unde  $\varphi(t) = (q^i(t), p_i(t))$  este soluția ecuațiilor canonice Hamilton.

O observabilă clasică  $F(q^i, p_i, t)$  este integrală primă Hamiltoniană dacă și numai dacă

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0.$$

*Enunț:* Dacă  $F_1$  și  $F_2$  sunt integrale prime Hamiltoniene ale unui sistem, atunci paranteza lor Poisson  $[F_1, F_2]$  este integrală primă a aceluiași sistem.

*Demonstrație:*

Dacă  $F_1$  și  $F_2$  sunt integrale prime Hamiltoniene atunci acestea satisfac relațiile

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + [F_1, H] = 0,$$

respectiv

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + [F_2, H] = 0.$$

Trebuie să demonstrăm că

$$\frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] + [[F_1, F_2], H] = 0.$$

Utilizăm comportarea parantezei Poisson la derivarea parțială cu timpul

$$\frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] = \left[ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right] + \left[ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right].$$

Înlocuim în relația de mai sus  $\frac{\partial F_1}{\partial t}$  și  $\frac{\partial F_2}{\partial t}$  din condiția ca o observabilă clasică să fie integrală primă Hamiltoniană și obținem

$$\frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] = -[[F_1, H], F_2] - [F_1, [F_2, H]].$$

Pe baza identității Jacobi găsim că

$$-[[F_1, H], F_2] - [F_1, [F_2, H]] = -[[F_1, F_2], H].$$

Substituind ultima relație în cea anterioară obținem ceea ce trebuia demonstrat.

4. **Să se scrie ecuația Hamilton Jacobi și să se definească noțiunea de integrală completă. Să se enunțe și să se demonstreze teorema Jacobi referitoare la ecuația Hamilton-Jacobi.**

Ecuația Hamilton Jacobi are forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t\right) = 0$$

Ecuația Hamilton-Jacobi este o ecuație cu derivate parțiale, funcția necunoscută fiind  $S$ . Soluția ecuației este de forma  $S = S(t, q^i, c_1, \dots, c_f)$ , unde  $c_1, \dots, c_f$  sunt constante arbitrare.

O soluție  $S(q^i, \beta_i, t)$  a ecuației Hamilton-Jacobi se numește *integrală completă* dacă

$$\text{rang} \left( \frac{\partial^2 S(q^i, \beta_i, t)}{\partial q^i \partial \beta_j} \right) = f = \text{nr. gradelor de libertate ale sistemului.}$$

Ultima condiție ne permite să explicităm  $(q^i, p_i)$  ca funcții de timp și  $2f$  constante arbitrare  $q^i = q^i(t, \alpha^i, \beta_i)$  respectiv  $p_i = p_i(t, \alpha^i, \beta_i)$ .

*Teorema Jacobi*

Fie  $S(q^i, \beta_i, t)$  o integrală completă a ecuației Hamilton-Jacobi. Atunci funcțiile

$q^i = q^i(t, \alpha^i, \beta_i)$  și  $p_i = p_i(t, \alpha^i, \beta_i)$  obținute prin explicitare din relațiile

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial q^i} \\ \alpha^i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial \beta_i} \end{cases},$$

sunt soluții ale ecuațiilor canonice Hamilton.

Demonstrație:

Aplicând derivata totală în raport cu timpul în ambii membri ai

$$\text{relației } \alpha^i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial \beta_i} \text{ obținem}$$

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \beta_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \beta_i} \dot{q}^j.$$

Derivând parțial în raport cu  $\beta_i$  ambii membri ai ecuației Hamilton-Jacobi, deducem că

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta_i \partial q^j}.$$

Scăzând ultimele două relații ajungem la sistemul omogen de  $f$  ecuații algebrice

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial \beta_i} \left( \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right).$$

Necunoscutele sistemului sunt funcțiile  $u^j = \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j}$ . Ținând cont că  $S$  este integrală

completă, ajungem la concluzia că sistemul anterior are doar soluția banală

$$u^j = \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0,$$

deci  $q^i, p_i$  verifică primul set de ecuații Hamilton.

Vom demonstra în cele ce urmează că îl verifică și pe al doilea.

Aplicăm derivata totală în raport cu timpul în ambii membri ai relației  $p_i = \frac{\partial S(q^i, \beta_i, t)}{\partial q^i}$ .

Obținem

$$\dot{p}^i = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^j.$$

Derivăm parțial ecuația Hamilton-Jacobi în raport cu  $q^i$  și obținem

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}.$$

Scăzând ultimele două relații obținem

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Prin urmare  $q^i, p_i$  verifică și cel de-al doilea set de ecuații Hamilton.



## Disciplina D6: ELECTRODINAMICA

1. Se consideră o particulă relativistă liberă cu masa de repaus  $m_0$  ce se deplasează cu viteza  $\vec{v}$ . Să se definească și să se calculeze efectiv impulsul, masa și energia particulei pornind de la expresia funcției Lagrange care descrie acest sistem.

Într-un sistem de coordonate generalizate  $\{q_i; i = 1, 2, 3\}$ , impulsul unei particulei libere se definește prin relația:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \Leftrightarrow p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; i = 1, 2, 3$$

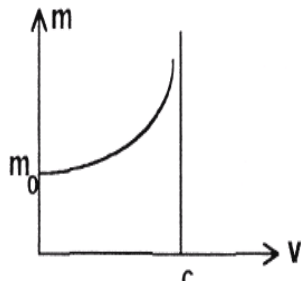
Ținând cont de expresia Lagrangeanului,  $L = -m_0 c^2 \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{1/2}$ , obținem:

$$\vec{p} = -m_0 c^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dacă luăm în calcul definiția generală  $\vec{p} = m\vec{v}$ , vom putea identifica masa de mișcare a particulei:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Masa particulei depinde de viteză.



Energia particulei este dată de relația:

$$E = \dot{q} \cdot p - L = \vec{v} \cdot \vec{p} - L$$

Aică:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

Relația anterioară exprimă echivalența dintre masa și energia particulei.

2. Să se enunțe legea inducției electromagnetice și să se verifice prin calcul direct validitatea formei ei diferențiale, pe baza definițiilor intensității câmpului electric  $\vec{E}$  și inducției magnetice  $\vec{B}$  în funcție de potențialele vector  $\vec{A}$  și scalar  $\varphi$ .

Legea inducției electromagnetice afirmă că un flux magnetic variabil care străbate o suprafață S generează în orice curbă închisă  $\Gamma_S$  care înconjoară suprafața o tensiune electromotoare egală și de semn opus cu viteza de variație a fluxului magnetic:

$$e|_{\Gamma_S} = - \left. \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} \right|_S$$

Sub formă diferențială legea se poate exprima prin relația:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și inducția magnetică  $\vec{B}$  se definesc în funcție de potențialele vector  $\vec{A}$  și scalar  $\varphi$  prin relațiile:

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Utilizăm definițiile anterioare pentru  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , ținând în plus cont că  $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ . În aceste condiții relația matematică pentru legea inducției devine identitate.

3. Să se scrie ecuațiile Maxwell în vid sub formă diferențială și, pornind de la acestea, să se deducă ecuația de continuitate pentru sarcina electrică. Să se pună ecuația de continuitate sub formă integrală și să se precizeze semnificația ei fizică.

Sub formă diferențială, cele patru ecuații Maxwell, scrise pentru vid au expresiile:

- legea fluxului electric (teorema lui Gauss):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

- legea fluxului magnetic:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

- legea inducției electromagnetice:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- legea circuitală a lui Ampere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Din prima și din ultima ecuație se obține ecuația de continuitate pentru sarcina

$$\text{electrică: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Semnificația fizică a acestei ecuații devine evidentă dacă ea se pune sub formă integrală:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \text{ adică } \frac{d}{dt} Q_V = -\oint_{S_V} \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

Variația sarcinii electrice dintrun volum  $V$  este dată de fluxul sarcinii electrice prin suprafața care mărginește volumul respectiv.

**4. Să se obțină, pornind de la sistemul ecuațiilor Maxwell în vid, forma diferențială pentru ecuația undelor electromagnetice. Pentru soluția de tip undă plană monocromatică a acestei ecuații să se deducă apoi relația de dispersie dintre vectorul de undă  $\vec{k}$  atașat direcției de propagare și pulsația  $\omega$  a undei monocromatice.**

Deducerea ecuației diferențiale a undelor electromagnetice presupune rezolvarea ecuațiilor Maxwell în absența “surselor” care generează câmpul electromagnetic.

Impunând  $\rho = 0, \vec{j} = 0$ , sistemul ecuațiilor Maxwell pentru vid devine:

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0; \vec{\nabla} \vec{B} = 0; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Prin aplicarea rotorului asupra ultimelor două ecuații, explicitarea dublului produs vectorial și utilizarea primelor două ecuații, suntem conduși la o ecuație diferențială de ordin II, de tip D’Alembert:

$$\square u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Aceasta este ecuația diferențială a undelor electromagnetice. Mărimea scalară  $u$  din relația anterioară poate reprezenta oricare dintre componentele vectorilor  $\vec{E}, \vec{B}$ .

Spunem că o undă electromagnetică este *undă plană monocromatică* ce se propagă pe o direcție dată de vectorul de undă  $\vec{k}$ , dacă mărimea specifică  $u(\vec{r}, t)$  se exprimă printr-o relație de forma:

$$u \equiv A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Se poate ușor vedea că expresia anterioară este soluție a ecuației undelor dacă se verifică “relația de dispersie” de forma:

$$\vec{k}^2 = \omega^2 / c^2 \Leftrightarrow \omega = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

## Disciplina D7: TERMODINAMICĂ ȘI FIZICĂ STATISTICĂ

### 1. Deducerea proprietăților de echilibru (în formularea entropică).

Considerăm un sistem complet izolat  $S$  format din reuniunea a două subsisteme  $S_1$  și  $S_2$

$$S_1 \cup S_2.$$

Fie

$X_\alpha = (U, X_1, \dots, X_n)$  parametri extensivi de stare ai sistemului  $S$ ,

$X_\alpha^{(1)} = (U^{(1)}, X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)})$  parametri extensivi de stare ai subsistemului  $S_1$ ,

$X_\alpha^{(2)} = (U^{(2)}, X_1^{(2)}, \dots, X_n^{(2)})$  parametri extensivi de stare ai subsistemului  $S_2$ .

Folosind aceste notații, avem

$$X_\alpha = X_\alpha^{(1)} + X_\alpha^{(2)}, \alpha = 0, 1, \dots, n.$$

Deoarece am presupus că întregul sistem este *complet izolat* rezultă

$$X_\alpha = C_\alpha,$$

unde  $C_\alpha$  sunt niște constante.

Ultimele două relații conduc la

$$X_\alpha^{(1)} + X_\alpha^{(2)} = C_\alpha.$$

Inițial, presupunem că întregul sistem se află într-o stare de echilibru împiedicat în raport cu toate interacțiile la care pot participa subsistemele. Rezultă că subsistemele nu interacționează între ele prin niciuna dintre interacțiile la care pot participa. În consecință, avem constrângerile interne:

$$\begin{cases} X_\alpha^{(1)} = C_\alpha^{(1)} \\ X_\alpha^{(2)} = C_\alpha^{(2)} \end{cases}.$$

Evident, constrângerile interne trebuie să fie compatibile cu relațiile care descriu izolarea totală a întregului sistem

$$C_\alpha^{(1)} + C_\alpha^{(2)} = C_\alpha.$$

Despărțim parametrii  $X_\alpha^{(1)}$  și  $X_\alpha^{(2)}$  în două subseturi, sub forma

$$X_\alpha^{(1)} = (X_A^{(1)}, X_a^{(1)}),$$

$$X_\alpha^{(2)} = (X_A^{(2)}, X_a^{(2)}).$$

Ridicăm constrângerile interne care interzic interacțiile de tip  $a$  și le menținem pe cele de tip  $A$ . Atunci constrângerile interne se reduc la

$$X_A^{(1)} = C_A^{(1)},$$

$$X_A^{(2)} = C_A^{(2)},$$

în timp ce ceilalți parametrii extensivi satisfac relațiile

$$X_a^{(1)} + X_a^{(2)} = C_a,$$

unde  $X_a^{(1)}$  și  $X_a^{(2)}$  nu sunt mărimi constante.

Știm că după ridicarea constrângerilor de tip  $a$ , întregul sistem va ajunge (conform postulatelor formulării Gibbs) într-o stare de echilibru în care *entropia sistemului este maximă*. Condiția necesară și suficientă pentru ca entropia să aibă un maxim este

$$dS = 0, \quad d^2S < 0.$$

Stabilisem anterior că entropia întregului sistem este *aditivă* în raport cu subsistemele componente adică

$$S(X_\alpha) = S^{(1)}(X_\alpha^{(1)}) + S^{(2)}(X_\alpha^{(2)}).$$

Ținând cont de despărțirea parametrilor în două subseturi  $X_\alpha^{(1)}$  și  $X_\alpha^{(2)}$ , găsim

$$S(X_\alpha) = S^{(1)}(X_A^{(1)}, X_a^{(1)}) + S^{(2)}(X_A^{(2)}, X_a^{(2)}).$$

Diferențind ultima relație obținem

$$\begin{aligned} dS &= dS^{(1)}(X_A^{(1)}, X_a^{(1)}) + dS^{(2)}(X_A^{(2)}, X_a^{(2)}) = \\ &= \sum_A \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_A^{(1)}} dX_A^{(1)} + \sum_a \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} dX_a^{(1)} + \sum_A \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_A^{(2)}} dX_A^{(2)} + \sum_a \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}} dX_a^{(2)}. \end{aligned}$$

Ținând cont de faptul că  $dX_A^{(1)} = 0 = dX_A^{(2)}$  și că  $dX_a^{(2)} = -dX_a^{(1)}$  rezultă

$$dS = \sum_a \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} - \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}} \right) dX_a^{(1)}.$$

Utilizând ecuația

$$dS = 0,$$

obținem

$$\sum_a \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} - \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}} \right) dX_a^{(1)} = 0.$$

Deoarece ultima relație are loc pentru variații diferențiale independente  $dX_a^{(1)}$ , rezultă

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}} = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}}.$$

Ultimele relații caracterizează complet starea de echilibru obținută după ridicarea constrângerilor interne de tip  $a$ .

Știm că  $F_\alpha = \frac{\partial S}{\partial X_\alpha}$  sunt parametrii intensivi entropici conjugați cu parametrii extensivi

$X_\alpha$ . Atunci condițiile de echilibru capătă forma

$$F_a^{(1)} = F_a^{(2)},$$

unde  $F_a^{(1)} = \frac{\partial S^{(1)}}{\partial X_a^{(1)}}$  sunt parametrii intensivi entropici conjugați cu parametrii extensivi

$X_a^{(1)}$  din subsistemul  $S_1$ , în timp ce  $F_a^{(2)} = \frac{\partial S^{(2)}}{\partial X_a^{(2)}}$  sunt parametrii intensivi entropici

conjugați cu parametrii extensivi  $X_a^{(2)}$  din subsistemul  $S_2$ .

*Concluzie:* În urma ridicării constrângerilor care interzic interacțiile de tip  $a$  între cele două subsisteme, întregul sistem ajunge într-o stare de echilibru caracterizată prin egalitatea parametrilor intensivi entropici de tip  $a$  ai celor două subsisteme.

## 2. Ecuația Euler

Ecuația fundamentală în reprezentarea *entropică* are forma

$$S = S(U, X_1, \dots, X_n)$$

în timp ce în reprezentarea *energetică* devine

$$U = U(S, X_1, \dots, X_n).$$

Postulatul formulării Gibbs evidențiază că entropia este *funcție omogenă de ordinul I* (în sens Euler) de parametrii de stare

$$S(\lambda U, \lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda S(U, X_1, \dots, X_n).$$

Deoarece este parametru extensiv, energia internă va avea aceeași proprietate

$$U(\lambda S, \lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda U(S, X_1, \dots, X_n).$$

Utilizând notațiile

$$X_\alpha = (U, X_1, \dots, X_n),$$

$$\bar{X}_\alpha = (S, X_1, \dots, X_n),$$

proprietățile de omogenitate capătă forma

$$S(\lambda X_\alpha) = \lambda S(X_\alpha),$$

$$U(\lambda \bar{X}_\alpha) = \lambda U(\bar{X}_\alpha).$$

Derivăm ultimele două relații în raport cu parametrul  $\lambda$  și găsim

$$\sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial S(\lambda X_\alpha)}{\partial(\lambda X_\alpha)} \frac{\partial(\lambda X_\alpha)}{\partial \lambda} = S(X_\alpha),$$

$$\sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial U(\lambda \bar{X}_\alpha)}{\partial(\lambda \bar{X}_\alpha)} \frac{\partial(\lambda \bar{X}_\alpha)}{\partial \lambda} = U(\bar{X}_\alpha).$$

Ținând cont de faptul că

$$F_\alpha = \left( \frac{\partial S(X_\alpha)}{\partial X_\alpha} \right)_{X_\alpha \neq X_\beta},$$

$$P_\alpha = \left( \frac{\partial U(\bar{X}_\alpha)}{\partial \bar{X}_\alpha} \right)_{\bar{X}_\alpha \neq \bar{X}_\beta},$$

obținem *ecuația Euler în reprezentarea entropică*

$$S(X_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n F_\alpha X_\alpha,$$

respectiv *ecuația Euler în reprezentarea energetică*

$$U(\bar{X}_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n P_\alpha \bar{X}_\alpha,$$

sau echivalent

$$S(U, X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{T} U + \sum_{i=1}^n F_i X_i,$$

$$U(S, X_1, \dots, X_n) = TS + \sum_{i=1}^n P_i X_i.$$

Atunci când cunoaștem ecuația fundamentală putem deduce toate ecuațiile primare de stare. Ecuația Euler (în oricare dintre reprezentări) arată că dacă știm toate ecuațiile primare de stare atunci putem construi ecuația fundamentală în oricare dintre reprezentări. Presupunem că știm ecuațiile primare de stare

$$F_\alpha = F_\alpha(U, X_1, \dots, X_n),$$

sau în mod echivalent

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T}(U, X_1, \dots, X_n),$$

$$F_i = F_i(U, X_1, \dots, X_n).$$

Substituind ultimele relații în ecuația Euler în reprezentarea entropică găsim ecuația fundamentală în această reprezentare

$$S(X_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n F_\alpha(X_\alpha) X_\alpha,$$

sau echivalent

$$S(U, X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{T}(U, X_1, \dots, X_n)U + \sum_{i=1}^n F_i(U, X_1, \dots, X_n)X_i.$$

Similar procedăm și în reprezentarea energetică. Presupunem cunoscute ecuațiile primare de stare

$$P_\alpha = P_\alpha(S, X_1, \dots, X_n),$$

sau echivalent

$$T = T(S, X_1, \dots, X_n),$$

$$P_i = P_i(S, X_1, \dots, X_n).$$

Substituind ultimele relații în ecuația Euler în reprezentarea energetică, găsim ecuația fundamentală în această reprezentare

$$U(\bar{X}_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^n P_\alpha(\bar{X}_\alpha) \bar{X}_\alpha,$$

sau echivalent

$$U(S, X_1, \dots, X_n) = T(S, X_1, \dots, X_n)U + \sum_{i=1}^n P_i(S, X_1, \dots, X_n)X_i.$$

*Concluzie:* Ecuațiile Euler ne arată cum putem construi ecuația fundamentală atunci când cunoaștem toate ecuațiile primare de stare.

### 3. Principiul variational fundamental al fizicii statistice de echilibru

În cazul sistemelor clasice, *entropia (statistica)*,  $S$ , este definită prin relația:

$$S(\rho^*) = -k \langle \ln \rho^* \rangle \quad (1)$$

unde  $k$  este constanta lui Boltzmann iar

$$\langle \ln \rho^* \rangle = \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) \ln \rho^*(x) \quad (2)$$

este media funcției  $\ln \rho^*(x)$  pe ansamblul statistic staționar.

Am ales să lucrăm cu mărimi stelate ( $\rho^*(x), d^{2s} x^*$ ) pentru a putea îngloba în analiza care va urma și sistemele de particule identice.

În funcție de condițiile în care se realizează echilibrul termodinamic, densitatea de probabilitate  $\rho^*(x)$  satisface condiții suplimentare numite constrângeri. O primă constrângere, care este întotdeauna prezentă, este *condiția (constrângerea) de normare*:

$$f_0[\rho^*] \equiv \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) - 1 = 0 \quad (3)$$

Celelalte constrangeri care pot sa apara intr-o teorie depind in general de conditiile de preparare a starii de echilibru. Ele vor fi notate prin:

$$f_1[\rho^*] = 0 \quad (4)$$

$$f_2[\rho^*] = 0 \quad (5)$$

⋮

### Principiul fundamental al fizicii statistice de echilibru

Un ansamblu statistic de echilibru este descris de o densitate de probabilitate

$\rho^*(x)$  care realizeaza maximul entropiei statistice

$$S[\rho^*] = -k \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) \ln \rho^*(x) \quad (6)$$

In raport cu valorile entropiei pe toate functiile  $\rho^*(x)$  care satisfac constrangerile.

Principiul fundamental enuntat anterior ne conduce la o problema de extremum cu legaturi. O astfel de problema se rezolva folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Mai exact, extremul lui  $S[\rho^*]$  in prezenta legaturilor (3), (4), (5), ... se exprima prin extremul functionalei

$$\mathcal{S}[\rho^*] = S[\rho^*] - \alpha_0 f_0[\rho^*] - \alpha_1 f_1[\rho^*] - \dots \quad (7)$$

unde  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  sunt multiplicatori Lagrange.

Conditia necesara de extrem pentru functionala (7) este:

$$\delta \mathcal{S}[\rho^*] = 0 \quad (8)$$

unde

$$\delta \mathcal{S} = \left. \frac{d\mathcal{S}[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} \right|_{u=0} \quad (9)$$

In ultima relatie,  $u$  este un parametru care nu depinde de  $x$  (sau de  $\rho^*$ ) iar  $\delta\rho^*$  sunt niste variatii arbitrare ale lui  $\rho^*$ . Folosind relatiile (6), (3), (4), (5) etc. gasim

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} &= \frac{d}{du} \left( \int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k(\rho^* + u\delta\rho^*) \ln(\rho^* + u\delta\rho^*)) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_0(\rho^* + u\delta\rho^*) - \alpha_0 - \alpha_1 f_1[\rho^* + u\delta\rho^*] - \alpha_2 f_2[\rho^* + u\delta\rho^*] - \dots \right) = \\ &= \int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k\delta\rho^* \ln(\rho^* + u\delta\rho^*) - k(\rho^* + u\delta\rho^*) \frac{1}{\rho^* + u\delta\rho^*} \delta\rho^* - \alpha_0 \delta\rho^*) - \\ &\quad - \alpha_1 \frac{df_1[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} - \alpha_2 \frac{df_2[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Evaluam (10) pentru  $u=0$

$$\delta \mathcal{S} = \left. \frac{d\mathcal{S}[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} \right|_{u=0} = \int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k \ln \rho^* - k - \alpha_0) \delta\rho^* - \alpha_1 \left. \frac{df_1[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} \right|_{u=0} - \alpha_2 \left. \frac{df_2[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} \right|_{u=0} - \dots \quad (11)$$

Introducem (11) in (8) si obtinem:

$$\int_{\Gamma} d^{2s} x^* (-k \ln \rho^* - k - \alpha_0) \delta\rho^* - \alpha_1 \left. \frac{df_1[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} \right|_{u=0} - \alpha_2 \left. \frac{df_2[\rho^* + u\delta\rho^*]}{du} \right|_{u=0} = 0$$

Cunoasterea tuturor constrangerilor  $f_1, f_2, \dots$  care apar in ultima ecuatie ne permite sa determinam complet  $\rho^*(x)$  pe baza acestei ecuatii.

### 4. Ansamblul canonic clasic

Prin definitie, in ansamblul canonic clasic starea de echilibru se prepara prin contactul de echilibru al sistemului de studiat cu un termostat care fixeaza temperatura sistemului (T) la valoarea temperaturii termostatului ( $T_T$ ):  $T=T_T$ . Deoarece nu avem interactii mecanice, toti parametri mecanici  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ai sistemului sunt fixati.

Fixarea parametrilor (T,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) va determina complet starea de echilibru in reprezentarea potentialului Helmholtz (energia libera). In particular, fixarea parametrilor (T,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) fixeaza energia interna

$$U = U(T, X_1, X_2, \dots, X_n) = \text{fixata}$$

Identificand energia interna U cu media pe ansamblul statistic a Hamiltonianului  $\langle H \rangle$ :

$$U = \langle H \rangle$$

fixarea energiei interne va conduce la fixarea mediei Hamiltonianului:

$$\langle H \rangle \equiv \bar{E} = \text{valoare fixata}$$

Desi media Hamiltonianului este fixata, datorita interactiei dintre sistem si termostat energia U va fi o variabila aleatoare. Fixarea mediei Hamiltonianului este o noua constrangere care apare alaturi de constrangerea de normare in cazul ansamblului canonic clasic:

$$f_0[\rho^*] \equiv \int_{\Gamma} d^{2s} x^* \rho^*(x) - 1 = 0 \quad (\text{constrangerea de normare}) \quad (1)$$

$$f_1[\rho^*] \equiv \int_{\Gamma} d^{2s} x^* H(x) \rho^*(x) - \bar{E} = 0 \quad (\text{constrangerea de fixare a mediei energiei}) \quad (2)$$

Alte constrangeri suplimentare nu mai apar in cazul ansamblului canonic clasic.

Aplicam principiul fundamental al fizicii statistice de echilibru pentru a determina densitatea de probabilitate  $\rho^*(x)$ . Construim functionala

$$\mathcal{S}[\rho^*] = S[\rho^*] - \alpha_0 f_0[\rho^*] - \alpha_1 f_1[\rho^*] \quad (3)$$

Construim

$$\delta \mathcal{S} = \left. \frac{d\mathcal{S}(\rho^* + u\delta\rho^*)}{du} \right|_{u=0} = \int d^{2s}x^* (-k \ln \rho^* - k - \alpha_0 - \alpha_1 H(x)) \delta\rho^*(x).$$

Din conditia  $\delta \mathcal{S} = 0$  obtinem ecuatia:

$$\ln \rho^*(x) = -1 - \frac{\alpha_0}{k} - \frac{\alpha_1}{k} H(x)$$

Care ne conduce la

$$\rho^*(x) = e^{-1 - \frac{\alpha_0}{k} - \frac{\alpha_1}{k} H(x)}$$

Introducem notatia

$$\frac{1}{Z^*} \equiv e^{-1 - \frac{\alpha_0}{k}}$$

astfel incat ultima relatie poate fi scrisa sub forma

$$\rho^*(x) = \frac{1}{Z^*} e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)} \quad (4)$$

Marimea  $Z^*$  se numeste integrala de stare canonica si contine toata informatia termodinamica cu privire la sistem. Din conditia de normare pentru  $\rho^*(x)$  dat de (4) obtinem:

$$Z^* = \int_{\Gamma} d^{2s}x^* e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)}$$

Pentru a determina complet densitatea de probabilitate si implicit integrala de stare canonica trebuie sa determinam multiplicatorul Lagrange  $\alpha_1$ . Pentru aceasta vom calcula entropia statistica S. Vom avea

$$\begin{aligned} \ln \rho^* &= -\ln Z^* - \frac{\alpha_1}{k} H \\ S &= -k \langle \ln \rho^* \rangle = k \ln \langle Z^* \rangle + \alpha_1 \langle H \rangle \end{aligned}$$

Folosim faptul ca  $\langle Z^* \rangle = Z^*$  (deoarece  $Z^*$  nu depinde de  $x$ ) si  $\langle H \rangle = U$ . Atunci

$S = k \ln Z^* + \alpha_1 U$ , de unde exprimam

$$k \ln Z^* = S - \alpha_1 U \quad (5)$$

Derivam ultima relatie in raport cu  $\alpha_1$ . Pentru membrul stang vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (k \ln Z^*) &= k \frac{\partial (\ln Z^*)}{\partial Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial \alpha_1} = k \frac{1}{Z^*} \frac{\partial Z^*}{\partial \alpha_1} = k \frac{1}{Z^*} \int_{\Gamma} d^{2s}x^* \left(-\frac{1}{k} H(x) e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)}\right) = \\ &= -\int_{\Gamma} d^{2s}x^* H(x) \frac{1}{Z^*} e^{-\frac{\alpha_1}{k} H(x)} = -\int_{\Gamma} d^{2s}x^* H(x) \rho^*(x) = -\langle H \rangle = -U \quad (6) \end{aligned}$$

Derivam in raport cu  $\alpha_1$  membrul drept al relatiei (5):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (S - \alpha_1 U) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - U - \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \quad (7)$$

Din (5), (6) si (7) se obtine:

$$-U = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - U - \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1}$$

adica  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha_1}$  ceea ce ne conduce la

$$\alpha_1 = \frac{\partial S / \partial \alpha_1}{\partial U / \partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad (7')$$

In consecinta, densitatea de probabilitate in ansamblul canonic are forma:

$$\rho^*(x) = \frac{1}{Z^*} e^{-\frac{H(x)}{kT}} \quad (8)$$

Construim acum termodinamica statistica in ansamblul canonic. Plecam de la relatia (5) in care substituim  $\alpha_1$  cu  $1/T$ . Vom avea:

$$-kT \ln Z^* = U - TS \quad (9)$$

Stim ca  $U - TS$  este chiar transformata Legendre a energiei libere in raport cu S, adica energia libera  $F(T, X_1, \dots, X_n)$ . Astfel, relatia (9) se poate scrie sub forma

$$F(T, X_1, \dots, X_n) = -kT \ln Z^*(T, X_1, \dots, X_n) \quad (10)$$

Am ajuns la concluzia ca, in ansamblul canonic classic termodinamica statistica se construiește cu ajutorul energiei libere. Pentru a putea determina energia libera trebuie sa determinam integrala de stare  $Z^*$  in care apare dependenta de  $X_1, \dots, X_n$  prin dependenta Hamiltonianului de acesti parametri:  $H=H(x, X_1, \dots, X_n)$ .

## Disciplina D8: MECANICĂ CUANTICĂ

### 1. Principiile de descriere ale mecanicii cuantice:

#### a) Principiul I (descrierea starilor)

#### b) Principiul al II-lea (descrierea observabilelor)

- a) **Principiul I:** Starea oricarui sistem cuantic, la un moment dat, este descrisa de un sistem cel mult numarabil  $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$ , in care  $|\psi_k\rangle$  sunt vectori normati [ $\langle\psi_k, \psi_k\rangle = 1$ ] dintr-un spatiu Hilbert separabil asociat sistemului cuantic, iar  $p_k$  sunt numere pozitive [numite ponderi asociate vectorilor  $|\psi_k\rangle$ ] care satisfac conditia de normare  $\sum_k p_k = 1$ .

#### Comentarii

Spatiul Hilbert separabil asociat unui sistem cuantic se numeste spatiul starilor pentru acel sistem.

O stare se numeste pura daca este descrisa de un singur vector normat  $|\psi\rangle$ , caz in care ponderea asociata este egala cu unitatea  $p = 1$ . [Tinand cont si de celelalte principii, rezulta ca toti vectorii din raza unitara asociata lui  $|\psi\rangle$ ,  $\{c|\psi\rangle, c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}$  descriu aceeasi stare pura.]

O stare care nu este pura se numeste mixta, deci o stare mixta este descrisa de cel putin doi vectori normati si cel putin doua ponderi pozitive subunitare avand suma egala cu unitatea.

#### b) Principiul al II-lea

PII 1. Orice observabila a unui sistem cuantic este descrisa printr-un operator autoadjunct care are domeniul si codomeniul in spatiul Hilbert al starilor.

PII 2a) In cazul unui sistem de  $N$  particule punctiforme, coordonatelor carteziene  $x_{\alpha\alpha}$  [in care indicii latini sunt indici uniparticula iar cei grecesti sunt indici cartezieni] si impulsurilor conjugate cu acestea,  $p_{b\beta}$ , li se asociaza operatorii  $\hat{X}_{\alpha\alpha}$  si respectiv  $\hat{P}_{b\beta}$  care satisfac comutatorii canonici definiti prin relatile

$$\left[ \hat{X}_{\alpha\alpha}, \hat{P}_{b\beta} \right] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \hat{I}, \left[ \hat{X}_{\alpha\alpha}, \hat{X}_{b\beta} \right] = \left[ \hat{P}_{\alpha\alpha}, \hat{P}_{b\beta} \right] = 0$$

si obtinuti din asa-zisa regula de cuantificare canonica care consta in substituirea parantezelor Poisson fundamentale cu produsul dintre  $\frac{1}{i\hbar}$  si comutatori, simultan cu inlocuirea variabilelor clasice cu operatori si a constantelor  $c$  cu operatorul  $c\hat{I}$ , unde  $\hat{I}$  este operatorul identitate.

PII 2b) Unei observabile cu corespondent clasic ii corespunde un operator obtinut prin substituirea variabilelor canonice  $x_{\alpha\alpha}$  si  $p_{b\beta}$  cu operatorii  $\hat{X}_{\alpha\alpha}$  si respectiv  $\hat{P}_{b\beta}$ , in simbolul observabilei care reprezinta expresia clasica a

acesteia in care sunt simetrizate produsele ce contin factori carora li se asociaza operatori necomutativi.

## 2. Principiul al III-lea (interpretarea statistica a experientelor de masurare a observabilelor). Mediile observabilelor

### Principiul al III-lea

PIII 1) Valorile spectrale ale operatorului  $\hat{A}$  care descrie o observabila  $A$ , sunt singurele valori pe care le poate lua observabila in experientele concepute pentru masurarea acesteia.

PIII 2) Daca in momentul masurarii observabilei  $A$  starea sistemului este descrisa de vectorii si ponderile  $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$ , atunci probabilitatea ca la masurare sa se obtina valoarea  $a_n$  din spectrul discret al operatorului  $\hat{A}$  [ $a_n \in \sigma^d_{\hat{A}}$ ], este

$$P(a_n) = \sum_k p_k \langle\psi_k | \hat{P}_n | \psi_k\rangle$$

[unde  $\hat{P}_{a_n} \equiv \hat{P}_n$  este proiectorul ortogonal pe subspatiul propriu  $H_{a_n} \equiv H_n$  asociat valorii spectrale  $a_n$ ], iar densitatea de probabilitate in punctul  $\alpha \in I_c$  caruia ii

corespunde valoarea spectrala  $a(\alpha)$  din spectrul continuu al lui  $\hat{A}$  [ $a(\alpha) \in \sigma^c_{\hat{A}}$ ],

este  $P(\alpha) = \sum_k p_k \langle\psi_k | \hat{P}_{\alpha} | \psi_k\rangle$  [unde  $\hat{P}_{\alpha}$  este proiectorul ortogonal in sens generalizat asociat punctului  $\alpha$ ].

#### Comentarii:

In cazul unei stari pure  $|\psi\rangle$  expresiile anterioare devin  $P(a_n)_{\psi} = \langle\psi | \hat{P}_n | \psi\rangle$ ,

$P(\alpha)_{\psi} = \langle\psi | \hat{P}_{\alpha} | \psi\rangle$ , astfel ca

$$P(a_n) = \sum_k p_k P(a_n)_{\psi_k}, \quad P(\alpha) = \sum_k p_k P(\alpha)_{\psi_k}$$

si deci putem interpreta ponderile  $p_k$  drept probabilitati cu care se realizeaza stările pure  $|\psi_k\rangle$  in cadrul starii mixte  $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$ .

#### Mediile observabilelor

Substituind probabilitatile  $P(a_n)$  si densitatile  $P(\alpha)$  din PIII in exprimarea statistica a mediei (pe ansamblul statistic) a observabilei  $A$ , se obtine succesiv

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle_{\{|\psi_k\rangle, p_k\}} &= \sum_{\substack{n \in I_d \\ a_n \in \sigma^d_A}} a_n P(a_n) + \int_{I_c} d\alpha a(\alpha) P(\alpha) = \\
&= \sum_{\substack{n \in I_d \\ a_n \in \sigma^d_A}} a_n \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{P}_n | \psi_k \rangle + \int_{I_c} d\alpha a(\alpha) \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{P}_\alpha | \psi_k \rangle = \\
&= \sum_k p_k \langle \psi_k | \left\{ \sum_{n \in I_d} a_n \hat{P}_n + \int_{I_c} d\alpha a(\alpha) \hat{P}_\alpha \right\} | \psi_k \rangle = \sum_k p_k \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle = \sum_k p_k \langle \hat{A} \rangle_{\psi_k},
\end{aligned}$$

deoarece acolada contine reprezentarea spectrala a operatorului  $\hat{A}$ . Media observabilei pe starea mixta este suma produselor dintre ponderile si mediile observabilei asociate starilor pure din descrierea starii mixte.

### 3. Principiul al IV-lea (legea de evolutie). Principiul al V-lea (influenta experientelor de masurare a observabilelor asupra starii)-cazul starii pure.

#### Principiul al IV-lea

Orice sistem admite o observabila numita energie, posibil dependenta de timp, careia I se asociaza un operator, de asemenea posibil dependent de timp, numit Hamiltonian si notat cu  $\hat{H}(t)$ , care determina evolutia momentana a starii  $\{|\psi_k\rangle, p_k\}$  dupa legea

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_k(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi_k(t)\rangle, \quad p_k = \text{constant in timp.}$$

(Ecuatia de mai sus se numeste ecuatia Schrodinger generalizata)

#### Principiul al V-lea-cazul starilor pure

PV1) Daca in urma masurarii observabilei  $A$  pe starea pura  $|\psi\rangle$  se obtine valoarea  $a_n$

din spectrul discret al lui  $\hat{A}$ , atunci starea sistemului imediat dupa masurare este descrisa de proiectia normata a vectorului  $|\psi\rangle$  pe subspatiul propriu  $H_{a_n}$ , adica de vectorul

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_{a_n} |\psi\rangle}{\|\hat{P}_{a_n} |\psi\rangle\|},$$

unde  $\hat{P}_{a_n}$  este proiectorul ortogonal pe subspatiul  $H_{a_n}$ .

PV2) Daca in urma masurarii observabilei  $\hat{A}$  pe starea pura  $|\psi\rangle$ , cu un aparat cu

selectivitate  $\Delta$  in scara parametrului  $\alpha$ , se obtine valoarea spectrala  $a(\alpha_0)$  din

spectrul continuu al lui  $\hat{A}$ , atunci starea sistemului imediat dupa masurare este descrisa de vectorul

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_{\alpha_0, \Delta} |\psi\rangle}{\|\hat{P}_{\alpha_0, \Delta} |\psi\rangle\|},$$

unde  $\hat{P}_{\alpha_0, \Delta} = \int_{\alpha_0 - \frac{\Delta}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta}{2}} d\alpha \hat{P}_\alpha$  este proiectorul ortogonal pe subspatiul asociat intervalului spectral  $(a(\alpha_0 - \frac{\Delta}{2}), a(\alpha_0 + \frac{\Delta}{2}))$  [din spectrul continuu al lui  $\hat{A}$ ] corespunzator intervalului  $(\alpha_0 - \frac{\Delta}{2}, \alpha_0 + \frac{\Delta}{2}) \subset I_c$  din intervalul total al parametrului  $\alpha$ .

### 4. Teoria cuantica a momentului cinetic:

#### a) Algebra operatorilor moment cinetic;

#### b) Actiunea operatorilor moment cinetic asupra bazei standard a unui spatiu ireductibil

##### 4a) Algebra operatorilor moment cinetic

O observabila de tip moment cinetic este descrisa, prin definitie, de un operator vectorial  $\hat{J}$  ale carui componente  $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ , asociate axelor unui sistem cartezian  $Ox_1x_2x_3$ , satisfac urmatoarea algebra de comutatori

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hbar \hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hbar \hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hbar \hat{J}_2.$$

Baza  $(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$  se numeste baza carteziana a algebrei moment cinetic. Comutatorii

postulati extind algebra operatorilor moment cinetic orbital  $(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$ , la orice observabila de tip moment cinetic, cu sau fara corespondent clasic.

Algebra momentului cinetic implica comutarea operatorului  $\hat{J}^2 \equiv \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$  cu toate componentele  $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$  si deci cu orice combinatie a acestora.

In determinarea spectrului operatorilor moment cinetic si a actiunii acestora, o alta baza utila este baza formata din operatorii  $(\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2, \hat{J}_3)$ .

Din algebra anterioara se deduc comutatorii care definesc algebra momentului cinetic in noua baza

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_3.$$

##### 4b) Actiunea operatorilor moment cinetic asupra bazei standard a unui spatiu ireductibil

Prin definitie, un spatiu ireductibil  $E_j$  este un spatiu invariant [fata de actiunea operatorilor moment cinetic] care nu admite subspatii invariante netriviale [adica diferite de subspatiul nul intins de vectorul nul,  $\{0\}$ , si intregul spatiu  $E_j$ ].



Un spatiu ireductibil  $E_j$  este determinat pana la o echivalenta unitara, de ponderea de moment cinetic  $j$  care poate lua doar valorile  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$  [adica doar valori semiintregi pozitive si intregi nenegative].

Dimensiuna spatiului ireductibil de pondere  $j$  este  $2j + 1$ . Baza standard a unui spatiu ireductibil  $E_j$  este o baza ortonormata formata din vectori proprii comuni pentru

operatorii  $\hat{J}^2$  si  $\hat{J}_3$ ; vectorii ei se noteaza cu  $u_{jm}$  [sau  $|jm\rangle$ ] si satisfac ecuatiile de valori proprii

$$\hat{J}^2 u_{jm} = \hbar^2 j(j+1)u_{jm}, \quad \hat{J}_3 u_{jm} = \hbar m u_{jm}, \quad m = -j, j.$$

$\hat{J}^2$  are o singura valoare proprie pe  $E_j$  iar  $m$  ia  $2j+1$  valori nedegenerate, de la  $-j$  pana la  $j$ , in pasi egali cu unitatea.]

Actiunea operatorilor  $\hat{J}_\pm$  asupra bazei standard este exprimata de ecuatiile

$$\hat{J}_+ u_{jm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} u_{j, m+1},$$

$$\hat{J}_- u_{jm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} u_{j, m-1},$$

[care arata ca  $\hat{J}_+$  are rolul unui operator de "ridicare" iar  $\hat{J}_-$  al unui operator de "coborare" pentru valorile proprii ale lui  $\hat{J}_3$ ].

## Disciplina D9: FIZICA SOLIDULUI și SEMICONDUCTORILOR

### 1. Deduceti expresia numarului de vacante (defecte Schottky) si precizati semnificatia marimilor:

Presupunem un cristal cu  $N$  = număr de atomi și  $n$  = număr de vacanțe (defecte Schottky). Presupunem că energia de formare a unei vacanțe este  $E_V$  și energia internă are expresia:  $U = U_o + nE_V$  (1) în care  $U_o$  este energia internă a cristalului ideal corespunzător. Numărul total de distribuții a vacanțelor în interiorul unui cristal este:  $W = (N!) / (n!)(N-n)!$  Folosind relația lui Boltzmann de definire a entropiei:  $S = S_o + k_B \ln W$  (3) obținem:

$$S = S_o + k_B \ln [N!] / (n!)(N-n)! \quad (4).$$

Înlocuind relația (4) în expresia energiei libere  $F = U - TS$  (5) vom avea:

$$F = U_o + nE_V - ST_o - k_B T \ln [N!] / (n!)(N-n)! \quad (5)$$

Pentru a calcula distribuția vacanțelor la echilibru impunem condiția de minim  $(dF/dn) = 0$ . Vom utiliza formulele lui Stirling:  $\ln N! \approx N \ln N - N$ ;  $\ln n! \approx n \ln n - n$ ;  $\ln (N-n)! \approx (N-n) \ln (N-n) - (N-n)$ . (6). Înlocuind formulele (6) în relația (5) vom obține:

$$F = U_o + nE_V - S_o T - k_B T [N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln (N-n)] \quad (7).$$

Notăm cu  $F_o = U_o - S_o T$  (8) energia liberă a cristalului ideal. Derivând relația (7) în raport cu  $n$  vom obține:  $E_V - k_B T \ln [(N-n)/n] = 0$  (8), sau  $[(N-n)/n] = \exp(E_V/k_B T)$ , în

$$\text{final:} \quad n \approx N e^{-\frac{E_V}{k_B T}}$$

Unde  $n$  = numărul de vacante,  $N$  = numărul total de atomi din retea,  $E_V$  = energia necesara formarii unei vacante,  $k_B$  = constanta Boltzmann,  $T$  = temperature absoluta

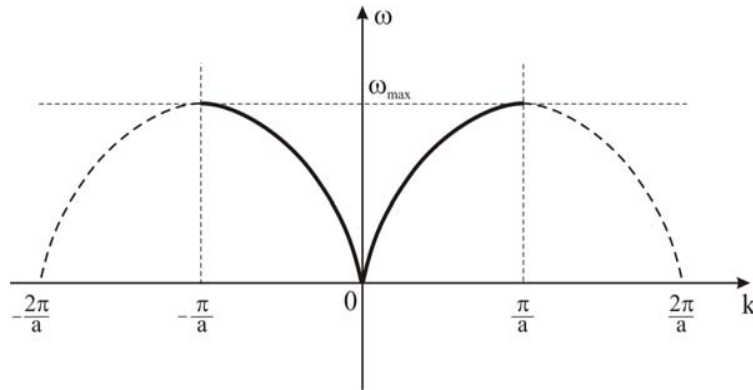
### 2. Deduceti expresia relatiei de dispersie $\omega = f(k)$ in cazul unidimensional al unei rețele formată din $N$ atomi identici cu masa $m$ , separați între ei printr-o distanță egală cu constanta rețelei $a$ , precizați semnificația termenilor si reprezentați grafic

Vom considera că fiecare atom din lanțul unidimensional de atomi identici interacționează numai cu vecinii cei mai apropiați și notăm cu  $F$  forța de atracție, cu  $m$  masa unei particule,  $F/a$  = constanta de forță, notăm cu  $u_n$  deplasarea atomului  $n$  din poziția de echilibru, respective cu  $u_{n+1}$ ,  $u_{n-1}$  deplasările corespunzătoare ale vecinilor cei mai apropiați. Asupra particulei  $n$  acționează două forțe dirijate în sens contrar, astfel încât ecuația de mișcare a particulei  $n$  se scrie:  $m \ddot{u}_n = (F/a)[(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})]$ , sau  $m \ddot{u}_n = (F/a)(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$  (1). Această ecuație se scrie pentru orice particulă din rețea, cu excepția celor plasate la capetele lanțului pentru care trebuie să precizăm condițiile la limită. Ecuația (1) pune în evidență faptul că deplasarea unei particule depinde de deplasările particulelor vecine, în consecință există un cuplaj între oscilațiile particulelor. Soluția cea mai generală o alegem sub forma unei unde plane progressive:

$u_n(t) = A \exp[-i(\omega t - kna)]$  (2) în care  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ . Derivăm de două ori în raport cu timpul relația (2)  $\ddot{u}_n(t) = -\omega^2 u_n(t)$  și introducem în relația (1), de unde rezultă:  $-m\omega^2 A \exp[-i(\omega t - kna)] = (F/a)\{ \exp[-i(\omega t - k(n+1)a] + \exp[-i(\omega t - k(n-1)a] - 2 \exp[-i(\omega t - kna)] \}$  (3) sau  $-m\omega^2 = (F/a)[\exp(ika) + \exp(-ika) - 2] = (2F/a)(\cos ka - 1) = -4(F/a) \sin^2(ka/2)$ , de unde rezultă:  $\omega = \pm \sqrt{\frac{4F}{ma}} \sin \frac{ka}{2}$ , notăm cu  $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{2F}{ma}}$  și

obținem:  $\omega = \pm \omega_{\max} \sin \frac{ka}{2}$ . Dacă  $\omega = \pm \omega_{\max} \Rightarrow \sin \frac{ka}{2} = \pm 1$ , deci  $\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{\pi}{a}$ ,

reprezintă intervalul fundamental de variație a lui  $k$  = număr de undă;  $a$  = constanta rețelei;  $\omega$  = frecvența unghiulară.



**3. Precizați și definiți pe scurt aproximațiile folosite pentru studiul miscării electronilor în rețeaua cristalină.**

a) **Aproximația electronilor liberi** se poate aplica metalelor deoarece concentrația electronilor fiind foarte mare, se poate aproxima ca energia potențială  $V(\vec{r})$  este o funcție constantă, negativă neglijând astfel periodicitatea energiei potențiale în rețeaua cristalină. Această aproximație a fost propusă în 1928 de Sommerfeld cu care a construit cel mai simplu model teoretic pentru explicarea proprietăților metalelor

b) **Aproximația electronilor cvasiliberi**. Se consideră ca energia cinetică a electronilor în cristalină este mult mai mare decât energia potențială. În acest caz, energia potențială a electronilor în rețeaua cristalină  $V(\vec{r})$  diferă cu o mică cantitate față de energia potențială a electronilor liberi  $V_0$ , considerată ca o perturbare la valoarea energiei potențiale. În acest caz se aplică metoda perturbațiilor și această aproximație se poate aplica electronilor de valență

c) **Aproximația electronilor legați**. Se consideră ca energia potențială este mult mai mare decât energia cinetică a electronilor, ceea ce înseamnă că electronii sunt plasați în vecinătatea ionilor din rețeaua cristalină. Această aproximație se aplică electronilor din semiconductori.

**4. Definiți semiconductorii intrinseci, prezentați clasificarea lor, precizați semnificația termenilor din următoarele expresii ale concentrațiilor:**

$$n \approx (8\pi / 3h^3)(2m_n^* k T_C)^{3/2};$$

$$p \approx (8\pi / 3h^3)(2m_p^* k T_C)^{3/2}.$$

Semiconductorii intrinseci au banda de valență complet ocupată și banda de conducție complet liberă la temperatura de zero absolut. Electronii care se găsesc în vecinătatea marginii superioare a benzii de valență vor fi excitați termic și trec în banda de conducție.

Ca urmare, în banda de conducție se vor afla electroni cu masă efectivă  $m_n^*$ , iar banda de valență va fi complet ocupată și va conține goluri cu masă  $m_p^*$ . Deoarece atât electronii cât și golurile contribuie la conducția electrică ei se numesc purtători de sarcină.

Semiconductorii intrinseci se clasifică în semiconductori degenerați și semiconductori nedegenerați.

Semiconductorii se numesc degenerați atunci când nivelul Fermi se găsește la marginea unei zone de conducție sau de valență. În acest caz statistica electronilor și golurilor este cuantică.

Semiconductorii sunt nedegenerați atunci când nivelul Fermi se găsește în zona interzisă. Dacă distanța energetică de la nivelul Fermi la marginea zonelor de conducție sau de valență este cel puțin egală cu  $2k_B T$ , electronii sau golurile nu mai satisfac statistica Fermi-Dirac ci statistica clasică.