

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE FIZICĂ

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT
DINAMICA SISTEMELOR FIZICE NELINIARE

Doctorand:
Fiz. RODICA AURELIA CIMPOIAȘU

Coordonator științific:
Prof. univ. Dr. OLIVIU GHERMAN

CRAIOVA, MAI 2006

I. Cuprinsul tezei:

CAP I. Sisteme Hamiltonian cu dinamică regulată și haotică

1.1 Ecuatii de evoluție, constante ale mișcării și integrabilitate

1.2 "Urme de integrabilitate" în sisteme haotice Hamiltonian. Controlul haosului pentru sisteme integrabile perturbate

1.2.1 Definierea haosului pentru un sistem dinamic

1.2.2 Evidențierea haosului prin instabilitatea unor clase de soluții periodice ale sistemului Hamiltonian

1.2.3 Controlul haosului pentru sisteme Hamiltoniene perturbate

1.2.3.1 Algoritmul Vittot de control al haosului

1.2.3.2 Nou algoritm pentru controlul haosului

1.3 Dinamica haotică și soluții quasiperiodice pentru modelul Yang-Mills mecanic

1.3.1 Modelul Yang-Mills

1.3.2 De la orbitele quasiperiodice la comportamentul haotic

1.3.3 Conexiunea dintre modelele Hénon-Heiles și Yang-Mills

1.4 Controlul haosului pentru sisteme Hamiltoniene cu potențial polinomial

CAP II. Determinarea directă a invariantilor pentru sistemele Hamiltoniene

2.1 Sisteme Hamiltoniane autonome 2D. Algoritm general

2.1.1 Invarianti secundari liniari în viteze

2.1.2 Invarianti secundari pătratici în viteze

2.1.3 Invarianti secundari cubici în viteze

2.1.4 Invarianti secundari quadrici în viteze

2.2 Aplicații

2.2.1 Modelul dinamic Yang-Mills

2.2.2 Modelul dinamic Hénon-Heiles

2.3 Sisteme Hamiltoniene neautonome 2D. Algoritm general

CAP III. Simetrii, invarianti și legi de conservare pentru sisteme dinamice

3.1 Generatorii de simetrie

3.2 Operatori de simetrie Lie și invarianti asociați

3.2.1 Cazul sistemelor Hamiltonian autonome

3.2.2 Cazul sistemelor Hamiltonian neautonome

3.3 Simetrii și legi de conservare pentru sisteme dinamice neliniare

3.3.1 Sisteme dinamice variaționale

3.3.2 Metoda directă de construcție a legilor de conservare

CAP IV. Simetrii și invarianti pentru modele fizice

4.1 Modelul Yang-Mills mecanic

4.1.1 Operatorii de simetrie Lie ai modelului

4.1.2 Invariantii Lie ai modelului

4.2 Modelul Ricci

4.2.1 Operatori Lie pentru modelul Ricci 2D

4.2.2 Sector liniar de invarianță pentru modelul Ricci 2D

4.2.3 Simetrii neclasice ale modelului Ricci 2D

4.2.4 Lege de conservare pentru modelul Ricci 1D

4.3 Ecuația neliniară a căldurii

4.3.1 Metoda simetriilor Lie pentru modelul 2D

4.3.2 Cazuri particulare

4.3.2.1 Cazul $f(u) = u^\alpha$

4.3.2.2 Cazul $f(u) = e^u$

II. Importanța tezei:

Sistemele dinamice au fost intens studiate și prezintă interes atât în sfera cercetărilor teoretice fundamentale cât și a aplicațiilor din matematică și fizică. Este binecunoscut faptul că cele mai multe sisteme naturale sunt neliniare, ceea ce face ca modelarea lor matematică să se facă cu sisteme de ecuații neliniare. În sistemele neliniare, datorită inexistenței principiului superpoziției, metodele generale de rezolvare lipsesc sau cele care există sunt aplicate unor clase bine precizate de probleme descrise prin ecuații neliniare. Pe de altă parte, existența neliniarităților face ca mulțimea soluțiilor și a fenomenelor asociate să fie mult mai mare, unele dintre ele fiind esențiale pentru înțelegerea fenomenelor naturale.

Problematica modelelor neliniare este legată de studii privind metodele, directe sau indirecte, de investigare a integrabilității, rezolvarea numerică a ecuațiilor de evoluție și modelarea grafică a spațiului fazelor pentru sistemele neintegrabile, în special pentru sistemele cu comportament haotic, metodele de control al haosului.

O metodă importantă de cercetare a integrabilității sistemelor neliniare, cu număr finit de grade de libertate este studierea invarianței acestora la un grup 1-parametric de transformări punctuale. Simetriile Lie, care lasă ecuațiile de evoluție ale sistemului invariante sau simetriile de tip Noether, care lasă acțiunea sistemului invariantă sunt în centrul atenției cercetătorilor teoreticieni. În ultimul timp se caută și alte tipuri de simetrii. În literatura de specialitate, de exemplu pentru modelul difuziei rapide, noi clase de soluții, în spațiul 1-dimensional, au fost evidențiate pentru ecuația diferențială neliniară care descrie procesul. S-au identificat simetrii nelocale pentru problema Kepler. Studiul a fost completat, dovedindu-se că aceste simetrii pot fi calculate prin intermediul metodelor standard ale teoriei Lie, dacă se folosește tehnica de reducere a ordinului. O altă direcție de cercetare este studiul perturbării simetriilor sistemelor fizice și determinarea invarianților adiabatici asociați care au un rol important în cercetarea cvasi-integrabilității sistemelor mecanice. De asemenea construirea legilor de conservare pentru diferite modele neliniare, este utilă pentru determinarea mărimilor conservative, pentru analiza soluțiilor și linearizării sistemului.

III. Structura tezei pe capitole

Capitolul 1 include patru secțiuni. În primele două secțiuni, se prezintă, succesiv, o caracterizare a dinamicii regulate pentru sistemele Hamiltonian integrabile, definirea conceptului de haos pentru sistemele dinamice neliniare și două metode algoritmice pentru controlul haosului sistemelor Hamiltonian perturbate. Dintre cele două metode de control al haosului, una a fost introdusă de M. Vittot, iar cea de-a doua reprezintă o contribuție originală. Ultimele două secțiuni ale primului capitol sunt destinate unor aplicații.

Se va analiza mai întâi dinamica modelului mecanic Yang-Mills. În acest context, se vor pune în evidență diferite clase de soluții cvasiperiodice, se vor construi secțiunile Poincaré, pentru două sisteme de tip Yang-Mills, folosind metode numerice de calcul. O

interesantă conexiune între sistemul Yang-Mills și renumitul model mecanic Hénon-Héiles este realizată prin aplicarea unei transformări inversabile de tip "swirl" primului model.

O altă aplicație introdusă în primul capitol este implementarea noului algoritm de control al haosului pentru două sisteme Hamiltonian, cu două grade de libertate și cu potențial polinomial. Astfel, se vor determina funcțiile de control al haosului, pentru care cele două modele neliniare devin integrabile. Spre deosebire de algoritmul Vittot, se poate calcula "deformația" invariantului secundar al sistemului integrabil inițial, pentru fiecare model în parte, astfel încât sistemul controlat să devină integrabil.

Capitolul 2 este structurat pe trei secțiuni. În prima secțiune este analizată metoda directă pentru determinarea invariantilor secundari, de diferite ordine în viteze, pentru sisteme Hamiltoniane bi-dimensionale, autonome. Aplicarea acestui algoritm general pentru modelele dinamice Yang-Mills și Hénon-Heiles va reprezenta obiectivul celei de-a doua secțiuni. Toate cazurile de integrabilitate și formele concrete ale constantelor de mișcare obținute în această aplicație sunt rezultate originale. În ultima secțiune a capitolului, se prezintă metoda algoritmică pentru investigarea invariantilor în cazul general al sistemelor Hamiltonian neautonome, bi-dimensionale.

Capitolul 3 este alcătuit din trei secțiuni. Primele două secțiuni introduc succesiv, modul de construcție al generatorilor de simetrie pentru un sistem dinamic arbitrar, algoritmul general de investigare a operatorilor de simetrie Lie și de determinare a invariantilor asociați lor, pentru sisteme Hamiltoniane autonome, respectiv neautonome. A treia secțiune a acestui capitol explică, în prima parte, condițiile de existență a simetriilor variaționale pentru un sistem de ecuații diferențiale care rezultă dintr-un principiu variațional, precum și modul de construcție a legilor de conservare pentru astfel de sisteme variaționale. Având în vedere dificultatea de obținere a simetriilor variaționale și dependența de coordonate a Teoremei Noether care generează legi de conservare, se prezintă, în ultima parte, o metodă generală, directă, de obținere a legilor de conservare pentru un sistem dinamic neliniar, care poate să nu fie un sistem variațional.

Capitolul 4 are exclusiv un caracter aplicativ. În cele patru secțiuni ale sale se vor analiza, separat, trei modele fizice, folosind metodele algoritmice generale introduse în capitolul anterior.

Primul model este sistemul general autonom Yang-Mills, cu 2 grade de libertate. Pentru acesta s-au determinat deja cazurile de integrabilitate și formele concrete ale invariantilor, prin metoda directă prezentată în capitolul 2, iar pentru două cazuri particulare ale sale s-au evidențiat interesante "urme de integrabilitate" sensibil dependente de condițiile inițiale și s-a studiat comportarea sistemelor, la diferite energii, în capitolul 1. Studiul metodologic a simetriilor și invariantilor Lie, prin metoda indirectă, a fost acceptat pentru publicare în revista IJTP cotată ISI.

A doua aplicație, se va realiza asupra modelului bidimensional al fluxului Ricci, cu aplicații în gravitație (de exemplu pentru studiul găurilor negre), în studierea modelului Carleman al ecuației Boltzmann, în fizica plasmei. Operatorii Lie de simetrie și invariantii asociați, operatorii neclasici și invariantii atașați obținuți pentru modelul bidimensional, precum și determinarea densității unei mărimi conservative, pentru modelul 1-dimensional, se constituie în rezultate nepublicate de alți autori.

A treia aplicație este reprezentată de ecuația neliniară a căldurii. Folosind metoda algoritmică pentru investigarea simetriilor clasice, se va obține sistemul diferențial care va determina operatorii Lie pentru forma generală a ecuației neliniare a căldurii. Se va rezolva sistemul general, pentru 2 cazuri particulare. Se vor genera operatorii de simetrie Lie pentru aceste cazuri, apoi se vor identifica invariantii asociați și se vor evidenția câteva soluții de

similaritate pentru modelele analizate. Vor fi puse în evidență conexiunile problemei 2-dimensionale studiate cu problema 1-dimensională din literatură și cu rezultatele obținute de autor pentru modelul 2D al fluxului Ricci și publicate în JNMP, cotată ISI.

Cele mai importante rezultate vor fi reunite în Capitolul de concluzii.

Programele de calcul numeric utilizate pentru obținerea diferitelor reprezentări grafice vor fi incluse în anexă.

IV. Principalele concluzii

Principalele concluzii ale studiului integrabilității, haosului sau simetriilor unor sisteme dinamice neliniare, cu număr finit de grade de libertate, realizat în prezenta lucrare, pot fi sintetizate astfel:

În primul capitol, au fost puse în evidență "urme de integrabilitate" pentru două modele mecanice de tip Yang-Mills, cu două grade de libertate, asociate câmpului Yang-Mills. Mai exact, au fost puse în evidență, cu ajutorul metodelor numerice, clase de soluții quasiperiodice, care depind sensibil de alegerea setului de condiții inițiale. De altfel, această dependență este specifică sistemelor dinamice haotice, sisteme din rândul cărora câmpul Yang-Mills face parte. Tot prin intermediul analizei numerice, s-au construit suprafețele Poincaré de secțiuni $x = 0$, $y = 0$, pentru modelele menționate. S-a constatat, în secțiunea 1.3, pentru unul din cazurile particulare ale modelului mecanic Yang-Mills, o comportare regulată la o energie mică a sistemului și o evoluție către haos odată cu creșterea energiei. Pentru cel de-al doilea caz particular s-a observat o comportare mult mai stabilă, apariția haosului realizându-se la o energie a sistemului sensibil mai mare.

De asemenea, am identificat o transformare de tip "swirl", care aplicată modelului Yang-Mills studiat conduce la un portret de fază asemănător cu cel al bine cunoscutului sistem Hénon-Heiles, pentru valori sensibil apropiate ale energiilor celor două sisteme. Tot în acest capitol, în subsecțiunea 1.2.2 am propus un nou algoritm, original, pentru controlul haosului la sistemele Hamiltonian perturbate. Algoritmul permite găsirea unei funcții de control de același ordin ($O(\varepsilon)$) cu al perturbației aplicată sistemului integrabil Hamiltonian inițial ales. Aceasta, spre deosebire de algoritmul Vittot în care termenul de control este calculat de ordinul $O(\varepsilon^2)$ în raport cu fluctuația aplicată sistemului regulat inițial. În plus, față de metoda "Vittot", noul algoritm reușește identificarea perturbației cu care trebuie "deformat" invariantul secundar al sistemului integrabil inițial, astfel încât sistemul haotic controlat să admită o dinamică mai regulată. Această posibilitate a fost verificată pentru două modele Hamiltonian cu potențial polinomial. Evidența realizării controlului haosului pentru exemplele menționate, a fost susținută prin construcția secțiunilor Poincaré.

În capitolul 2 s-a prezentat o metodă directă de construcție a invariantilor pentru sisteme Hamiltonian autonome și neautonome, cu 2 grade de libertate. Această metodă algoritmică, presupune căutarea unui invariant de o anumită formă (de exemplu, de diferite ordine în viteze). Pentru aplicație, au fost alese 2 modele autonome bi-dimensionale generale: a) sistemul Yang-Mills, pentru care s-a identificat un caz de integrabilitate în care invariantul secundar (primul invariant fiind Hamiltonianul însuși) este liniar în viteze (momentul cinetic), și trei cazuri, în care a doua constantă a mișcării este pătratică în viteze; b) sistemul Hénon - Heiles care admite două forme integrabile pentru care invariantii secundari sunt pătratici în viteze și un singur caz particular în care a doua constantă a mișcării este de ordinul patru în viteze.

În capitolul al 3-lea a fost abordată metoda indirectă de determinare a invarianților Lie pentru sisteme dinamice neliniare. Mai exact, s-a prezentat un algoritm de determinare a invarianților, în condițiile în care s-au identificat în prealabil operatorii de simetrie Lie care lasă invariante ecuațiile de evoluție ale sistemelor studiate. De asemenea, o metodă directă de construcție a legilor de conservare pentru sisteme dinamice, variaționale sau nu, a fost expusă la finalul acestui capitol.

Capitolul 4 include exemplificarea algoritmului de investigare a generatorilor de simetrie Lie și a invarianților asociați pentru 3 modele fizice diferite:

1) Modelul mecanic general autonom Yang-Mills, cu 2 grade de libertate:

S-au determinat mai întâi formele concrete a 4 operatori de simetrie Lie, ale caror funcții coeficient sunt liniare în viteze. Apoi, din condiția de existență a invariantului asociat unui generator de simetrie, s-au identificat invarianții secundari și cele 4 cazuri de integrabilitate ale modelului. Rezultatele acestui algoritm indirect au coincis cu cele obținute prin metoda directă, prezentate în capitolul 2.

2) Modelul bi-dimensional al fluxului Ricci, cu aplicații în gravitație:

Pentru acest model s-a identificat un operator de simetrie a cărei expresie depinde de 2 parametri și de 2 funcții arbitrare. Alegând forme liniare pentru funcțiile arbitrare, s-a putut genera un set de 6 operatori de simetrie Lie. Acești operatori Lie satisfac o algebră, care poate fi descompusă în 3 subalgebre independente ce admit o reprezentare matriceală interesantă. Expresiile acestor operatori generează simetria ecuației de evoluție la translații în timp și spațiu, la transformare de scală și la dilatare. Invarianții Lie generați de către operatorii de simetrie, au forme interesante, de la cele mai simple (coordonatele însăși) la funcții arbitrare. Folosind anumiți invarianți pentru impunerea unor condiții de similaritate, s-au putut obține soluții foarte simple pentru ecuația de mișcare a modelului Ricci 2D, precum soluții staționare sau o soluție care se propagă liniar în timp. A fost expusă problema generală a simetriilor neclasice pentru modelului 2D al fluxului Ricci. Rezolvarea problemei a condus la redescoperirea operatorilor Lie de simetrie (operatori clasici) și în plus au fost puse în evidență 4 cazuri de generatori de simetrie neclasici. Au fost determinați deasemenea, invarianții neclasici asociați operatorilor neclasici de simetrie. Pentru modelul 1-dimensional al fluxului Ricci, sau echivalent pentru ecuația difuziei rapide, s-a construit, conform metodei generale descrise la capitolul 3, subsecțiunea 3.3.2, legea de conservare din care s-a determinat densitatea de curent conservativ. Autorul tezei intenționează în lucrările viitoare să determine densități ale mărimilor conservative pentru modelul Ricci bidimensional, care presupune o mult mai mare complexitate a calculelor, precum și pentru alte modele de interes fizic.

3) Ecuația neliniară a căldurii

Pentru modelul bi-dimensional al ecuației neliniare a căldurii, prin algoritmul clasic, s-a obținut un sistem general diferențial pentru funcția $f(t)$ care exprimă neliniaritatea modelului și pentru funcțiile coeficient $\xi^1(x,t)$, $\xi^2(y,t)$, $\varphi(t)$, $\phi(x,y,t,u)$ ale operatorului general de simetrie Lie. S-au identificat pentru pentru cazurile $f(t) = u^\alpha$, $f(t) = e^u$, generatorii Lie de simetrie, apoi invarianții asociați acestora. Utilizând expresiile invarianților au fost puse în evidență interesante soluții de similaritate pentru modelul studiat. Pentru cazul $f(t) = u^\alpha$ au fost comparate rezultatele obținute pentru modelul 2D analizat cu cele deja

cunoscute pentru modelul 1D. Pentru modelul 2D cu $f(t) = u^\alpha$, $\alpha = -1$, au fost redescoperiți operatorii Lie pentru modelul Ricci, obținuți în secțiunea 4.2.

Autorul dorește să continue studiul simetriilor pentru sistemele dinamice neliniare, extinzând spectrul investigațiilor. Preocuparea sa viitoare va fi de a aborda alte modele fizice relevante și de a analiza existența altor tipuri de simetrii, nu neaparat Lie (simetrii clasice). Un prim pas s-a realizat, autorul reușind să identifice constrângerile ce trebuie impuse unui sistem dinamic pentru ca acesta să admită un anumit tip de simetrie (de exemplu o simetrie de tip Galilei).

V. Bibliografie selectivă

1. Arrowsmith D.K., Place C.M., "An introduction to dynamical systems", University Press, Cambridge, (1994).
2. Hietarinta J., "Direct methods for the search of the second invariant", Phys., Rep., **147**, No. 2, North-Holland, Amsterdam, (1997), 87-154.
3. Olver P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations", Springer-Verlag, New York, (1993).
4. Lichtenberg A.J., M.A. Lieberman, "Regular and chaotic dynamics", Applied Mathematical Sciences, vol **38**, (1994).
5. Vishnu M., "Thermalization in Yang-Mills Classical Mechanics", hep-ph/ 0103327, (2001).
6. Lubcke M., Niemi A.J., Torokoff K., "Asymptotically Free Yang-Mills Classical Mechanics with Self-Linked Orbits", hep-th / 0301185, (2003).
7. Mellenthin J., Russ S., Phys. Rev E **70**, (2004), 056205.
8. Huijberts, H., Nijmeijer, H., and Willems, R., IEEE Trans. Circ. Syst. I, vol. **47**, no. 6, (2000), 800.
9. Vittot M., Ciruolo G., Pettini M., "Control of chaos in Hamiltonian systems", arXiv:nlin.CD/0311009 v1, (2003).
10. Oloumi A., Teychenné D., Phys. Rev. E **60**, (1999), R 6279.
11. Yau. H.T., Chen, C.K., Chen, C.L., Int. J. Bifurcat. Chaos, vol. **10**, (2000), 1139.
12. Lim, E., Mareels, I.M.Y., Proc. 39Th IEEE Conf. Dec. Control., (2000), 4823.
13. Sirko L., Koch P. M., Phys. Rev. Lett. **89**, (2002), 274101.
14. Cimpoiășu R., Constantinescu R., Cimpoiășu V. M., Proceedings of the 4-th School and Workshop "QFT and Hamiltonian Systems", 16-21 oct., Calimanesti, România (2004), Phys. AUC, vol. **15**, (2005), 215-218.
15. Cimpoiășu R, Constantinescu R., Ionescu C., The Mechanical Yang-Mills Model and Plasma Physics, lucrare prezentată la Conferința internațională APHYS2003, Badajoz (Spania), oct.(2003).
16. Cimpoiășu R., Phys., AUC, vol. **13**, (2003), 64.
17. Cimpoiășu R., Rom. Rep. Phys., vol. **57**, nr. 2, (2005), 167-175.
18. Cimpoiășu R., Constantinescu R., "Lie symmetries for Yang-Mills mechanical model. Methodological approach", International Journal of Theoretical Physics, Volume **45**, Number 9, 2006, pp. 1769-1782.
19. Blackburn M.H., Lopez J.M., J. Fluid Mech. **465** (2002), 33.
20. Stuart A. M., Humphries, "Dynamical systems and numerical analysis", University Press, Cambridge, (1996).
21. Cimpoiășu R., Constantinescu R., Cimpoiășu V.M., Rom. J. Phys., vol **50**, nr.3-4, (2005), 317.